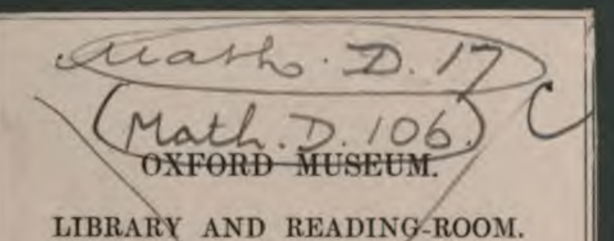












# VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE

DER

# BESTIMMTEN INTEGRALE

ZWISCHEN

# REELLEN GRENZEN.



# VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE

DER

# BESTIMMTEN INTEGRALE

ZWISCHEN

# REELLEN GRENZEN,

MIT VORZÜGLICHER BERÜCKSICHTIGUNG

DER VON P. GUSTAV LEJEUNE-DIRICHLET IM SOMMER 1858 GEHALTENEN VORTRÄGE ÜBER BESTIMMTE INTEGRALE.

VON

DR. PHIL. GUSTAV FERDINAND MEYER,

EHEMALIGEM PRIVATDOCENTEN AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

---

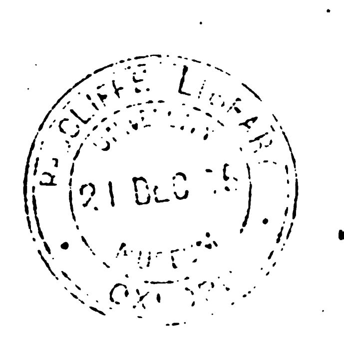
MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1871.



# Vorwort.

Das Werk, welches ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, ist aus den während meiner akademischen Thätigkeit zu wiederholten Malen an der Georgia Augusta von mir gehaltenen Vorlesungen hervorgegangen. Die Grundlage für diese Vorträge bildeten die Aufzeichnungen, welche ich mir in den von Dirichlet im Sommersemester 1858 gehaltenen Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale gesammelt hatte. Obwohl diese Notizen nicht den ganzen Reichthum der überaus schönen, strengen und doch so einfachen Entwicklungen meines unvergesslichen Lehrers enthielten, ja hier und da sogar in dem die Formeln begleitenden Gedankengange Lücken zeigten, oder wegen der kurzen Form, die ich während des Collegiums denselben gegeben hatte, bei der spätern Bearbeitung oft mit Mühe enträthselt werden mussten: so glaube ich doch behaupten zu dürfen, dass in dem Nachfolgenden der eigentliche Kern des Dirichlet'schen Vortrages vollständig wiedergegeben ist. Aus leicht begreiflichen Gründen ist dabei freilich die Ordnung, in der Dirichlet die in Betracht gezogenen Lehren vorgeführt hat, nicht streng innegehalten. So sind beispielsweise die Hauptsätze über die Bedeutung eines bestimmten Integrales für den Fall einer unendlichen Discontinuität der zu integrirenden Function oder beim Unendlichwerden der Integrationsgrenzen von Dirichlet erst bei der Untersuchung der besondern Fälle bestimmter Integrale berührt worden. Die in den Paragraphen 174. — 177. vorgeführten Dirichlet'schen Lehren ferner hat der grosse Mathematiker beim Problem über die Attraction der Ellipsoide abgehandelt, und hiermit schloss die meisterhafte Vorlesung, die überhaupt die letzte des genialen Forschers sein sollte.

Auch rücksichtlich ihres Umfanges weichen die meisten Paragraphen, in denen Dirichlet'sche Gedanken vorkommen, vom Vortrage meines Lehrers ab, indem gar manche Betrachtungen hinzugefügt sind, welche Dirichlet wegen der Kürze der Zeit entweder eben nur angedeutet, oder ganz unterdrückt hat. Um dem Leser hierüber einigermassen Aufschluss zu geben, habe ich in dem Inhaltsverzeichnisse den Paragraphen, die ein Mehr oder Weniger von Dirichlet'schen Betrachtungen in sich begreifen, kurze Notizen über die Quelle, aus der jene geflossen, beigefügt. Die daselbst einfach mit *D* oder *t . D*, grt. *D* bezeichneten Paragraphen beziehen sich auf die Dirichlet'schen Vorträge über bestimmte Integrale.

Ausser diesen Vorlesungen aber habe ich in der vorliegenden Bearbeitung die von mir in den Dirichlet'schen Vorträgen über partielle Differentialgleichungen und über die Kräfte, welche im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entferung wirken, geführten Collegienhefte, sowie die von Dirichlet verfassten Abhandlungen über Gegenstände der Integralrechnung benutzt. So wurden z. B. aus der Vorlesung über partielle Differentialgleichungen mit Zuziehung der bekannten in Dove's Repertorium der Physik enthaltenen Abhandlung über die trigonometrischen Reihen die Darstellung der Fourier'schen Reihen und Integrale, sowie der geometrische Beweis von der Existenz des bestimmten Integrales, ferner die Definition des bestimmten Integrales für den Fall endlicher Discontinuitäten der zu integrirenden Function, die in den Paragraphen: 97. (1 bis Gl. $2^a$), 107. (von den Gleichungen II, S. 322 an), 171., 172. vorkommenden Untersuchungen und aus andern Dirichlet'schen Abhandlungen endlich die Zusätze zu Dirichlet's Theoremen, auf welche er die Convergenz der trigonometrischen Reihen gestützt hat, entlehnt. Dagegen ist die Dirichlet'sche Wintervorlesung 1857/58 über das Potential bloss rücksichtlich einiger allgemeinen, in §. 161. niedergelegten Untersuchungen und einiger Sätze über Kugelfunctionen zu Rathe gezogen. Den Beweis von der Darstellbarkeit einer willkürlichen Function durch Kugelfunctionen habe ich nach Dirichlet's bekannter Abhandlung über diesen Gegenstand wiederzugeben versucht. Die auf den Seiten 425—426 vorgetragenen Lehren, welche in der Dirich-

let'schen Abhandlung unterdrückt sind, die Dirichlet aber, wie ich fest glaube, wenigstens angedeutet haben würde, wäre er auf den vorhin erwähnten Beweis in der Vorlesung über das Potential eingegangen, habe ich auch desshalb beigefügt, weil Herr Professor Dienger im dritten Theile, S. X—XI seines bekannten Werkes über Differential- und Integralrechnung dem Dirichlet'schen Beweise in gewisser Hinsicht einen Mangel an Strenge vorwirft. Uebrigens beruht die a. a. O. sich befindende Bemerkung des Herrn Dienger, aus der auf den Seiten 423—424 des vorliegenden Werkes bewiesenen Eigenschaft der dort vorkommenden Integraldifferenzen, vermöge welcher diese von Herrn Dienger mit $\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)$ und $\varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x)$ bezeichneten Differenzen für $\varepsilon = o$ selbst in Null übergehen, solle nach Dirichlet die Endlichkeit von $\psi'(x)$ und $\varphi'(x)$ folgen, einfach auf einem Irrthum. Denn Dirichlet sagt ausdrücklich (Crelle. Journal. Bd. 17, S. 49):

„Il est essentiel de remarquer que ce résultat

$$(\lim U = F(o) - \tfrac{1}{2}\int_0^\pi F(\gamma) \cos \tfrac{1}{2}\gamma d\gamma)$$

ne cesse pas d'être exact, quand même la fonction $\Theta'(\psi)$ deviendrait infinie pour certaines valeurs particulières de $\psi$. Quoique $\Theta(\psi)$ conserve toujours une valeur finie, la même propriété ne convient pas toujours à la fonction dérivée $\Theta'(\psi)$. Il serait au contraire facile de s'assurer que $\Theta'(\psi)$ devient nécessairement infinie pour certaines valeurs particulières de la variable $\psi$, toutes les fois que la fonction $F(\gamma)$, dont $\Theta(\psi)$ dépend, est une fonction discontinue."

Manche der in meinem Buche vorkommenden Beweise und Entwicklungen rühren von mir her; ich erwähne beispielshalber die Paragraphen 13, 29, 45, 55, 64, 78, 106 (III), 108, 109, 112, 119 u. s. f. Auch habe ich einige elementaren Untersuchungen über Doppelintegrale der Vollständigkeit und ihres häufigen Gebrauches wegen reproducirt. Die allgemeinere Definitionsgleichung des bestimmten Integrales, welche Riemann in seinen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen und in seiner Habilitationsschrift: „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Aus dem 13. Bde. der Abhdl. der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göt-



VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE

DER

# BESTIMMTEN INTEGRALE

ZWISCHEN

REELLEN GRENZEN.

# Inhaltsverzeichniss zur Theorie der bestimmten Integrale.



---

*) Das Zeichen: grt. D. bedeutet grösstentheils nach Dirichlet, t. D. bedeutet theilweise nach Dirichlet, D. p. D. bedeutet Dirichlet's Vorlesung: Integration partieller Differentialgleichungen mit Anwendung auf physikalische Probleme, Sommersemester 1857. D. P. bedeutet Dirichlet's Vorlesung: Ueber die Kräfte, welche im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirken, Wintersemester 1857/58. D. bedeutet nach Dirichlet. D. A. bedeutet nach Dirichlet's Abhandlungen.

Ueber die Darstellung von $\lg\Gamma(a)$ durch Reihen.

III. Kapitel.

Integrale, welche auf Gammafunctionen zurückführbar sind.



Anwendung des Imaginären.



Die Euler'schen Formeln unter der Voraussetzung $k=0$.

### Benutzung unendlicher Reihen.



## IV. Kapitel.

### Die Fourier'schen Reihen und Integrale.

(Mit einigen formellen Abweichungen nach D. p. D. u. D. A. dargestellt.)

## V. Kapitel.

### Verschiedene andere Integralbestimmungen.

#### 1. Anwendung der Cauchy'schen Integrationsmethode.

## II. Buch. Die vielfachen Integrale.

### I. Kapitel.

### Die Doppelintegrale.



#### Erweiterte Bedeutungen eines Doppelintegrales.



#### Inhaltsberechnung gekrümmter Flächen mittelst Doppelintegrale.

## §. 1.

### Einleitende Betrachtungen.

Zu den wichtigsten Begriffen, welche die Mathematik geschaffen, gehört ohne Zweifel der Begriff der Grenze. Seine Einführung wird für die strenge Forschung eine nothwendige Forderung, wenn die Definition oder die Entwicklung einer Grösse einen unendlichen Process in sich begreift. Denn in einem Falle dieser Art muss vor allem die Gewissheit aufgezeigt werden, dass die Ausführung des unendlichen Processes nicht etwa auf einen Widerspruch oder auf ein Resultat führt, das seiner Natur nach für die directe mathematische Betrachtung ohne jedwede Bedeutung ist. Wenn z. B. die bekannte Zahl $e = 2{,}71828182\ldots.$ als die Grenze des Ausdruckes $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ für ein ohne Aufhören wachsendes $m$ erklärt wird, oder wenn die Grösse $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt werden soll; so muss vor allen Dingen die Frage eine Beantwortung finden, ob überhaupt ein wirkliches Resultat in beiden Fällen erzielt werden kann.

Unter der Grenze einer irgendwie Veränderlichen $y$ versteht man nun bekanntlich eine feste Grösse $a$, der $y$ sich so nähert, dass ihr Unterschied von $a$ abgesehen vom Zeichen zuletzt ein beliebig kleines Quantum $\delta$ nicht mehr zu überschreiten vermag. Die Variabele $y$ kann dabei entweder fortwährend grösser, oder kleiner als $a$ sein, oder bald über, bald unter $a$ liegen. Wesentlich ist bloss die Bedingung, dass zuletzt die weitere Veränderung der Grösse $y$ nur zwischen $a + \delta$ und $a - \delta$ Statt finden muss. Nimmt man z. B. $a > 1$ und $x = \infty$, so drückt 0 die Grenze der Grössen $\frac{1}{a^x}$ und $\frac{\sin x}{x}$ aus; während aber $a^{-x}$ beständig über Null liegt, bleibt der Quotient $\frac{\sin x}{x}$ nicht auf derselben Seite der Null.

Sehr häufig nun tritt der Fall ein, dass bei einer Veränderlichen ihre Grenze selbst nicht aufgezeigt werden kann. Alsdann hat offenbar der Nachweis ihrer Existenz grossen Werth. Und diese wird allemal dann zur Gewissheit, wenn man darzuthun vermag, dass eine Veränderliche sich zuletzt nur noch um weniger als eine beliebig kleine, vorher bestimmte Grösse $\delta$, die stets absolut genommen werden darf, verändern kann. Denn da der Voraussetzung gemäss die Variabele $y$, nachdem sie einen gewissen, wenn auch unbekannten Werth $a$ erreicht oder überschritten hat, sich nicht mehr um $\delta$ soll verändern können; so muss sie nothwendig immer zwischen $a + \delta$ und $a - \delta$ sich befinden. Ihre weitere Veränderung kann folglich bloss noch zwischen $b + \delta_1$ und $b - \delta_1$ Statt finden, wo natürlich $b + \delta_1$ und $b - \delta_1$ zwischen $a + \delta$ und $a - \delta$ liegen. Und wird die Veränderung der Grösse $y$ immer weiter und weiter getrieben, so wird sie nur noch zwischen $c + \delta_2$ und $c - \delta_2$ u. s. f. sich bewegen können. Da nun aber bei hinreichend weit fortgesetztem Process das beliebig kleine $\delta$ und folglich auch $\delta_1, \delta_2, \ldots$ von Null so wenig verschieden gewählt werden können, als man nur will; so müssen offenbar sämmtliche Grössen $a, b, c, \ldots$ schliesslich zusammenfallen, d. h. in anderer Ausdrucksweise, die Grösse $y$ nähert sich einer Grenze.

Mit dem Begriff der Grenze beherrscht der der Function das ganze Gebiet der Analysis. Von zwei Veränderlichen $x$ und $y$ aber heisst die eine ($y$) eine Function und näher eine einwerthige oder eindeutige Function der andern ($x$), wenn zu jedem bestimmten Werthe von $x$ ein und nur ein Werth von $y$ gehört. Entsprechen jedem besondern Werthe von $x$ mehrere bestimmte Werthe von $y$, ist also $y$ eine mehrdeutige Function von $x$; so werden wir diese verschiedenen Werthe von $y$ als eben so viel verschiedene Functionen von $x$ betrachten. Geometrisch genommen, d. h. $x$ und $y$ als Abscisse und Ordinate gedacht, wird augenscheinlich eine Curve das Bild einer Function $f(x)$ vorstellen müssen.

Offenbar lässt diese Erklärung einer Function die besondere Art und Weise der Abhängigkeit zweier Veränderlichen völlig unbestimmt. Eine Function kann mithin nur

dann für den Umfang eines gegebenen Intervalles als vollständig bestimmt angesehen werden, wenn sie mathematischen Gesetzen unterworfen oder durch eine genaue Zeichnung dargestellt ist. Und hat man die Function bloss für einen Theil dieses Intervalles vollständig bestimmt, so bleibt ihre Fortsetzung ausserhalb desselben ganz der Willkür anheimgestellt.

Eine Function $y = f(x)$ wird ferner stetig oder continuirlich genannt, wenn für ein der Null sich näherndes $\varepsilon$ die Differenz $f(x + \varepsilon) - f(x)$ gleichfalls die Null zur Grenze besitzt oder mit andern Worten, wenn bei unendlich kleinen Zunahmen des Argumentes $x$ die Function $f(x)$ ebenfalls nur um ein unendlich Kleines sich ändert.

Von den continuirlichen Functionen gilt nun folgender wichtige Satz:

Unterscheiden sich in einem gegebenen Intervalle je zwei aufeinanderfolgende Werthe der unabhängig Veränderlichen um weniger als eine beliebig kleine Grösse $\delta$, so muss der Unterschied der entsprechenden Functionalwerthe weniger als $\beta$ betragen, wo $\beta$ ein dem $\delta$ entsprechend gewähltes beliebig kleines Quantum bezeichnet.

Die Wahrheit dieses Satzes leuchtet unmittelbar aus der Definition der stetigen Functionen ein, doch ist seine Allgemeingültigkeit nur auf ein endliches Intervall beschränkt. Denn nimmt man z. B. in der überall stetigen Function $\sin(x^2)$ für das Argument $x^2$ zwei auf einander folgende ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$, nämlich $(2m + 1)\frac{\pi}{2}$ und $(2m + 3)\frac{\pi}{2}$, so ist einerseits $\sin(x^2) = \pm 1$, andererseits hingegen $\sin(x^2)$ mit $\mp 1$ gleichbedeutend; die Differenz beider Functionalwerthe beträgt also stets zwei Einheiten. Lässt man nun $m$ über jede Grenze hinaus wachsen, so werden $\sqrt{\frac{(2m + 1)\pi}{2}}$ und $\sqrt{\frac{(2m + 3)\pi}{2}}$ sich um weniger als jede noch so kleine Grösse $\delta$ unterscheiden, während $\beta$ immer der Zahl 2 gleich bleibt.

---

# I. Buch.

# Die einfachen Integrale.

## I. Abtheilung.

## Die Principien.

### §. 2.

### Begriff des bestimmten Integrales.

Sei $f(x)$ eine in dem Intervall von $x = a$ bis $x = b$ continuirliche Function von $x$. Zwischen $a$ und $b$ wollen wir die $n - 1$ Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_{n-1}$ einschalten, und zwar sollen diese Grössen in derselben Weise auf einander folgen wie $b$ auf $a$. Ist demnach algebraisch $b > a$, so werden auch die Differenzen

1. $$x_1 - a, \; x_2 - x_1, \; x_3 - x_2, \; \ldots . \; b - x_{n-1}$$

sämmtlich positiv sein. Sie führen dagegen das Zeichen minus, wenn $b < a$, also $b - a$ den negativen Grössen beizuzählen ist. Multipliciren wir nun die vorhin genannten Differenzen der Reihe nach mit den Functionalwerthen

2. $$f(a), \; f(x_1), \; f(x_2), \; \ldots \ldots \; f(x_{n-1}),$$

und addiren wir hierauf sämmtliche Producte; so gewinnen wir die Reihe

3. $$S = (x_1 - a)\, f(a) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + \ldots . + (b - x_{n-1})\, f(x_{n-1}).$$

Offenbar wird dieselbe zu einer unendlichen, wenn $n$ ohne Aufhören wächst, d. h. wenn die Zwischenglieder immer mehr

und mehr gehäuft werden. Ob aber durch ein solches Verfahren die Reihe 3 nicht etwa divergent wird, bleibt vorläufig völlig unentschieden. Um hierüber Aufschluss zu erhalten, wollen wir zuerst den angedeuteten Process in der Art vollziehen, dass zwischen je zwei auf einander folgende Glieder $a$ und $x_1$, $x_1$ und $x_2$ u. s. f. immer neue Werthe $z_1, z_2 \ldots. z_{\nu-1}$; $z_1', z_2', \ldots z'_{\mu-1}$; .... eingeschoben werden. Setzen wir nun voraus, dass schon in Folge der ersten Theilung die $x$ sich nicht mehr um die beliebig kleine Grösse $\varrho$, die entsprechenden Functionalwerthe also nicht mehr um das beliebig kleine $\sigma$ sich zu ändern vermögen; so müssen augenscheinlich die Functionalwerthe

$$f(z_1),\ f(z_2)\ \ldots.\ f(z_{\nu-1})$$

von $f(a)$ um weniger als $\sigma$ verschieden sein, mithin sämmtlich zwischen $f(a)+\sigma$ und $f(a)-\sigma$ sich befinden. Hieraus aber entspringt sogleich, dass die Summe

$$4.\quad \begin{aligned}(z_1-a)\,f(a)+(z_2-z_1)\,f(z_1)+(z_3-z_2)\,f(z_2)\\ +\ldots.+(x_1-z_{\nu-1})\,f(z_{\nu-1})\end{aligned}$$

immer zwischen

$$[f(a)+\sigma]\ [x_1-a]\ \text{und}\ [f(a)-\sigma]\ [x_1-a]$$

liegen muss. Und setzt man in jedem der folgenden Theilintervalle an die Stelle jedes Functionalfactors beziehungsweise wieder $f(x_1)\pm\sigma$, $f(x_2)\pm\sigma$, .....; so erhält man auch hier für die Summen

$$5\ \left\{\begin{array}{l}(z_1'-x_1)f(x_1)+(z_2'-z_1')f(z_1')+\ldots.+(x_2-z'_{\mu-1})f(z'_{\mu-1}),\\ (z_1''-x_2)f(x_2)+(z_2''-z_1'')f(z_1'')+\ldots.+(x_3-z''_{\varkappa-1})f(z''_{\varkappa-1}),\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\end{array}\right.$$

die einschliessenden Werthe

$$[f(x_1)\pm\sigma]\ [x_2-x_1],\ \ [f(x_2)\pm\sigma]\ [x_3-x_2],\ \ldots.$$

Die Summe $\Sigma$ aller dieser Complexe 4 und 5 wird daher zwischen

$$S+\sigma\,(b-a)\ \text{und}\ S-\sigma\,(b-a)$$

enthalten sein. Die Veränderung, welche hiernach unsere ursprüngliche Grösse $S$ durch das Häufen der Zwischenwerthe erlitten, kann also das beliebig kleine Quantum $\sigma\,(b-a)$ nicht

überschreiten. Da nun bei immer weiter fortgesetztem Process wegen der Endlichkeit von $b-a$ die Grösse $\sigma(b-a)$ der Null so nahe gebracht werden kann, als man nur wünscht; so muss nothwendig die Summe 3 eine Grenze besitzen, wenn in irgend einer Weise zwischen je zwei auf einander folgende Glieder der Reihe

$$a, x_1, x_2, \ldots . x_{n-1}, b$$

immer neue und neue Werthe $z$ eingeschoben werden. Es fragt sich daher bloss noch, ob überhaupt bei irgend einer, von der obigen verschiedenen Theilungsweise des Intervalles von $a$ bis $b$ eine Grenze vorhanden und wenn dies der Fall ist, ob unter allen Umständen immer dieselbe Grenze erscheinen wird.

Sei wieder $S$ der Werth der Reihe 3, wenn zwischen $a$ und $b$ in irgend einer Weise die Glieder $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_{n-1}$ eingeschaltet werden, und ebenso bezeichne $S'$ den Werth der entsprechend gebildeten Reihe, wenn $y_1, y_2, \ldots . y_{m-1}$ die Zwischenglieder von $a$ bis $b$ ausdrücken. Die erste Theilung sei dann endlich wieder schon so weit getrieben, dass in keinem der Theilintervalle die Function $f(x)$ um mehr als das beliebig kleine $\sigma$ sich zu ändern vermag.

Aus beiden Reihen $S$ und $S'$ kann nun offenbar eine dritte $U$ dadurch gebildet werden, dass ausser etwaigen neuen Grössen zwischen einzelne oder alle Glieder in den Theilintervallen der einen Reihe Werthe der andern getreten sind, so dass hierdurch eine dem obigen Gedankengange entsprechende Beziehung zwischen den Grössen $S, U, S'$ hergestellt wird. Denkt man sich nämlich die den beiden Reihen $S$ und $S'$ entsprechenden Glieder $a, x_1, x_2 \ldots . x_{n-1}, b$; $a, y_1, y_2 \ldots . y_{m-1}, b$ gleichzeitig und zwar der Grösse nach geschrieben, wobei die zusammenfallenden Glieder wie etwa $x_1$ und $y_2$ nur als ein Werth zu betrachten sind; so kann $U$ aus der Reihe $S$ dadurch entstanden gedacht werden, dass ausser etwaigen andern Werthen z. B. zwischen $a$ und $x_1$ das Glied $y_1$, zwischen $x_1$ und $x_2$ das Glied $y_3$ u. s. f. eingeschoben ist. Umgekehrt aber kann $U$ ersichtlich auch als die Reihe aufgefasst werden, welche aus $S'$ hervorging, indem zwischen ihre Glieder $a, y_1, \ldots .$ einzelne oder alle der Folge $a, x_1, x_2 \ldots .$ eingereiht wurden.

Dem Obigen gemäss können daher $S$ und $U$ höchstens nur um $\sigma(b - a)$ verschieden sein, und ebenso kann der Unterschied zwischen $U$ und $S'$ höchstens $\sigma(b - a)$ heissen. Die beiden Reihen $S$ und $S'$ können sich mithin höchstens bloss um das Doppelte $2\sigma(b - a)$ unterscheiden. Diese Differenz aber kann jeden beliebigen Grad der Kleinheit erreichen und folglich muss, wenn $S$ einer Grenze sich nähert, nothwendig auch für $S'$ eine und zwar dieselbe Grenze wie bei $S$ existiren. Nun besitzt aber $S$ eine Grenze, weil wir mit Hülfe der Reihe $U$ den oben erörterten Fall wieder erzielt haben, und demnach muss die Reihe

$$(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

stets einer und derselben Grenze sich nähern, wenn in irgend einer Weise zwischen $a$ und $b$ nur fortwährend neue Glieder eingeschaltet werden.

Diese Grenze heisst das von $a$ bis $b$ genommene bestimmte Integral der Function $f(x)$ und wird nach Fourier's Vorgange*) durch das Zeichen

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

angedeutet. Das Symbol $dx$ vertritt hierbei die einzelnen Differenzen $x_1 - a$, $x_2 - x_1 \ldots$, und $a$ und $b$ werden beziehungsweise die untere und obere Grenze des Integrales genannt.

Uebrigens erkennt man noch auf den ersten Blick, dass die Benennung des Integrationsbuchstabens völlig gleichgültig ist. Man hat daher

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy.$$

---

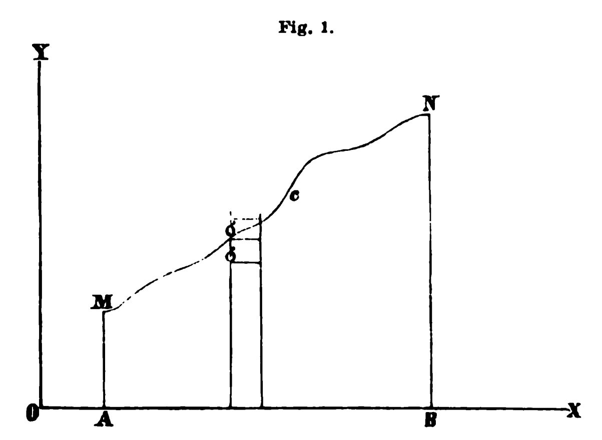
*) Fourier: Théorie analytique de la chaleur. À Paris 1822, page 252.

## §. 3.

### Geometrische Bedeutung des bestimmten Integrales.

Der vorhin gegebene Beweis von der Existenz des bestimmten Integrales vereinfacht sich nicht wenig, wenn man die Deduction auf geometrische Betrachtungen stützt. Denn da das Bild einer zwischen $a$ und $b$ continuirlichen Function $f(x)$ eine Curve $M\,c\,N$ ist; so wird offenbar die Reihe 3 bei Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Summe der Rechtecke bedeuten, welche man dadurch erhält, dass man zu der Abscissenachse durch jeden Endpunkt der Ordinaten $f(a)$, $f(x_1)$, .... $f(x_{n-1})$ Parallelen zieht. Trägt

Fig. 1.




man nun hierauf die Strecke $\sigma$ oberhalb und unterhalb jedes Endpunktes der Ordinaten $f(a)$, .... $f(x_{n-1})$ ab und construirt durch die gewonnenen Punkte wiederum Parallelen zur Abscissenachse; so wird ersichtlich der Bedeutung der beliebig kleinen Grösse $\sigma$ zufolge keine dieser Parallelen die Curve in einem zweiten Punkte schneiden können. Und daher wird immer $S$ und ebenso der Flächenraum $\Sigma = A\,M\,c\,N\,B$ zwischen $S + \sigma(b - a)$ und $S - \sigma(b - a)$ liegen müssen, wie auch die Theilung des Intervalles von $a$ bis $b$ geschehen mag. Diese Grösse $\Sigma$ und die Summe $S$ können sich mithin bei unendlichem Processe nicht mehr um die unendlich kleine Grösse $2\sigma(b - a)$ unterscheiden. Mit andern Worten aber heisst dies,

dass der von der Curve $M\,c\,N$, den Ordinaten $A\,M$ und $B\,N$ und dem Stück $A\,B$ der Abscissenachse begrenzte Raum das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,d\,x$ vorstellt. Natürlich müssen bei dieser Definition die einzelnen Rechtecke als algebraische Grössen aufgefasst werden. Ist folglich beispielsweise $b > a$, so sind die unterhalb der Abscissenachse befindlichen Rechtecke mit dem Zeichen *minus* in Rechnung zu bringen.

Vergleicht man noch beide Begründungsweisen der Definitionsgleichung des bestimmten Integrales mit einander, so lässt sich gar nicht leugnen, dass die geometrische vor der analytischen den Vorzug grosser Anschaulichkeit besitzt. Während jedoch die analytische Deduction nur die Kenntniss weniger Sätze aus der Lehre von der Addition und Multiplication gegebener Grössen verlangt, kommen bei dem geometrischen Beweise ausser diesen Sätzen noch alle diejenigen in Frage, auf welche die Bestimmung des Inhaltes eines Rechteckes sich gründet, und ausserdem sind die ersten Elemente der analytischen Geometrie als bekannt vorauszusetzen. Dem Principe nach ist daher der analytische Beweis von der Existenz des bestimmten Integrales der einfachere.

## §. 4.

### Möglichkeit der Integralbestimmung mittelst der Definitionsgleichung eines bestimmten Integrales. Anwendung auf die Differentialrechnung.

Schon der flüchtigste Blick auf die vorhergehenden Erörterungen lässt erkennen, dass mit dem Nachweise von der Existenz der Definitionsgleichung

$$1.\quad \int_a^b f(x)\,d\,x = \lim_{n=\infty}.\,[(x_1 - a)\,f(a) + (x_2 - x_1)\,f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})\,f(x_{n-1})]$$

zugleich die Möglichkeit gegeben ist, den Werth eines bestimmten Integrales mit jedem beliebigen Grade der Annäherung zu berechnen. Nicht immer findet ein solch' glückliches Zusammentreffen Statt. So wird beispielsweise in der Algebra gezeigt, dass jede Gleichung vom $n^{ten}$ Grade auch

$n$ Wurzeln besitzen muss; aber mit dem Beweise dieses wichtigen Lehrsatzes ist keineswegs schon eine Methode zur Auffindung der Wurzeln geliefert.

Unter Umständen kann selbst der genaue Werth eines bestimmten Integrales mittelst der Gleichung 1 erzielt werden und zwar dann, wenn die Summe der unendlichen Reihe in 1 sich angeben lässt. Sei z. B. $f(x) = x^k$, wo $k$ eine Constante ausdrückt; ausserdem mögen, um eine völlig eindeutige Function zu gewinnen, die Grenzen $a$ und $b$ des Integrals beide grösser, als Null sein. Setzen wir nun $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = q$ und lassen die Grössen $x_1, x_2 \ldots.$ in geometrischer Reihe auf einander folgen, d. h. bilden wir die Progression

$$a, \; aq, \; aq^2, \ldots. \; aq^{n-1}, \; b;$$

so wird allgemein

$$(x_{\nu-1} - x_\nu) f(x_\nu) = a^{k+1} q^{(k+1)\nu} (q - 1)$$

und daher

$$\int_a^b x^k \, dx = \lim a^{k+1} (q-1) \left[1 + q^{k+1} + (q^{k+1})^2 + \ldots. + (q^{k+1})^{n-1}\right]$$

$$= \lim (q-1) a^{k+1} \frac{(q^n)^{k+1} - 1}{q^{k+1} - 1} = \lim . \frac{q-1}{q^{k+1} - 1} (b^{k+1} - a^{k+1}).$$

Nun ist für $n = \infty$ und ein von $-1$ verschiedenes $k$ $\frac{q-1}{q^{k+1}-1} = \frac{0}{0}$, der wahre Werth dieses Quotienten, nach den Lehren der Differentialrechnung bestimmt, aber $= \frac{1}{k+1}$ und demnach

$$\int_a^b x^k \, dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Nähert sich hierin $k$ der negativen Einheit, so erhält man abermals die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, in Wahrheit jedoch den Werth $\lg b - \lg a$, d. h.

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lg \frac{b}{a}.$$

2. Sei jetzt $f(x)$ einer Exponentialgrösse, also einer positiven Constanten mit variabelem Exponenten, nämlich $c^x$ gleich; ausserdem bedeute $\varepsilon$ eine mit wachsendem $n$ unendlich klein

werdende Grösse und näher eine solche, für welche die Beziehung $\lim (a + n\,\varepsilon) = b$ gilt. Zwischen die Grenzen $a$ und $b$ sollen nun in arithmetischer Reihe die Werthe

$$a + \varepsilon,\ a + 2\,\varepsilon,\ a + 3\,\varepsilon,\ \ldots .\ a + \overline{n - 1} \cdot \varepsilon$$

eingeschoben werden, wobei wir also durchaus nicht voraussetzen, dass gerade $\frac{b - a}{n} = \varepsilon$ Statt finden müsse. Unsern Annahmen zufolge erhalten wir jetzt diese Gleichung

$$\int_a^b c^x d\,x = \lim c^a \cdot \varepsilon \left[1 + c^\varepsilon + c^{2\varepsilon} + c^{3\varepsilon} + \ldots . + c^{(n+1)\varepsilon}\right]$$

$$= \lim \frac{\varepsilon}{c^\varepsilon - 1} \left(c^{a+n\varepsilon} - c^a\right),$$

d. h.

$$2. \qquad \int_a^b c^x\, d\,x = (c^b - c^a) \lim \frac{\varepsilon}{c^\varepsilon - 1}.$$

Da nun mit wachsendem $n$ die Grösse $\varepsilon$ der Null sich nähert, so werden wir auch hier wieder auf eine Anwendung der bekannten Regel der Differentialrechnung über die Ermittlung des unbestimmten Ausdruckes von der Form $\frac{0}{0}$ hingewiesen. Wir ziehen es indess vor, diese Vorschrift gegenwärtig ausser Acht zu lassen, weil wir gestützt auf die Beziehung 2. den Nachweis liefern wollen, dass jede Exponentialgrösse einen Differentialquotienten besitzen muss. Dies führt uns dann sogleich zu einer höchst einfachen Definition der Zahl $e$, vermöge deren wir nun umgekehrt wieder nicht nur den Werth $\lim \frac{\varepsilon}{c^\varepsilon - 1}$, sondern auch die bekannte Beziehung $e = \lim (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ für $\lim \alpha = 0$ in der einfachsten Weise ermitteln können. Mit andern Worten aber heisst dies, dass zur Bestimmung der Derivirten der Exponentialfunctionen, der Logarithmen und Potenzen nur der Nachweis von der Existenz der Grenze des Ausdruckes $\frac{c^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ für ein unendlich klein werdendes $\varepsilon$ erforderlich ist. Man erkennt hieraus auf den ersten Blick, dass so bei der Begründung der Differentialrechnung jede Anwendung von bekannten unendlichen

Reihen vermieden wird; den numerischen Werth der Zahl $e$ aber wird man erst bei der Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen ermitteln.

Der angedeutete Gedankengang selbst wird sich nun so darstellen. Bedenken wir nämlich, dass dem Frühern zufolge das bestimmte Integral $\int_a^b c^x\, d\, x$ immer existirt und einen von Null verschiedenen Werth erhält, so muss nothwendig $\lim \frac{\varepsilon}{c^\varepsilon - 1}$ eine nicht mit Null zusammenfallende Constante ausdrücken. Daraus folgt weiter, dass auch $\lim \frac{c^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$ einer Grenze sich nähert und zwar muss, weil $\frac{c^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = c^\varepsilon \cdot \frac{c^{-\varepsilon} - 1}{-\varepsilon}$, also

$$\lim \frac{c^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \lim \frac{c^{-\varepsilon} - 1}{-\varepsilon},$$

diese Grenze stets dieselbe bleiben.

Erinnern wir uns jetzt der bekannten Definitionsgleichung des Differentialquotienten einer Function, so muss, falls eine Exponentialgrösse $c^x$ für ein gegebenes Intervall, von $a$ bis $b$ z. B., wirklich eine Derivirte besitzen sollte, mit abnehmendem $\varepsilon$ nothwendig der Ausdruck

$$\frac{c^{x+\varepsilon} - c^x}{\varepsilon} = c^x \cdot \frac{c^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

immer dieselbe Grenze darbieten, von welcher Seite her auch $\varepsilon$ der Null sich nähern mag. Dies aber ist dem Vorhergehenden zufolge in der That der Fall, und folglich besitzt jede Exponentialgrösse wirklich eine Abgeleitete, nämlich $c^x$ . const.

Es fragt sich also bloss noch, in welcher Beziehung die Differentialcoefficienten für verschiedene Basen zu einander stehen.

Nimmt man eine neue Basis $c_1$, so lässt sich diese stets als eine bestimmte — die $\mu^{te}$ — Potenz der ursprünglichen $c$ auffassen. Es ist daher

$$\lim \frac{c_1^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \lim \frac{(c^\mu)^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = k_1;$$

anderseits aber hat man, wenn

$$\lim \frac{c^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = k$$

gesetzt wird,

$$k = \lim \frac{c^{\mu\varepsilon} - 1}{\mu\varepsilon} = \frac{1}{\mu} \lim \frac{c^{\mu\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = \frac{k_1}{\mu},$$

d. h.

$$\mu k = k_1.$$

Und hieraus erhellt augenblicklich, dass für $\mu = \frac{1}{k}$ der besonders wichtige Fall

$$\lim \frac{(c^{\frac{1}{k}})^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1$$

erscheinen wird. Nennen wir aber die Basis, für welche diese Beziehung Statt findet, $e$, definiren wir also die Zahl $e$ durch die Gleichung

$$\lim \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1,$$

so wird

$$\frac{d e^x}{dx} = e^x.$$

Und nehmen wir $e$ als Basis eines Logarithmensystems, so ergeben sich nun wegen $c^{\frac{1}{k}} = e$, d. i. $k = \overset{e}{\log} c = l\, c$ umgekehrt wieder die Beziehungen

$$\lim \frac{c^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = l\, c$$

und

$$\frac{d c^x}{dx} = c^x \lg c.$$

Setzt man ferner $c^\varepsilon - 1 = \alpha$, d. g. $\varepsilon = \frac{\lg (1 + \alpha)}{\lg c}$, so folgt sogleich

$$\lim \frac{c^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \lim \frac{\alpha}{\lg (1 + \alpha)} \cdot \lg c = \lg c,$$

d. h.

$$\lim \left[\lg (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = 1$$

und daher muss Statt finden:

$$\lim (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \quad \lim \alpha = 0.$$

Weil endlich für die Potenz $x^m$ die Gleichung gilt:

$$\frac{d\,x^m}{d\,x} = x^{m-1} \cdot \lim \frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^m - 1}{\frac{\varepsilon}{x}} = x^{m-1} \cdot \lim \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta},$$

so wird, wenn man auch hier der Kürze halber

$$(1+\delta)^m = e^r, \text{ also } r = m \lg(1+\delta)$$

setzt,

$$\lim \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta} = \lim \frac{e^r - 1}{\delta} = \lim \frac{e^r - 1}{r} \frac{m \lg(1+\delta)}{\delta}$$

$$= m \lim \lg(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = m.$$

Mit Benutzung des vorhin gefundenen Werthes

$$\lim \frac{\varepsilon}{c^\varepsilon - 1} = \frac{1}{l\,c}$$

stellt sich jetzt unser Integral 2. wie folgt dar:

$$\int_a^b c^x\,d\,x = \frac{c^b - c^a}{l\,c}.$$

3. Um endlich ein drittes interessantes Beispiel hier nicht unberücksichtigt zu lassen, wollen wir noch das Integral

$$\int_0^\pi \lg(1 - 2\,\alpha\cos x + \alpha^2)\,d\,x,$$

in welchem wir $\alpha^2$ von der Einheit verschieden voraussetzen, einer nähern Betrachtung unterziehen*).

Denken wir uns das Intervall von 0 bis $\pi$ in $n$ gleiche Theile zerlegt, und nehmen wir die Zwischenglieder in arithmetischer Reihe, nämlich $= \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots \frac{(n-1)\pi}{n}$, so wird ersichtlich

$$\int_0^\pi \lg(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx = \lim \frac{\pi}{n}\left[\lg\left(1-2\alpha\cos\frac{0\pi}{n}+\alpha^2\right)\right.$$

$$\left.+\lg\left(1-2\alpha\cos\frac{2\pi}{n}+\alpha^2\right)+\ldots+\lg\left(1-2\alpha\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\alpha^2\right)\right]$$

$$= \lim\frac{\pi}{n}\lg\left[\left(1-2\alpha\cos\frac{0\pi}{n}+\alpha^2\right)\left(1-2\alpha\cos\frac{2\pi}{n}+\alpha^2\right)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\left(1-2\,\alpha\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\alpha^2\right)\right].$$

*) Bierens de Haen: Exposé de la théorie des int. def. p. 471.

Nun ist bekanntlich nach Cotes' Lehrsatze

$$\alpha^{2n} - 1 = (\alpha^2 - 1)\left(\alpha^2 - 2\alpha\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\left(\alpha^2 - 2\alpha\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right)$$
$$\ldots \left(\alpha^2 - 2\alpha\cos\frac{2(n-1)\pi}{2n} + 1\right),$$

also der vorhergehende Logarithmus mit $\lg\frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\alpha^{2n} - 1)$ gleichbedeutend. Und demnach besteht nunmehr die Gleichung

$$\int_0^\pi \lg(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = \lim\frac{\pi}{n}\lg\frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \lim\frac{\pi}{n}\lg(\alpha^{2n} - 1).$$

Für $n = \infty$ aber wird die erste Grenze augenscheinlich $= 0$, und für den zweiten Grenzausdruck erhalten wir die Werthe

$$\lim\frac{\pi}{n}\lg(\alpha^{2n} - 1) = \pi\lg\alpha^2, \quad \text{oder} = 0,$$

je nachdem $\alpha^2 > 1$, oder $\alpha^2 < 1$. Mithin entspringt

$$\int_0^\pi \lg(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = \pi\lg\alpha^2, \quad \alpha^2 > 1,$$
$$= 0, \quad \alpha^2 < 1.\text{*)}$$

## §. 5.

### Fundamentaltheoreme.

Aus der oben gegebenen Definitionsgleichung eines bestimmten Integrales:

$$\text{I.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim\left[(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})\right]$$

fliesst unmittelbar eine Reihe von Sätzen, die wir ihres häufigen Gebrauches wegen jetzt übersichtlich zusammenstellen wollen. Um aber hierbei Widerholungen zu vermeiden, bemerken wir gleich im Voraus, dass vorerst die vorkommenden Functionen innerhalb sämmtlicher Integrationsgrenzen immer als stetig und diese als endlich angenommen werden.

---

*) Ueber andere Begründungsweisen dieser von Poisson gefundenen Beziehungen vergleiche man Dienger: Differential- und Integralrechnung. Stuttgart 1862; Thl. 1, S. 354—355.

Poisson. Iournal de l'école polyt. cah. 17, p. 617.

Delaunay. Iournal de math. etc. par Liouville, t. 3, p. 355.

1. Sei $f(x)$ eine solche Function von $x$, die innerhalb des Intervalles von $a$ bis $b$ ihr Zeichen niemals wechselt. Beachtet man nun, dass unserer Voraussetzung zufolge die Differenzen $x_1 - a$, $x_2 - x_1$ .... mit $b - a$ dasselbe Vorzeichen besitzen; so muss offenbar das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ positiv, oder negativ sein, je nachdem die Zeichen von $f(x)$ und $b - a$ übereinstimmen, oder nicht identisch sind.

2. Sei jetzt $c$ eine Constante und $f(x) = c\,f(x)$, alsdann folgt aus I. sofort

$$\int_a^b c\,f(x)\,d\,x = c\int_a^b f(x)\,d\,x.$$

Ist also $f(x) = 1$, so wird

$$\int_a^b c\,d\,x = c\,(b - a).$$

3. Zerlegt man $f(x)$ in eine Summe oder Differenz zweier Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, so hat man diese Gleichung

$$\int_a^b [\varphi(x) \pm \psi(x)]\,d\,x = \int_a^b \varphi(x)\,d\,x \pm \int_a^b \psi(x)\,d\,x.$$

4. Ebenso unmittelbar einleuchtend wie vorhin sind ferner die folgenden Relationen:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x - c)\,d\,x = \int_a^b f(x)\,d\,x$$

und

$$\frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right)\,d\,x = \int_a^b f(x)\,d\,x,$$

in denen $c$ eine beliebige Constante ausdrückt [$c$ (=) 0].

5. Machen wir jetzt die Annahme, dass die Zwischenglieder $x_1$, $x_2$, .... in arithmetischer Reihe $a + \delta$, $a + 2\delta$, .... auf einander folgen, wobei $\delta = \frac{b-a}{n}$ sein soll; so wird unser $S$ nunmehr unter dieser Form erscheinen:

$$S = \delta\,[f(a) + f(a + \delta) + f(a + 2\delta) + \dots + f(a + \overline{n - 1}.\delta)],$$

also

$$\text{II.} \int_a^b f(x)\,d\,x = \lim \delta\,[f a + f(a + \delta) + \dots + f(a + \overline{n - 1}.\delta)]$$

sein. Und vertauschen wir $b$ mit $a$, d. h. $\delta$ mit $-\delta$, so kommt

$$S' = -\delta[f(b)+f(b-\delta)+f(b-2\delta)+\ldots.+f(b-\overline{n-1}.\delta)]$$

und

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim -\delta[f(b)+f(b-\delta)+\ldots.+f(b-\overline{n-1}.\delta)].$$

Aus der Vergleichung beider Reihen $S$ und $S'$ aber ergiebt sich, dass sie mit Ausnahme der Glieder $f(a)$ und $f(b)$ die nämlichen Functionalwerthe in sich begreifen; ihre Summe $S + S'$ ist daher mit $-\delta\,[f(b) - f(a)]$ gleichbedeutend. Weil nun mit wachsendem $n$ diese Summe die Null zur Grenze besitzt, so muss nothwendig $\lim S = -\lim S'$ sein, d. h.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

6. Der so eben bewiesene, äusserst wichtige Satz wird uns sogleich das Mittel bieten, jedes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ immer in die beiden andern $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ zu zerlegen, mag die Grösse $c$ innerhalb oder ausserhalb der Grenzen $a$ und $b$ sich befinden. Liegt nämlich zunächst $c$ zwischen $a$ und $b$, so folgt wieder aus der Fundamentalgleichung I. (oder II.) sowohl, wie auch unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrales, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Befindet sich dagegen $c$ ausserhalb der Grenzen $a$ und $b$, ist also z. B. die Folge der drei Grössen diese $a$, $b$, $c$; so ist zuvörderst

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

mithin

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

und hieraus entspringt nun mit Benutzung des Satzes unter 5.:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Einen ganz ähnlichen Gedankengang endlich würde man innezuhalten haben, wenn $c$, $a$, $b$ die Aufeinanderfolge der drei Grössen bezeichnet.

## §. 6.

### Fortsetzung.

Die vorhergehenden Betrachtungen setzen uns in den Stand, ein Theorem zu begründen, das namentlich bei den später folgenden Entscheidungen über den Sinn solcher Integrale eine ausserordentlich wichtige Rolle spielt, bei denen nicht mehr die eine oder andere der bisjetzt gemachten Voraussetzungen der Stetigkeit der Function und der Endlichkeit der Integrationsgrenzen befriedigt wird.

Sei nämlich $f(x)$ in das Product zweier ccontinuirlichen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zerlegbar. Von diesen behalte innerhalb der Grenzen $a$ und $b$ die eine, beispielsweise $\varphi(x)$ stets dasselbe Zeichen, und $M$ und $N$ mögen zwischen $a$ und $b$ beziehlich den algebraisch grössten und kleinsten Werth der andern Function $\psi(x)$ bezeichnen. Diesen Annahmen gemäss müssen daher die Differenzen

$$M - \psi(x) \quad \text{und} \quad \psi(x) - N$$

immer positiv sein, und folglich müssen auch die Producte

$$[M - \psi(x)]\, \varphi(x) \quad \text{und} \quad [\psi(x) - N]\, \varphi(x)$$

ihrem Zeichen nach übereinstimmen. Daraus aber fliesst weiter, dass gleichfalls die Integrale

$$\int_a^b [M - \psi(x)]\, \varphi(x)\, dx \quad \text{und} \quad \int_a^b [\psi(x) - N]\, \varphi(x)\, dx$$

immer entweder beide positiv, oder beide negativ sind. Nun ist

$$\int_a^b [M - \psi(x)]\, \varphi(x)\, dx = M \int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b \psi(x) \,.\, \varphi(x)\, dx$$

und

$$\int_a^b [\psi(x) - N]\, \varphi(x)\, dx = \int_a^b \varphi(x) \,.\, \psi(x)\, dx - N \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Das Integral $\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx$, d. h. $\int_a^b f(x)\, dx$ liegt also

zwischen den beiden Integralen

$$M\int_a^b \varphi(x)\,dx \quad \text{und} \quad N\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Da nun die Functionen continuirlich sein sollen, so muss nothwendig zwischen dem Maximum und Minimum von $\psi(x)$ innerhalb des Intervalls $(a, b)$ ein freilich unbekannter Factor $R = \psi(\xi)$ existiren, für welchen genau

$$\int_a^b f(x)\,dx = R\int_a^b \varphi(x)\,dx = \psi(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

wird.

Wir können diesem wichtigen Theoreme, das wir der Kürze halber bisweilen den Maximum-Minimum-Satz nennen werden, noch eine andere Form geben, von der wir bei der Restbestimmung der Taylor'schen Reihe Gebrauch machen werden.

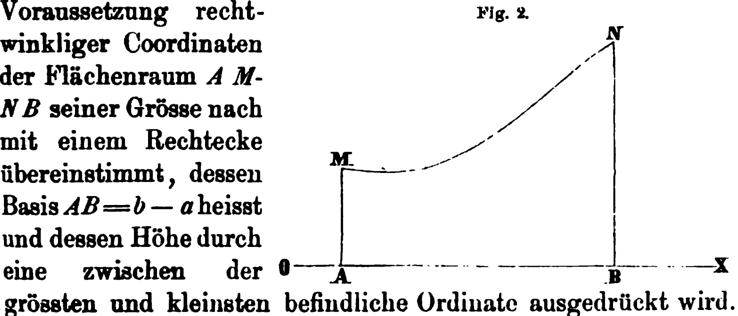
Beachten wir nämlich, dass für $z = 0$ und $z = 1$ der Ausdruck $a + (b - a)\,z$ beziehungsweise die Grössen $a$ und $b$ liefert, so kann offenbar die zwischen $a$ und $b$ befindliche Variabele $\xi$ in der Form $a + (b - a)\,\vartheta$ vorgestellt werden, wenn $\vartheta$ zwischen 0 und 1 liegt. Mit Benutzung dieses Werthes aber wird nun

$$\int_a^b f(x)\,dx = \psi\,[a + (b - a)\,\vartheta]\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Ist speciell $\varphi(x) = 1$, also $\psi(x) = f(x)$, so hat man die Beziehung

$$\int_a^b f(x)\,dx = f[a + (b - a)\,\vartheta]\,[b - a] = R\,[b - a].$$

Geometrisch gedeutet sagt offenbar dieser Satz, dass unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten der Flächenraum $AMNB$ seiner Grösse nach mit einem Rechtecke übereinstimmt, dessen Basis $AB = b - a$ heisst und dessen Höhe durch eine zwischen der grössten und kleinsten befindliche Ordinate ausgedrückt wird.



Verwandt mit dem oben erörterten Theoreme ist offenbar der nachfolgende Satz.

Ist in dem Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ die stetige Function $f(x)$ fortwährend grösser, als die continuirliche Function $\psi(x)$; so hat man für $b > a$ augenscheinlich die Relation

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Daraus aber fliesst weiter, dass

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

ist, wenn innerhalb der Grenzen $a$ und $b$ beständig die Beziehungen gelten

$$\varphi(x) > f(x) > \psi(x).$$

So befindet sich beispielsweise das Integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}}$, wo $m > 2$, zwischen den beiden Grenzen

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx = 0,5 \text{ und } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6} = 0,523\ldots.$$

## §. 7.

### Differentiation eines bestimmten Integrales nach den Grenzen.

Der Werth eines bestimmten Integrales ist augenscheinlich durch die Grenzen desselben und durch die Natur der zu integrirenden Function bedingt. Erleidet folglich irgend eine dieser Grössen eine Aenderung, so muss eine solche natürlich auch bei dem bestimmten Integrale sichtbar werden. Nehmen wir also z. B. an, dass in

$$u = \int_a^b f(x)\,dx.$$

die obere Grenze $b$ in $b + h$ übergeht, wobei wir für ein positives $h$ die Function $f(x)$ nun von $a$ bis $b + h$ continuirlich

voraussetzen, so wird mit Benutzung des Satzes 6 §. 5 der Unterschied

$$u' - u = \int_a^{b+h} f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_b^{b+h} f(x)\, dx$$

die Veränderung des Integrales $\int_a^b f(x)\, dx$ ausdrücken. Daraus ergiebt sich weiter, dass

$$\frac{u' - u}{h} = \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f(x)\, dx = \frac{1}{h} R\, (b + h - b) = R$$

mit abnehmendem $h$ den nach $b$ genommenen Differentialquotienten des Integrales $u$ vorstellen wird, wenn $\frac{u' - u}{h}$ wirklich einer Grenze sich nähert. Dies aber ist in der That der Fall; denn vermöge der vorausgesetzten Stetigkeit der Function $f(x)$ können das Maximum und Minimum derselben innerhalb der Grenzen $b$ und $b + h$ sich um so wenig unterscheiden, als man nur will, und daher müssen diese und folglich auch $R$ zuletzt mit $f(b)$ zusammenfallen. In Zeichen heisst dies

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\partial \int_a^b f(x)\, dx}{\partial b} = f(b),$$

und räumlich gefasst sagt diese Gleichung, dass die letzte Ordinate $BN$ den Differentialquotienten der Fläche $AMNB$ (Fig. 2) ausdrückt.

Einen ganz ähnlichen Weg könnten wir nun zur Auffindung der Abgeleiteten von $\int_a^b f(x)\, dx$ nach der untern Grenze $a$ einschlagen, doch geschieht dies einfacher in folgender Weise.

Man hat identisch

$$\int_a^b f(x)\, dx = - \int_b^a f(x)\, dx$$

und demnach

$$\frac{\partial \int_a^b f(x)\, dx}{\partial a} = - \frac{\partial \int_b^a f(x)\, dx}{\partial a} = - f(a).$$

## §. 8.

### Differentiation eines bestimmten Integrales nach einem Parameter.

Wenn die Natur einer Function $f(x)$ eine Aenderung erleiden soll, d. i. geometrisch ausgedrückt, wenn man von einer Curve zu einer benachbarten übergehen will, die freilich mit jener zu derselben Art gehören kann; so muss die Function $f(x)$ ausser der Veränderlichen $x$ wenigstens eine von $x$ unabhängige Grösse $\alpha$, einen sogenannten Parameter enthalten, der die eine Curve von der andern als Individuum kennzeichnet. In dem jetzt zu betrachtenden Falle werden wir mithin das bestimmte Integral in der Form

$$1. \qquad u = \int_a^b f(x, \alpha)\, d\,x$$

uns vorstellen müssen.

Verändert sich nun $\alpha$ um eine beliebige Grösse $h$, so können mit dieser Aenderung der Natur von $f(x)$ entweder Aenderungen in den Grenzen $a$ und $b$ eintreten, oder es können diese von $\alpha$ ganz unabhängig sein. Der Einfachheit wegen wollen wir den letztern Fall zunächst betrachten.

Geht $\alpha$ in $\alpha + h$ über, so wird die Differenz

$$u' - u = \int_a^b f(x, \alpha + h)\, d\,x - \int_a^b f(x, \alpha)\, d\,x$$

die Veränderung des Integrales 1 vorstellen, und folglich wird, weil $h$ mit $x$ nicht verbunden ist, die Beziehung Statt finden:

$$2. \qquad \frac{u' - u}{h} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h}\, d\,x.$$

Sollte es sich nun ereignen, dass mit unendlich abnehmendem $h$ der Quotient $\frac{u' - u}{h}$ einer Grenze sich nähert; so wird diese den Differentialquotienten des bestimmten Integrales $u = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$ nach $\alpha$ bezeichnen. Dies aber wird wirklich der Fall sein, wenn die nach $\alpha$ genommene Derivirte der continuirlichen Function $f(x, \alpha)$ zwischen $a$ und $b$ selbst wieder stetig ist.

Heisst nun die partielle Abgeleitete $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ für den Augenblick $\psi(x, \alpha)$, so muss die Gleichung bestehen

$$\lim \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} = \psi(x, \alpha),$$

d. g.

$$\frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} = \psi(x, \alpha) + \sigma.$$

Mit Benutzung dieses Ausdruckes aber schreibt sich die in 2 ausgedrückte Beziehung jetzt so:

$$\frac{u' - u}{h} = \int_a^b \psi(x, \alpha)\, dx + \sigma(b - a).$$

Da nun mit unendlich klein werdendem $h$ die Grössen $\sigma$ und folglich wegen der Endlichkeit von $b - a$ auch $\sigma(b - a)$ von Null zuletzt um weniger als jede noch so kleine Grösse verschieden ist; so gilt ersichtlich die Gleichung

$$3. \qquad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial \int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

Man bezeichnet diese wichtige von Leibnitz entdeckte Regel der Differentation nach $\alpha$ mit dem Namen der **Differentiation eines bestimmten Integrales nach einem Parameter.** Auch hat man für die Operation die Benennungen der Differentiation von Curve zu Curve (differentiatio de curva in curvam nach Leibnitz*)) oder der Differentiation unter dem Integrationszeichen eingeführt.

Endlich sieht man noch sofort, dass

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, c)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, c)}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \alpha}\, dx$$

sein wird, wenn $c$ von $\alpha$ abhängt.

---

*) Leibnitii et Joh. Bernoullii Commercium philosophicum et mathematicum. Tomus I. Ab Anno 1694 ad annum 1699. Lausannae et Genevae 1745. — Epist. LIX., LX. LXI, p. 319 etc. Epist. 59. Leibnitii ad Bernoullium 3. Aug. 1697. (Differentiationis de curva in curvam Principia).

## §. 9.

**Aenderung der Integrationsgrenzen mit der Natur der Function.**

Hat die Aenderung des Parameters $\alpha$ gleichzeitig eine Veränderung der Integrationsgrenzen zur Folge; so wird das Integral

$$u = \int_a^b f(x, \alpha)\, d\, x$$

offenbar die Gestalt

$$u_1 = \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x, \alpha + \Delta\, \alpha)\, d\, x$$

annehmen, und der Quotient $\frac{u_1 - u}{\Delta\, \alpha}$ wird jetzt in dieser Form erscheinen

$$\frac{u_1 - u}{\Delta\, \alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta \alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\, \alpha}\, d\, x - \frac{1}{\Delta \alpha} \int_a^{a+\Delta\, a} f(x, \alpha + \Delta\, \alpha)\, dx$$
$$+ \frac{1}{\Delta\, \alpha} \int_b^{b+\Delta b} f(x, \alpha + \Delta\, \alpha)\, d\, x.$$

Dem Maximum-Minimum-Satze zufolge aber lassen sich die beiden letzten Integrale auch so schreiben:

$$\frac{1}{\Delta\, \alpha} \int_a^{a+\Delta a} f(x, \alpha + \Delta \alpha)\, d\, x = \frac{R}{\Delta \alpha} \int_a^{a+\Delta a} d\, x = R\, \frac{\Delta\, a}{\Delta\, \alpha}$$

und

$$\frac{1}{\Delta\, \alpha} \int_b^{b+\Delta b} f(x, a + \Delta \alpha)\, d\, x = R'\, \frac{\Delta b}{\Delta\, \alpha},$$

und diese Beziehungen gehen mit verschwindendem $\Delta \alpha$ den frühern Erörterungen gemäss in die andern über:

$$\lim \left(R\, \frac{\Delta\, a}{\Delta \alpha}\right) = \frac{\partial\, a}{\partial\, \alpha}\, f(a, \alpha)$$

und

$$\lim \left(R'\, \frac{\Delta\, b}{\Delta \alpha}\right) = \frac{\partial\, b}{\partial\, \alpha}\, f(b, \alpha).$$

Da nun ausserdem noch

$$\lim \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\, d\,x = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, d\,x$$

ist, so besteht offenbar die Gleichung

$$\text{I.}\quad \lim \frac{u_1 - u}{\Delta\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\, d\,x = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, d\,x$$

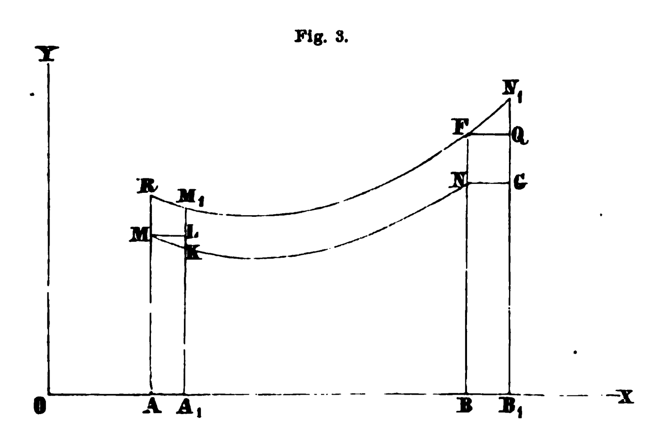
$$+ \frac{\partial b}{\partial \alpha} f(b, \alpha) - \frac{\partial a}{\partial \alpha} f(a, \alpha).$$

Sie besitzt, wie man sieht, eine grosse Aehnlichkeit mit dem aus der Differentialrechnung bekannten Satze

$$\frac{d\psi(a, b, c)}{d\,\alpha} = \frac{\partial\psi(a, b, c)}{\partial a}\frac{d\,a}{d\alpha} + \frac{\partial\psi(a, b, c)}{\partial b}\frac{d\,b}{d\alpha} + \frac{\partial\psi(a, b, c)}{\partial c}\frac{d\,c}{d\alpha},$$

und dieser könnte, wenn man wollte, sofort zur Entwicklung der Formel I. benutzt werden.

Fig. 3.




Auch geometrisch genommen lässt sich dieselbe ohne Mühe ableiten. Denn sei $f(x, \alpha) = y$ die Gleichung einer auf rechtwinklige Achsen bezogenen Curve $MN$, ferner bezeichne $OA$ den Werth von $a$, und $OB$ sei $= b$; alsdann bedeutet $u = \int_a^b f(x, \alpha)\, d\,x$ den Flächenraum $AMNB$. Verändert sich nun $\alpha$ um $\Delta\alpha$, d. h. geht die Curve $MN$ in die ihr benachbarte $M_1 N_1$ über, und drücken $OA_1 = a + \Delta a$ und $OB_1 = b + \Delta b$ die Grenzen des neuen Intervalles aus, so ist

$$u_1 = \int_{a+\varDelta a}^{b+\varDelta b} f(x, \alpha + \varDelta \alpha)\, d\, x = \text{Flächenraum } A_1 M_1 N_1 B_1,$$

also

$u_1 - u =$ Flächenraum $K M_1 N_1 B_1 B N$ — Flächenraum $A A_1 K M$.

Diese Differenz aber lässt sich zweckmässiger darstellen, wenn man durch die Punkte $M$ und $N$ Parallelen zur $x$-Achse zieht und mit $\sigma$ die algebraische Summe der kleinen Flächenräume $MLK$, $MKM_1R$, $NGN_1P$ bezeichnet. Denn nun ist $u_1 - u$ ersichtlich mit der Flächensumme

$$MRPNK + NBB_1G + NGN_1P - MKM_1R - (MLAA_1 - LMK)$$

gleichbedeutend, d. h.

$$u_1 - u = \int_a^b [f(x, \alpha + \varDelta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx + f(b, \alpha)\varDelta b - f(a, \alpha)\varDelta a + \sigma.$$

Für den unendlichen Process aber verschwindet $\sigma$ gegen $\varDelta \alpha$, und folglich wird

$$\lim \frac{u_1 - u}{\varDelta \alpha} = \frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx + f(b, \alpha) \frac{\partial b}{\partial \alpha} - f(a, \alpha) \frac{\partial a}{\partial \alpha}.$$

Dass übrigens die Gleichung I. die in den vorhergehenden Paragraphen behandelten Fälle in sich begreift, ist leicht zu zeigen. Hängt z. B. nur die obere Grenze $b$ von dem Parameter $\alpha$ ab, so reducirt sich die Formel I. auf diese

$$\frac{d \int_a^b f(x)\, dx}{d\alpha} = \frac{db}{d\alpha} f(b).$$

Und bleiben die Grenzen von $\alpha$ unberührt, so werden $\frac{db}{d\alpha}$ und $\frac{da}{d\alpha}$ beide zu Null, mithin wird jetzt

$$\frac{\partial \int_a^b f(x, \alpha)\, \partial x}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, \partial x.$$

## §. 10.

### Existenz der Integrationsconstanten.

Die vorhergehenden Betrachtungen führen zu dem wichtigen Schlusse, dass das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ eine solche stetige Function von $b$ bezeichnet, die, nach $b$ derivirt, immer einen Differentialquotienten besitzt. Existirt daher noch irgend eine andere Function von $b$, z. B. $\varphi(b)$, deren Abgeleitete ebenfalls $f(b)$ heisst; so lässt sich offenbar nach den Beziehungen fragen, welche zwischen $\varphi(b)$ und $\int_a^b f(x)\,dx$ Statt haben.

Die Beantwortung einer derartigen Frage wollen wir jetzt zu geben versuchen. Dazu aber ist nöthig, dass wir uns mit einigen Worten zunächst des Einflusses erinnern, den das Zeichen des ersten Differentialquotienten einer stetigen Function auf die Natur derselben ausübt.

Sei demnach $\varphi(x)$ eine solche von $x = p$ bis $x = q$ continuirliche Function von $x$, die innerhalb des genannten Intervalles immer einen Differentialquotienten $\varphi'(x)$ darbietet. Alsdann besteht unter allen Umständen die Gleichung

$$\lim \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varphi'(x),$$

d. h. der Quotient $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ liegt, wenn $\sigma$ ein beliebig kleines Quantum vorstellt, das wir absolut voraussetzen dürfen, zuletzt immer zwischen $\varphi'(x) + \sigma$ und $\varphi'(x) - \sigma$, von welcher Seite her das Increment $h$ der Null sich auch nähern mag. Ist daher $\varphi'(x) > 0$, so muss der Quotient $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ immer das Pluszeichen führen, und folglich wird, wenn $h$ ebenfalls zu den positiven Grössen gehört, $\varphi(x+h)$ algebraisch grösser als $\varphi(x)$ sein. Mit andern Worten aber heisst dies, die Function $\varphi(x)$ bezeichnet eine wachsende Function von $x$.

Der Quotient $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ befindet sich dagegen bei hinlänglich kleinem $\sigma$ immer zwischen zwei negativen Grössen

und ist somit selbst negativ, wenn $\varphi'(x) < 0$. In diesem Falle wird daher für $h > 0$ nothwendig $\varphi(x)$ eine abnehmende Function von $x$ vorstellen müssen.

Drückt mithin $q$ den algebraisch grössern Werth der beiden Grössen $p$ und $q$ aus, so gelten die Beziehungen

1. $$\varphi(q) > \varphi(p), \quad \varphi'(x) > 0$$

und

2. $$\varphi(q) < \varphi(p), \quad \varphi'(x) < 0.$$

Nun bezeichne $\psi(x)$ eine solche Function von $x$, deren Differentialquotient $\psi'(x)$ innerhalb des Intervalles $(p, q)$ fortwährend mit Null gleichbedeutend ist; ferner stelle $\alpha$ eine positive Constante vor. Alsdann heisst die Derivirte der Function $\psi(x) \pm \alpha x$ augenscheinlich $\pm \alpha$, und folglich finden die Relationen Statt

3. $$\psi(q) - \psi(p) > -\alpha(q-p)$$

und

4. $$\psi(q) - \psi(p) < \alpha(q-p),$$

wie klein auch $\alpha$ gewählt werden möge. Lässt man also $\alpha$ ins Unendliche abnehmen, so wird

$$\psi(q) = \psi(p),$$

d. h. die Function von $x$, deren Differentialquotient fortwährend mit Null zusammenfällt, ist eine Constante.

Daraus aber folgt weiter, dass zwei stetige Functionen $\varphi(x)$ und $\chi(x)$, deren Abgeleitete dieselbe Function $f(x)$ darstellt, sich höchstens nur um eine Constante unterscheiden können; denn der Differentialcoefficient ihrer Differenz $\varphi(x) - \chi(x)$ wird durch Null ausgedrückt.

Besitzt folglich irgend eine zwischen $a$ und $b$ stetige Function $\varphi(b)$ die Derivirte $f(b)$, so muss nothwendig

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) + \text{const.}$$

sein. Nähert aber $b$ dem $a$ sich ins Unendliche, so findet schliesslich die Grenzgleichung

$$0 = \varphi(a) + \text{const.}$$

Statt. Und daher ist nunmehr

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

## §. 11.

### Uebergang von dem unbestimmten zum bestimmten Integrale*).

Gestützt auf die soeben gemachten Bemerkungen, dürfen wir behaupten, dass die allgemeinste Function $F(x)$, deren Differentialquotient eine gegebene Function $f(x)$ repräsentirt, nothwendig irgend einer besondern, die Derivirte $f(x)$ besitzenden Function $\varphi(x)$ gleich sein muss, sofern dieser eine willkürliche Constante hinzugefügt wird. Diese allgemeinste Function $F(x)$ wird das unbestimmte Integral der Function $f(x)$ genannt und durch das Zeichen $\int f(x)\, dx$ angedeutet. Es ist daher der vorhin erwähnten Bemerkung zufolge

$$\int f(x)\, dx = \varphi(x) + \text{const.}^{**})$$

Der Unterschied zwischen einem bestimmten und unbestimmten Integrale besteht also nur darin, dass bei diesem die untere Grenze nicht genannt, sondern durch die Integrationsconstante vertreten wird. Die obere Grenze des unbe-

---

*) Man vergleiche mit dem hier im Wesentlichen nach Dirichlet befolgten Gedankengange: Cauchy. Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique, sur le calcul infinitésimal. Tome premièr, pages 101—105. A Paris 1823.

Moigno. Leçons de calcul diff. et de calcul intégral. Tome II., pag. 5 etc. Paris 1844.

**) Von Differentialquotienten kann bekanntlich nur bei stetigen Functionen die Rede sein, indess spricht man auch dann noch von einem Differentialcoefficienten, wenn die Stetigkeit der ursprünglichen Function nur an einzelnen Stellen, aber für keine continuirliche Folge von Werthen des Argumentes unterbrochen wird. Man benennt daher z. B. für einen zwischen 0 und $\pi$ liegenden Bogen mit arctang $x +$ const. noch immer das unbestimmte Integral $\int^x \frac{dx}{1+x^2}$, obgleich für $x = 0$ die Function arctg $x$ unstetig wird.

stimmten Integrales dagegen ist, wenn auch in der schriftlichen Darstellung desselben der Kürze wegen unterdrückt, bestimmt genannt; sie fällt mit dem Integrationsbuchstaben zusammen. Dieser spielt mithin bei dem unbestimmten Integrale eine ähnliche Rolle, wie sie dem sogenannten Stellenzeiger in einer unendlichen Reihe zukommt; denn er muss ja einerseits das allgemeine, andererseits die übrigen Glieder andeuten. Diese zwiefache Verwendung des Integrationsbuchstabens könnte man folglich aufheben, wenn man, freilich weitläuftiger,

$$\int^x f(y)\, dy \quad \text{statt} \quad \int f(x)\, dx$$

schreiben wollte.

Da $\dfrac{\partial \int_a^x f(x)\, dx}{\partial x} = f(x)$, so können wir auch die oben genannte Function $\varphi(x)$ durch das bestimmte Integral $\int_a^x f(x)\, dx$ ersetzen, also die Gleichung

$$\int f(x)\, dx = \int_a^x f(x)\, dx + \text{const.}$$

bilden. Lassen wir aber hierin $x$ dem $a$ sich unbegrenzt nähern, so wird augenscheinlich

$$\int^a f(x)\, dx = \text{const.}$$

und somit

$$\int_a^x f(x)\, dx = \int^x f(x)\, dx - \int^a f(x)\, dx$$

oder

$$\int_a^x f(x)\, dx = [\varphi(x) + \text{const.}] - [\varphi(a) + \text{const.}].$$

Das bestimmte Integral $\int_a^x f(x)\, dx$ ergiebt sich folglich aus dem unbestimmten Integrale, wenn man in diesem den Integrationsbuchstaben durch die Grenzen des Integrales ersetzt und von dem der obern Grenze entsprechenden Werthe desselben den für die untere Grenze Statt findenden Ausdruck abzieht. Wie man sieht, bleibt das Schlussresultat dasselbe,

wenn statt des unbestimmten Integrales bloss die besondere Function $\varphi(x)$ in Betracht gezogen wird.

Schon aus den Elementen der Integralrechnung ist bekannt, welch ein vortreffliches Hülfsmittel der soeben erörterte Uebergang vom unbestimmten Integrale zum bestimmten darbietet. Doch ist sein Gebrauch beschränkt, weil man in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle das unbestimmte Integral in geschlossener Form nicht anzugeben vermag, während sehr wohl bei Voraussetzung passender Grenzen das bestimmte Integral zu den angebbaren Grössen gehören kann.

## §. 12.

### Ableitung der Wallis'schen Formel.

Bezeichnen $u$ und $v$ innerhalb eines gewissen Intervalles stetige Functionen von $x$, so besteht bekanntlich die wichtige Relation

$$\int u \frac{\partial v}{\partial x} d x = u v - \int v \frac{\partial u}{\partial x} d x.$$

Der Hinzufügung einer Constanten bedarf es hierbei nicht, weil das erste Integral auf ein zweites zurückgeführt ist. Dagegen darf, obwohl es auch grösstentheils geschieht, dem Begriffe des unbestimmten Integrales zufolge die Constante eigentlich nicht mehr unterdrückt werden, sofern beide Integrale auf derselben Seite des Gleichheitszeichens erscheinen. Wird aber das vorhin unbestimmt gelassene Intervall in der Weise näher charakterisirt, dass $p$ und $q$ die Grenzen desselben bedeuten; so führen natürlich die beiden Beziehungen

$$\int_p^q u \frac{\partial v}{\partial x} \partial x = [u v]_p^q - \int_p^q v \frac{\partial u}{\partial x} \partial x$$

und

$$\int_p^q u \frac{d v}{d x} dx + \int_p^q v \frac{du}{dx} dx = [u v]_p^q = u_q v_q - u_p v_p$$

immer zu demselben Resultat*).

*) Bei dieser Gelegenheit verweise ich rücksichtlich der Entwicklung einiger allgemeinen Relationen auf Bierens de Haan: Exposé de la théorie

Von dieser Formel nun wollen wir gegenwärtig eine erste Anwendung auf das Integral $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n \, dx$ machen, wo $n$ eine ganze Zahl bezeichnen soll.

Integriren wir nämlich zunächst unbestimmt, so folgt sogleich

$$\int \sin x^n \, dx = -\frac{\sin x^{n-1} \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin x^{n-2} \, dx,$$

und daher ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^n \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^{n-2} \, dx$$

oder

$$u_n = \frac{n-1}{n} u_{n-2}.$$

Die wiederholte Benutzung dieser Recursionsformel aber zeigt, dass schliesslich für ein gerades $n$

$$1. \qquad u_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

für die ungerade Zahl $n+1$ hingegen

$$2. \qquad u_{n+1} = \frac{n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 2}{(n+1)(n-1)(n-3) \cdots 3}$$

sein wird.

Erwägt man jetzt, dass der Sinus eines Bogens zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ einen positiven echten Bruch vorstellt, also

$$\sin x^{n+1} < \sin x^n,$$

so muss offenbar

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2}$$

und folglich wegen

$$\frac{\pi}{2} = \frac{n.(n-2)(n-4)\ldots 2}{(n-1)(n-3)\ldots 3.1} u_n > \frac{n.(n-2)(n-4)\ldots 2}{(n-1)(n-3)\ldots 3.1} u_{n+1}$$

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n-1} \cdot \frac{n}{n+1}$$

sein. Anderseits aber ist

---

des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des intégrales définies. Amsterdam 1862. Pag. 30—34.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\,.\,4\ldots(n-2)\,n\,(n+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\ldots\,(n+1)}\,u_{n+2},$$

also in ähnlicher Weise wie vorhin

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2.2.4.4\ldots\ldots n}{1.3.3.5\ldots\ldots n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{2.2.4.4\ldots\ldots n}{1.3.3.5\ldots\ldots n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Die Grösse $\frac{\pi}{2}$ liegt also zwischen den beiden Producten

$$\frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,\ldots\ldots\,n}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,\ldots\ldots\,n+1} \text{ und } \frac{2\,.\,2\,.\,4\,\ldots\ldots\,n}{1\,.\,3\,.\,3\,\ldots\ldots\,n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right),$$

diese aber nehmen, wenn $n$ ins Unendliche wächst, zuletzt das Verhältniss der Gleichheit an, und sonach muss schliesslich die Grenzgleichung

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,\ldots\ldots}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,\ldots\ldots}$$

Statt finden. — Wir haben diese bemerkenswerthe, von Wallis entdeckte Formel hier bewiesen, weil wir uns derselben in der Theorie der Euler'schen Integrale bedienen werden.

## §. 13.

### Restbestimmung der Taylor'schen Reihe.

Behufs einer zweiten Anwendung der partiellen Integration wollen wir jetzt mit ihrer Hülfe die Reihen Bernoulli's und Taylor's abzuleiten versuchen. Eine derartige Entwicklung derselben dürfte nämlich vor jeder andern den Vorzug besitzen, weil sie namentlich den grossen Vortheil bietet, das Restglied zunächst in der Form eines bestimmten Integrales zu liefern, aus dem alsdann mit Leichtigkeit die bekannten Restformen als blosse Corollare sich ergeben*).

Eine stetige Function $\varphi(\alpha)$ habe für ein vorher bestimmtes Intervall in einer gewissen Ordnung die continuirlichen Derivirten $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$, ... Auf das unbestimmte Integral $\int\varphi'(\alpha)\,d\alpha$

*) Der gewöhnlich in der Theorie der Differentialgleichungen vorkommende Beweis des Taylor'schen Satzes erfordert bekanntlich ebenfalls die Anwendung der partiellen Integration und liefert folglich gleichfalls das Restglied in der Form des bestimmten Integrales; doch ist der hier gegebene Beweis bedeutend einfacher.

wollen wir die theilweise Integration so oft als möglich anwenden. Dadurch bekommen wir die Gleichung

$$\int^{\alpha} \varphi'(\alpha)\, d\alpha = \alpha\, \varphi'(\alpha) - \frac{\alpha^2}{1.2} \varphi''(\alpha) + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \varphi'''(\alpha) - \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} \varphi^4(\alpha) +$$

$$\ldots \pm \frac{\alpha^n}{n!} \varphi^n(\alpha) \mp \frac{1}{n!} \int^{\alpha} \alpha^n \varphi^{n+1}(\alpha)\, d\alpha,$$

wo in dem vorletzten Gliede das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n$ zu den ungeraden oder geraden Zahlen gehört.

Heisst nun $(0, h)$ das Intervall, für welches $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha) \ldots\ldots \varphi^{n+1}(\alpha)$ stetig sind, so entspringt die Reihe

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi(h) - \frac{h^2}{1.2} \varphi''(h) + \frac{h^3}{3!} \varphi'''(h) -$$

$$\ldots + \frac{h^n}{n!} \varphi^n(h) \mp \frac{1}{n!} \int_0^h \alpha^n \varphi^{n+1}(\alpha)\, d\alpha,$$

die, falls sie ins Unendliche fortgesetzt werden darf, Bernoulli's Namen führt.

Statt der obigen kann man jedoch leicht eine Reihe bilden, in der überall zwei auf einander folgende Glieder das Pluszeichen besitzen, man setze zu dem Behufe nur $g - \alpha$ statt $\alpha$, wo $g$ constant ist. Dadurch wird jede Function der Differentialquotient der vorhergehenden, diesen mit dem Zeichen minus genommen. Indem man aber auf $\int \varphi'(g - \alpha)\, d\alpha$ die partielle Integration anwendet, ergiebt sich

$$\int^{\alpha} \varphi'(g - \alpha)\, d\alpha = \alpha\, \varphi'(g - \alpha) + \frac{\alpha^2}{1.2} \varphi''(g - \alpha) +$$

$$\ldots + \frac{\alpha^n}{n!} \varphi^n(g - \alpha) + \frac{1}{n!} \int^{\alpha} \alpha^n \varphi^{n+1}(g - \alpha)\, d\alpha;$$

und ist hier $\alpha$ von $\alpha = 0$ bis $\alpha = h$ zu wählen, d. h. sind $\varphi(g - a)$ und ihre Derivirten von $g$ bis $g - h$ als stetig vorauszusetzen, so folgt wegen

$$\int_0^h \varphi'(g - \alpha)\, d\alpha = \varphi(g) - \varphi(g - h)$$

$$\varphi(g) = \varphi(g-h) + h\varphi'(g-h) + \ldots + \frac{h^n}{n!} \varphi^n(g\ \ h) + \frac{1}{n!} \int_0^h \alpha^n \varphi^{n+1}(g - \alpha)\, d\alpha.$$

Diese Darstellungsweise des Taylor'schen Satzes aber ver-

wandelt sich unmittelbar durch die Substitution $g = x +$ in die übliche Form

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) +$$

$$\ldots + \frac{h^n}{n!}\varphi^n(x) + \frac{1}{n!}\int_0^h \alpha^n \varphi^{n+1}(x+h-\alpha)\,d\alpha.$$

Nicht zu übersehen ist indess hierbei, dass die genannte Substitution die Stetigkeit der Function und ihrer Differentialquotienten von $x$ bis $x+h$ verlangt. Man wäre übrigens auf diese Darstellung des Theoremes sofort geführt, wenn man das Integral $\int_0^h \varphi'(x+h-\alpha)\,d\alpha$ der theilweisen Integration würde unterworfen haben.

Wie in der Differentialrechnung gezeigt wird, lässt sich das Restglied in den beiden Gestalten

$$\frac{h^{n+1}}{n+1!}\varphi^{n+1}(x+h\vartheta) \text{ und } \frac{(1-\vartheta)^n h^{n+1}}{n!}\varphi^{n+1}(x+h\vartheta)$$

vorstellen, wenn $\vartheta$ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl ausdrückt. Beide Formen nun lassen sich hier unmittelbar erzielen, wenn man sich des Maximum-Minimum-Satzes bedient. Diesem zufolge hat man bekanntlich, wenn $\vartheta$ immer einen echten Bruch bezeichnet,

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi\left[a + (b-a)\vartheta\right]\int_a^b f(x)\,dx,$$

und sonach wird einerseits

$$\frac{1}{n!}\int_0^h \alpha^n \varphi^{n+1}(x+h-\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{n!}\varphi^{n+1}[x+h-h\vartheta]\int_0^h \alpha^n\,d\alpha$$

$$= \frac{h^{n+1}}{n+1!}\varphi^{n+1}[x+h(1-\vartheta)] = \frac{h^{n+1}}{n+1!}\varphi^{n+1}(x+h\vartheta),$$

andererseits hingegen

$$\frac{1}{n!}\int_0^h \alpha^n \varphi^{n+1}(x+h-\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{n!}(h\vartheta)^n \varphi^{n+1}[x+h(1-\vartheta)]\,h$$

$$= \frac{h^{n+1}}{n!}(1-\vartheta\,\varphi)^{n\,n+1}(x+h\vartheta).$$

Und die bekannte Relation

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\,\varphi'(x + h\vartheta)$$

entspringt ebenfalls direct, wenn man erwägt, dass

$$\int_0^h \varphi'(x + h - \alpha)\,\partial\alpha = \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

und

$$\int_0^h \varphi'(x + h - \alpha)\,\partial\alpha = h\,\varphi'(x + h\,\vartheta)$$

ist. Natürlich lässt sich dieselbe auch durch die Annahme $n = 0$ aus den obigen Formeln ableiten, wenn man nur unter dem Symbol $0!$ die Zahl 1 versteht.

Ausser den vorhin erwähnten Restformen existirt noch eine allgemeinere, von Schlömilch herrührende Darstellungsweise des Restes*). Auch sie kann als unmittelbare Folge des Integrales $\frac{1}{n!}\int_0^h \alpha^n\,\varphi^{n+1}(x+h-\alpha)\,d\,\alpha$ angesehen werden. Denn schreibt man dasselbe in der Gestalt

$$\frac{1}{n!}\int_0^h \alpha^n\,\varphi^{n+1}(x+h-\alpha)\,d\,\alpha\cdot\frac{\psi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)},$$

wo $\psi'(\alpha) = \frac{d\,\psi(\alpha)}{d\,\alpha}$ eine Function bedeutet, die zwischen 0 und $h$ stetig ist und für jedes zwischen 0 und $h$ enthaltene $\alpha$ niemals den Werth 0 erwirbt: so hat man die Beziehung

$$\frac{1}{n!}\int_0^h \frac{\alpha^n\varphi^{n+1}(x+h-\alpha)\cdot\psi'(\alpha)\,d\alpha}{\psi'(\alpha)} = \frac{(h\vartheta)^n\,\varphi^{n+1}[x+h(1-\vartheta)]}{\psi'(h\vartheta)}\int_0^h \psi'(\alpha)\,d\alpha,$$

d. h.

$$\frac{1}{n!}\int_0^h \alpha^n\varphi^{n+1}(x+h-\alpha)\,d\alpha = \frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'[(1-\vartheta)h]}\,\frac{h^n(1-\vartheta)^n}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,n}\,\varphi^{n+1}(x+h\vartheta).$$

Nimmt man nun speciell $\psi'(\alpha) = (1+a)\,\alpha^a$, wo $a \gtreqless 0$ ist, so wird

---

*) Vergl. Dinger. Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. Stuttgart 1862. Bd. 2. Seite 431 ff.

Bertrand. Traité de calcul diff. et de cal. int. I. Calcul diff. Paris 1864, page 285.

$$\frac{\psi(h) - \psi(0)}{\psi'[(1-\vartheta)h]} = \frac{h}{(1+a)(1-\vartheta)^a}$$

und folglich

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \cdots$$
$$+ \frac{h^n}{n!}\varphi^n(x) + \frac{(1-\vartheta)^{n-a}\,h^{n+1}}{(1+a).1.2\ldots n}\varphi^{n+1}(x+h\vartheta)\,{}^{*)}.$$

In den besondern Fällen $a = 0$ und $a = n$ erscheinen wieder, wie man sieht, die von Lagrange und Cauchy gegebenen Restformen.

## §. 14.

### Umformung eines bestimmten Integrales mittelst Substitution.

Ein sehr wesentliches Hülfsmittel zur Erforschung der Eigenschaften bestimmter Integrale liefert die Einführung einer neuen Variabelen an Stelle der ursprünglichen. Schon aus der Lehre vom unbestimmten Integral ist die ausserordentliche Tragweite dieser Operation bekannt. Nicht nur zusammengesetztere Integralformen lassen sich mit Leichtigkeit aus einfacheren, auf Elementarfunctionen zurückführbaren Integralen mittelst der Substitution erzielen, sondern umgekehrt können in vielen Fällen verwickeltere Integrale nur dadurch ermittelt werden, dass man diese durch Einführung einer neuen Veränderlichen zuvor auf einfachere, leicht integrirbare Formen reducirt. Ja, selbst dann behauptet die Substitutionsmethode ihren Werth, wenn die Reduction eines vorgelegten Integrales auf Elementarfunctionen überhaupt zu den Unmöglichkeiten gehört. Ganz die nämlichen Vortheile aber bietet, wie wir sehen werden, die Substitution in der Theorie der bestimmten Integrale.

Bezeichnet $\varphi(x)$ eine solche stetige Function von $x$, deren Differentialquotient einer gegebenen continuirlichen Function $f(x)$ gleich ist; so besteht immer die Gleichung

1. $$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + \text{const.}$$

---

*) Von dieser specielleren Restform sagt Bertrand, dass sie von Schlömilch und Roch gefunden sei. Die genauern Angaben über diesen Punkt sind mir leider selbst nicht bekannt.

Nun sei $x = \psi(y)$, wo $\psi(y)$ eine stetige Function von $y$ ausdrückt; alsdann gilt den Regeln der Differentialrechnung zufolge die Beziehung

$$dx = \psi'(y)\, dy$$

und daher ist

$$\frac{\partial\, \varphi(x)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi[\psi(y)]}{\partial y} = f[\psi(y)]\, \psi'(y).$$

Da nun $\frac{d[\varphi(x) + \text{const.}]}{dx} = f(x)$ eine andere Ausdrucksweise der Gleichung 1 vorstellt, so muss auch mit Nothwendigkeit aus der Beziehung $\frac{d\varphi[\psi(y)]}{dy} = f[\psi(y)]\, \psi'(y)$ die andere fliessen

$$2. \qquad \int f[\psi(y)]\, \psi'(y)\, dy = \varphi[\psi(y)] + \text{const.}$$

Bedeuten aber $a$ und $b$ die Grenzen, zwischen denen $\varphi(x)$ und $f(x)$ stetig bleiben, und sind ebenso $\alpha$ und $\beta$ der Anfangs- und Endwerth des Intervalles, innerhalb dessen die Continuität der Functionen von $y$ des Integrales in 2 nicht unterbrochen wird; so finden unsern frühern Betrachtungen gemäss die Gleichungen Statt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

und

$$\int_\alpha^\beta f[\psi(y)]\, \psi'(y)\, dy = \varphi[\psi(\beta)] - \varphi[\psi(\alpha)].$$

Daraus aber erhellt unmittelbar, dass nothwendig

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f[\psi(y)]\, \psi'(y)\, dy$$

sein muss, wenn die Grenzen von $x$ mit denen von $y$ durch die Relationen

$$a = \psi(\alpha), \quad b = \psi(\beta)$$

verbunden sind.

Da hiernach die Bestimmung der Grössen $\alpha$ und $\beta$ von der Auflösung einer Gleichung abhängig gemacht ist, so kann es sich sehr wohl ereignen, dass für gewisse Werthe von $\alpha$ und $\beta$ das sich ergebende Integral mehrdeutig wird. Solche Fälle wird man natürlich zu vermeiden suchen. In welcher Weise dies aber geschehen kann, ist nur aus dem gerade

vorliegenden Falle zu ersehen. Wäre z. B. das Integral $\int_a^b e^{-x} x^n dx$ mittelst der Substitution $x = ky$ umzuformen, so würde für positive $a$ und $b$ $y$ die Grenzwerthe $\pm \frac{a}{k}$ und $\pm \frac{b}{k}$ erwerben können, je nachdem man den Parameter $k$ positiv oder negativ voraussetzte. Bezeichnet nun aber $n$ einen gebrochenen Exponenten, dessen Nenner zu den geraden, dessen Zähler hingegen zu den ungeraden Zahlen gehört; so sieht man sofort, dass hier nur, um das Imaginäre zu vermeiden, die neue Veränderliche als positiv in Betracht zu ziehen ist. Man erhält alsdann die völlig eindeutige Beziehung

$$\int_a^b e^{-x} x^n \, dx = k^{n+1} \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} e^{-ky} y^n \, dy.$$

Auch folgende Bemerkung möge schon hier eine Stelle finden. Setzt man in $\int_a^b f(x) \, dx$

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-\alpha}{\beta-\alpha}, \text{ also } \frac{dx}{b-a} = \frac{dy}{\beta-\alpha};$$

so wird für $x = a$ $y = \alpha$ und für $x = b$ $y = \beta$. Führt also die angewendete Substitution keine Mehrdeutigkeit in dem neuen Integrale herbei, so kann man das ursprüngliche Integral immer in ein anderes transformiren, dessen Grenzen ganz nach Willkür festgesetzt werden können. Es lässt sich die Richtigkeit dieser Behauptung jedoch zum Theil schon aus den früher mitgetheilten Sätzen

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) \, dx \text{ und } \int_a^b f(x) \, dx = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right) dx$$

erkennen, die ihrerseits wieder als Beispiele der Umformung eines Integrals mittelst der Substitutionsmethode dienen können.

Einer andern Eigenthümlichkeit, welche bei Einführung einer neuen Veränderlichen auftreten kann, werden wir später gedenken.

## §. 15.

### Erklärung eines Doppelintegrales. Theorem von der Vertauschung der Integrationsordnung.

Aus der Lehre von den Reihen ist bekannt, dass die Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz gewisser Reihen nur mittelst der Kenntniss der Doppelreihen gelingt. Einem ganz ähnlichen Falle begegnen wir in der Theorie der bestimmten Integrale; auch hier können die Werthe vieler einfachen Integrale oft nur gefunden werden, indem man sich auf die Eigenschaft sogenannter bestimmter Doppelintegrale mit constanten Grenzen stützt, vermöge deren der Werth des Integrales von der Ordnung der Integration völlig unabhängig ist. Ja, man darf sogar behaupten, dass dieser von Euler herrührende Gedanken einer Benutzung der Doppelintegrale in der Theorie der bestimmten einfachen Integrale zu den allerfruchtbarsten gehört*); denn ausser der schon oben berührten Hülfe, welche die Verwendung der Doppelintegrale bietet, lassen sich sehr oft mittelst derselben die auch auf anderm Wege ableitbaren Eigenschaften einfacher Integrale, ja manchmal sogar mit überraschender Leichtigkeit entwickeln. Und selbst in den Fällen behält das Princip seinen grossen Werth, in denen bloss eine Relation zwischen bestimmten Integralen sich erzielen lässt.

Besitzt die von $x = a$ bis $x = b$ continuirliche Function $f(x)$ ausser der Veränderlichen $x$ eine Variabele $y$, die aber in Bezug auf $x$ die Rolle eines Parameters spielt; so wird das Integral $\int_a^b f(x, y)\, dx$ im Allgemeinen eine von $y$ abhängige Grösse $\varphi(y)$ bezeichnen. Ist nun anderseits $\varphi(y)$ in Bezug auf $y$ stetig zwischen den endlichen Grenzen $y = g$ und $y = h$; so existirt immer das Integral

$$v = \int_g^h \varphi(y)\, dy = \int_g^h \partial y \int_a^b f(x, y)\, \partial x.$$

Einer solchen Grösse aber hat man den Namen eines **bestimmten Doppelintegrales** beigelegt.

---

*) Novi Comment. acad. Petrop. tom. XVI. Siehe Dirichlet: „Note sur les intégrales définies“ in Crelle's Journal Bd. 4. S. 94.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich ferner das Doppelintegral

$$u = \int_a^b \partial x \int_g^h f(x, y)\, \partial y$$

bilden, wenn die Function $f(x, y)$ in Bezug auf $y$ von $g$ bis $h$ und das Integral $\int_g^h f(x, y)\, \partial y$ wieder innerhalb des Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Nehmen wir nun an, dass die Grössen $a, b, g$ und $h$ von einander unabhängig, also völlig constant sind; so besteht der wichtige Lehrsatz

$$\int_a^b dx \int_g^h f(x, y)\, dy = \int_g^h dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Denn differentiiren wir das Integral $u$ nach $b$, so ergiebt sich

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \int_g^h f(b, y)\, dy.$$

Und aus der Differentiation von $v$ nach $b$ folgt

$$\frac{\partial v}{\partial b} = \int_g^h \partial y \, \frac{\partial \int_a^b f(x, y)\, \partial x}{\partial b} = \int_g^h dy\, f(b, y).$$

Die Derivirten der Functionen $u$ und $v$ sind mithin gleich, und demnach können diese, falls überhaupt ein Unterschied zwischen ihnen Statt finden sollte, nur um eine Constante von einander abweichen. Lässt man aber $b$ dem $a$ sich ins Unendliche nähern, so werden $u$ und $v$ beide zu Null, und folglich muss die etwaige Constante selbst mit Null zusammenfallen.

## §. 16.

### Bedeutung eines bestimmten Integrales, wenn die Function endliche Sprünge macht.

Unsere bisherigen Untersuchungen stützen sich ohne Ausnahme auf die Voraussetzungen der Continuität der zu integrirenden Functionen und der Endlichkeit der Integrations-

grenzen. Erleidet mithin irgend eine dieser Bedingungen eine Modification, so bleibt es vorläufig noch völlig unentschieden, ob jetzt überhaupt noch von einem bestimmten Integrale die Rede sein kann. In der That werden wir bald sehen, dass unter Umständen dem bestimmten Integrale nur die Bedeutung eines leeren Zeichens zugeschrieben werden muss. Und zwar können Fälle dieser Art eintreten, wenn eine oder beide Integrationsgrenzen ohne Aufhören wachsen; oder wenn die zu integrirende Function durch das Unendliche geht. Wird aber die Stetigkeit der Function unter dem Integralzeichen nur in der Weise unterbrochen, dass die Function bloss endliche Sprünge macht; so existirt noch immer das bestimmte Integral, wie wir sofort erkennen werden, nachdem wir uns das Wesen eines solchen Falles veranschaulicht haben. — Erleidet nämlich die Function $f(x)$ für den besondern Werth $x = x_1$ eine endliche Discontinuität; so heisst dies in geometrischer Fassung offenbar nichts anderes, als dass der Abscisse $x = x_1$ zwei Ordinaten entsprechen, von denen die eine der Reihe .... $f(x_1 - 2\delta)$, $f(x_1 - \delta)$, $f(x_1 - 0)$, die andere hingegen der Folge $f(x_1 + 0)$, $f(x_1 + \delta)$, $f(x_1 + 2\delta)$ .... angehört, wenn $\delta$ eine unendlich kleine Grösse ausdrückt. Diese beiden Functionalwerthe wird man daher mit Dirichlet am zweckmässigsten durch die Symbole $f(x_1 - 0)$ und $f(x_1 + 0)$ von einander unterscheiden; selbst den Fall der Continuität begreift diese Bezeichnungsweise in sich, indem alsdann $f(x_1 - 0)$ und $f(x_1 + 0)$ zusammenfallen. Treten nun für die Function $f(x)$ innerhalb des endlichen Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ an den Stellen $x = c$, $e, f$ .... Unstetigkeiten der genannten Art ein; so wird offenbar in jedem der Theilintervalle $(a, c)$; $(c, e)$; $(e, f)$ .... die Function $f(x)$ vollkommen stetig verlaufen und folglich die Existenz der Integrale

$$\int_a^c f x \, d x, \quad \int_c^e f(x) \, d x, \quad \int_e^f f(x) \, d x, \quad \ldots .$$

nicht zu bezweifeln sein. Das Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ ist sonach im vorliegenden Falle mit der Summe der vorhin genannten Integrale gleichbedeutend. Die Wahrheit dieser Aussage leuchtet sogar aus der blossen Anschauung der nebenstehen-

den Figur ein, indem hier augenscheinlich der von der Curve $MNOPQR$, der Abscisse $AB$ und den rechtwinkligen Ordinaten $AM$ und $BR$ eingeschlossene Flächenraum $\int_a^b f(x)\,dx$ die Summe der Flächenräume $u$, $v$, $w$ vorstellt.

Fig. 4.



§. 17.

**Begriff des bestimmten Integrales für den Fall einer unendlichen Discontinuität der Function.**

Wenn innerhalb des Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ für einen oder mehrere Werthe von $x$ oder für die Grenzen selbst die Function durch das Unendliche geht; so kann, wie schon angedeutet, allgemein nicht mehr behauptet werden, dass das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ immer einen Sinn besitzt. Denn soll das Integral nicht ohne Bedeutung sein, so ist die Bedingung unerlässlich, dass der Werth desselben eine bestimmte endliche Grösse bezeichnet; dies aber kann, wie sogleich einleuchtet, keineswegs aus der früher gegebenen Erklärung des bestimmten Integrales gefolgert werden, sofern die Function $f(x)$, sei es an den Grenzen oder sei es zwischen denselben, durch das Unendliche schreitet. Es ist daher zunächst die Frage zu beantworten, welchen Sinn man in einem Falle dieser Art dem Zeichen $\int_a^b f(x)\,dx$ beizulegen hat. Nehmen wir zu dem Behufe der Kürze halber vorerst an, dass $f(x)$ nur für $x = c$, wo $c$ zwischen $a$ und $b$ liegt und $b > a$ sein soll*), unendlich gross wird, sonst aber stetig verläuft; so wird offenbar die Function $f(x)$ von $x = a$ bis $x = c - \varepsilon$ und von $x = c + \delta$ bis $x = b$ in dem früher erörterten Falle sich befinden und daher auch die Existenz der beiden Integrale

*) Dieser letztern Annahme werden wir, sofern das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird, immer folgen.

1. $$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \text{ und } \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

behauptet werden müssen. Diese beiden Integrale aber können, sofern die positiv vorausgesetzten Grössen $\varepsilon$ und $\delta$ von Null zuletzt um weniger als ein beliebig kleines Quantum verschieden sind, ersichtlich folgende Eigenthümlichkeiten zeigen. Entweder nähern sich beide Integrale endlichen Grenzen, oder sie wachsen ohne Aufhören, oder endlich beide Integrale erwerben unendlich grosse Werthe, von denen der eine auf der Seite der positiven Grössen liegt, der andere hingegen das Minuszeichen führt*). Nur in dem ersterwähnten Falle besitzt das Integral $\int_a^b f\, x\, d\, x$ einen wirklichen Sinn und wird durch die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

definirt, eine Beziehung, die offenbar in der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\right]$$

geschrieben werden kann, weil die Grenzen rechts hier wirkliche Grenzen, also nicht $\pm\infty$ sein sollen.

In den beiden andern Fällen dagegen ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ohne eigentliche Bedeutung, und man nennt hier dasselbe **unendlich**, wenn beide Integrale 1 in demselben Sinne unendlich grosse Werthe annehmen. **Unbestimmt endlich** heisst das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, wenn von den Integralen 1 das eine positiv, das andere negativ unendlich wird.

Wie in dieser Weise der Gedankengang fortzusetzen ist, sofern die Function $f(x)$ an mehreren zwischen $a$ und $b$ befindlichen Punkten durch das Unendliche schreitet, bedarf keiner Erwähnung. Auch dies erhellt gewissermassen von selbst, dass nur der eine von den auschliessenden Werthen

---

*) Vergl. die Anmerkung zu §. 19.

$c - \varepsilon$, oder $c + \delta$ in Betracht kommt, wenn $c$ mit einer der Grenzen des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ zusammenfällt.

## §. 18.

### Hauptwerth eines bestimmten Integrales. Singuläre bestimmte Integrale*).

Setzt man die Hülfsgrössen $\varepsilon$ und $\delta$ einander gleich und addirt hierauf die beiden Integrale

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

so wird die für $\lim \varepsilon = 0$ erscheinende Grenze von Cauchy der Hauptwerth des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ genannt; jedoch werden wir in Uebereinstimmung mit Dirichlet keinen Gebrauch von dieser Definition machen.

Wichtiger für uns sind dagegen die sogenannten **singulären bestimmten Integrale**, obwohl wir uns auch ihrer nicht in der Ausdehnung bedienen werden, wie dies von Cauchy geschehen. Er versteht nämlich unter dieser Benennung überhaupt die Grenzwerthe solcher Integrale, deren Integrationsgrenzen nur um unendlich kleine Grössen von einem Werthe $c$ abweichen, für welchen die Function entweder durch das Unendliche geht, oder welcher selbst zu den unendlichen Grössen gerechnet wird. Berücksichtigen wir hier bloss den ersten Fall, so würden wir uns die singulären bestimmten Integrale etwa unter den Formen

$$\int_{c-\varepsilon}^{c-\nu\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{c+\varepsilon}^{c+\mu\varepsilon} f(x)\,dx$$

vorstellen können, in denen $\nu$ und $\mu$ beliebige positive Zahlen und $\varepsilon$ eine unendlich kleine Grösse bezeichnen.

---

*) Vergl. Cauchy. Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique, sur le calcul infinitésimal. A Paris 1823. Tome I. Pages 96 et 97.

Iournal de l'école polyt., cah. 19, p. 572.

## §. 19.

### Von den Hülfsmitteln zur Beurtheilung der Bedeutung des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$.

Die Entscheidung über die Frage, ob das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nicht ohne Bedeutung ist, wenn $f(x)$ innerhalb des Intervalles $(a, b)$ durch das Unendliche geht, kann unter Umständen mit grossen Schwierigkeiten verknüpft sein. Solche Fälle aber können augenscheinlich nur eintreten, wenn das Integral $\int f(x)\,dx$ sich nicht angeben lässt; denn gelingt die unbestimmte Integration, so braucht man offenbar bloss die bestimmten Integrale von $a$ bis $c - \varepsilon$ und von $c + \delta$ bis $b$ auf bekannte Weise zu bilden und hierauf die Grössen $\varepsilon$ und $\delta$ ins Unendliche abnehmen zu lassen, um die Frage nach der Bedeutung des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ sofort als beantwortet anzusehen. Vorausgesetzt wird natürlich hierbei, dass das unbestimmte Integral zwischen den Grenzen $(a, c - \varepsilon)$ und $(c + \delta, b)$ zu den continuirlichen Functionen gehört.

Dieser Fall würde sich z. B. bei dem Integrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ darbieten; denn hier ist wirklich, solange $\varepsilon$ und $\delta$ noch nicht unendlich klein geworden sind,

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \int_{+1}^{+\varepsilon} \frac{dx}{x} = \lg \varepsilon \text{ und} \int_{+\delta}^{+1} \frac{dx}{x} = - \lg \delta.$$

Lässt man nun aber $\varepsilon$ und $\delta$ der Grenze Null sich nähern, so wird das Integral $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ völlig unbestimmt, also sinnlos, und nur der sogenannte Hauptwerth desselben, das heisst

$$\lim \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x} \right) = \lim \lg \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right) = 0$$

würde eine bestimmte Grösse vorstellen.

Kann hingegen das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ nicht unbestimmt integrirt werden, so hat man behufs der Untersuchung desselben nach einem andern Hülfsmittel sich umzusehen. Dies aber wird in dem Fundamentalprincipe der Infinitesimalrechnung geboten, vermöge dessen eine veränderliche Grösse nothwendig einer Grenze sich nähern muss, sofern ihre Veränderung abgesehen vom Zeichen zuletzt nicht mehr ein beliebig kleines Quantum $\sigma$ zu überschreiten vermag. Und zwar gestaltet sich die Anwendung dieses Grundsatzes hier in folgender Weise.

Sei wieder $c$ der zwischen $a$ und $b$ befindliche Werth von $x$, für welchen die Function $f(x)$ ins Unendliche wächst. Bleibt nun von $x = c + \varepsilon$ bis $x = b$ die Function stetig und gilt dasselbe noch innerhalb des Intervalles von $c + \delta$ bis $b$, wo $c + \delta$ näher an $c$ liegen soll, als $c + \varepsilon$; so wird offenbar das bestimmte Integral $\int\limits_{c+\delta}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx$ die Veränderung ausdrücken, welche das Integral $\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ durch den Uebergang von $c + \varepsilon$ in $c + \delta$ erleidet. Sinkt folglich für ohne Aufhören abnehmende $\varepsilon$ und $\delta$ das singuläre bestimmte Integral $\int\limits_{c+\delta}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx$ immer unter eine beliebig kleine Grösse hinab, so muss nothwendig das Integral $\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ eine Grenze besitzen, also das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ für $x = c$ nicht ohne Bedeutung sein*).

*) In Betreff dieser Behauptung diene noch folgende Bemerkung: Bei allen bisherigen Erörterungen nämlich ist stillschweigend vorausgesetzt, dass — wie gewöhnlich — die Function $f(x)$ immer in derselben Weise unendlich wird, von welcher Seite her man auch dem Unstetigkeitspunkte der Function $f(x)$ sich nähern mag. Wird dagegen unter $f(x)$ eine solche Function von $x$ verstanden, welche für die Folge $\ldots f(c - 2\varepsilon),\ f(c - \varepsilon),\ f(c - 0)$, wo $\lim \varepsilon = 0$, im Punkte $c = c - 0$ unendlich von der Ordnung $n$ wird, während sie beim Durchschreiten der Reihe $f(c + 0),\ f(c + \varepsilon),\ f(c + 2\varepsilon) \ldots$ an der Stelle $x = c = c + 0$ $m$fach unendlich wird: so ist zur Entscheidung der Frage, ob das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ für $x = c$ nicht ohne Bedeutung bleibt, offenbar nunmehr

Das geeigneteste Mittel aber, über das Verhalten des genannten singulären Integrales Kenntniss zu gewinnen, wird in der Regel durch den bekannten Maximum-Minimum-Satz geboten.

## §. 20.

### Anwendungen. Theoreme.

Setzen wir behufs einer nähern Erläuterung des Vorigen zunächst den Fall, in welchem $f(x)$ einem rationalen irreducibelen Bruche $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ gleich ist, dessen Nenner zwischen $a$ und $b$ wenigstens eine reelle Wurzel $\alpha$ besitzt. Alsdann muss das Integral $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx$ nothwendig sinnlos sein. Denn schreibt man $\psi(x)$ in der Form $\psi(x) = (x - \alpha)\, \psi_1(x)$ oder $(x - \alpha)^r \psi_1(x)$, je nachdem $\alpha$ eine einfache oder $r$fache Wurzel von $\psi(x) = 0$ vorstellt; so ist

$$\int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx = R \int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon} \frac{dx}{x - \alpha}, \text{ oder } = R \int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon} \frac{dx}{(x - \alpha)^r}.$$

Der Factor $R$ aber nähert sich mit den ins Unendliche abnehmenden Grössen $\varepsilon$ und $\delta$ der endlichen, von Null ver-

---

die Untersuchung der beiden Integrale $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ und $\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$ erforderlich.

Eine Function $f(x)$ aber wird in einem Punkte $x = c$ unendlich von der Ordnung $n$ oder $n$fach unendlich genannt, wenn das Product

$$(x - c)^n f(x)$$

für $x = c$ weder Null, noch unendlich ist. Gehört die Function $f(x)$ zu den einwerthigen, so muss $n$ eine ganze Zahl ausdrücken. (Siehe Durège, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse §. 29, S. 111—112.)

Auch der Fall kann eintreten, dass eine Function in einem Punkte $x = c$ gleichzeitig endlich und unendlich ist. Ein sehr einfaches Beispiel dieser Art liefert die Function $e^{\frac{1}{x}}$, die für positive $x$ an der Stelle $x = 0$ unendlich gross wird, dagegen für negative $x$ im Punkte $x = 0$ verschwindet.

schiedenen Grösse $\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}$, während das singuläre Integral $\int\limits_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon}\frac{dx}{x-\alpha}$ oder $\int\limits_{\alpha+\delta}^{\alpha+\varepsilon}\frac{dx}{(x-\alpha)^r}$, wie es doch sein müsste, falls $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ nicht ohne Bedeutung sein soll, keinesweges unter ein beliebig kleines Quantum hinabsinkt.

Wird ferner in dem Integrale $\int\limits_0^b f(x)\,dx$ die Function $f(x)$ nur für $x=0$ unendlich und zwar dadurch, dass ein in ihr enthaltener Factor $x^{k-1}$ für $x=0$ über jede Grenze hinaus wächst, während ihr anderer Factor $\psi(x)$ zwischen 0 und $b$ immer continuirlich bleibt; so wird zunächst

$$\int\limits_\delta^\varepsilon f(x)\,dx = \int\limits_\delta^\varepsilon x^{k-1}\,\psi(x)\,dx.$$

Nun ist, weil $x^{k-1}$ innerhalb des Intervalles von $x=\delta$ bis $x=\varepsilon$ niemals das Zeichen wechselt,

$$\int\limits_\delta^\varepsilon x^{k-1}\,\psi(x)\,dx = R\int\limits_\delta^\varepsilon x^{k-1}\,dx = R\,\frac{\varepsilon^k-\delta^k}{k},$$

also, wenn $A$ den absolut grössten Werth von $\psi(x)$ zwischen 0 und $b$ ausdrückt,

$$R\,\frac{\varepsilon^k-\delta^k}{k} < A\,\frac{\varepsilon^k-\delta^k}{k}.$$

Der Ausdruck rechts aber kann, wenn $k$ einen positiven echten Bruch bezeichnet, wegen der ins Unendliche abnehmenden Grössen $\varepsilon$ und $\delta$ schliesslich nicht mehr ein beliebig kleines Quantum überschreiten, und folglich wird das Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ nicht sinnlos. Dagegen ist dasselbe unzweifelhaft ohne Bedeutung, wenn $k$ zu den negativen Zahlen gehört und $R$ von Null verschieden ist. Und wäre $k=0$, so müsste in Folge der Beziehung $\int\limits_\delta^\varepsilon\frac{\partial x}{x} = \lg\frac{\varepsilon}{\delta}$ das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ebenfalls als nichtssagend betrachtet werden [$R(=)0$].

Dem soeben erörterten Falle lässt sich noch leicht ein

allgemeineres Theorem zur Seite stellen.*) Wird nämlich die Function $f(x)$ nur an den Integrationsgrenzen, z. B. für die obere unendlich; so muss, falls das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ eine wirkliche Grösse vorstellen soll, nothwendig das singuläre Integral $\int_{b-\delta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ mit den unendlich klein werdenden Grössen $\varepsilon$ und $\delta$, deren Vorzeichen mit dem von $b-a$ übereinstimmt, der Null sich nähern. Nun sei ohne Rücksicht auf das Zeichen von irgend einem zwischen $a$ und $b$ enthaltenen Werthe $x = \alpha$ an das Product $\psi(x) = (b-x)^k f(x)$ oder $(x-b)^k f(x)$, wenn $b < a$, wo $k$ immer positiv sein soll, beständig kleiner, als eine vorher bestimmte Grösse $A$. Alsdann wird offenbar numerisch das Integral

$$\int_{b-\delta}^{b-\varepsilon} \psi(x) \frac{dx}{[\pm(b-x)]^k} < A \int_{b-\delta}^{b-\varepsilon} [\pm(b-x)]^{-k}\,dx =$$

$$\mp \frac{A}{1-k} [(\pm\varepsilon)^{-k+1} - (\pm\delta)^{-k+1}],$$

und folglich verliert für $k < 1$ das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ seine Bedeutung nicht.

Wäre hingegen das obige Product $\psi(x)$ von $x = \alpha$ an abgesehen vom Zeichen fortwährend grösser, als die von Null verschiedene Zahl $A$, wechselt also $\psi(x)$ zwischen $x = \alpha$ und $x = b$ niemals das Zeichen; so müsste, weil jetzt absolut genommen

$$\int_{b-\delta}^{b-\varepsilon} \psi(x) \frac{dx}{[\pm(b-x)]^k} > A \int_{b-\delta}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{[\pm(b-x)]^k}$$

für $k \geqq 1$ das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nothwendig sinnlos werden.

Ganz dieselben Schlüsse lassen sich offenbar in Bezug auf die untere Grenze $a$ wiederholen, doch ist dies nicht einmal von Nöthen, weil immer durch Umkehrung der Grenzen dieser Fall auf den vorhin behandelten zurückführbar ist.

---

*) Vergleiche Serret. Cours de calcul différential et intégral. Tome II. p. 100.

Betrachten wir beispielsweise das Integral $\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$, das augenscheinlich für $x = 1$ wegen $\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc} \sin x + \text{const.}$ nicht sinnlos, sondern mit $\frac{\pi}{2}$ gleichbedeutend ist; so folgt auch durch Anwendung des soeben mitgetheilten Theoremes die Endlichkeit des Integrales, da hier

$$\psi x = (1 - x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}},$$

somit $A = 1$ und

$$\int_{1-\delta}^{1-\varepsilon} \psi(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x}} < \int_{1-\delta}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\,(\delta^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

In gleicher Weise kann ferner die Untersuchung des Integrales $\int_0^1 \frac{\lg x}{x^n}\,dx$, wo $n$ zwischen 0 und 1 liegt, geschehen; denn hier ist, wenn $k$ einen zwischen 0 und 1 belegenen Bruch bezeichnet, das Product $x^{n+k} \lg x$ für $x = 0$ ebenfalls $= 0$, und folglich lässt sich immer eine solche Grösse $\alpha$ bestimmen, dass von $x = 0$ bis $x = \alpha$ das Product $\psi(x) = x^{n+k} \lg x$ kleiner, als eine vorher gegebene Grösse $A$ sei. Nun ist $n + k < 1$ und demnach wird das Integral $\int_0^1 \frac{\lg x\, dx}{x^n}$ einen endlichen Werth besitzen. Die Angabe der Grösse $A$ ist jedoch nicht einmal erforderlich, weil offenbar der Factor $R$ in

$$\int_\delta^\varepsilon x^{n+k} \lg x \frac{dx}{x^{n+k}} = R \int_\delta^\varepsilon \frac{dx}{x^{n+k}}$$

mit abnehmendem $\delta$ und $\varepsilon$ der Null sich nähern muss, also *endlich* bleibt.

Von ganz besonderer Wichtigkeit ist schliesslich der Satz, dass *jedem Integrale eine Bedeutung zukommt, wenn bloss durch Substitution die unendliche Dis-*

continuität der zu integrirenden Function herbeigeführt wurde.

Ist nämlich das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, in welchem $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stetig verläuft, mittelst der Substitution $x = \psi(y)$ in das andere $\int_\alpha^\beta f[\psi(y)]\,\psi'(y)\,dy$ umzuformen, so kann es sich sehr wohl ereignen, dass der Differentialquotient $\psi'(y)$ an einer oder mehreren Stellen von $y = \alpha$ bis $y = \beta$ unendlich wird, also eigentlich nicht existirt. Es bleibt mithin vorläufig die Frage noch eine offene, ob das Integral $\int_\alpha^\beta f[\psi(y)]\,\psi'(y)\,dy$ nicht sinnlos ist. Sei desshalb z. B. $\gamma$ einer dieser besondern zwischen $\alpha$ und $\beta$ befindlichen Werthe von $y$, und der ihm entsprechende für das ursprüngliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heisse $c$. Gehört nun $\psi'(y)$ von $\alpha$ bis $\gamma'$ fortwährend zu den continuirlichen Functionen, so muss, wenn der $\gamma'$ entsprechende Werth in $x$ $c'$ genannt wird, immer die Gleichung gelten

$$\int_a^{c'} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\gamma'} f[\psi(y)]\,\psi'(y)\,dy$$

Lässt man aber $c'$ dem $c$ ins Unendliche sich nähern, so geht der Voraussetzung zufolge das Integral $\int_a^{c'} f(x)\,dx$ in die endliche Grösse $\int_a^c f(x)\,dx$ über, und $\int_\alpha^{\gamma'} f[\psi(y)]\,\psi'(y)\,dy$ verwandelt sich in $\int_\alpha^\gamma f[\psi(y)]\,\psi'(y)\,dy$; dieses Integral muss sich daher gleichfalls einer Grenze nähern, d. h. es muss die Beziehung Statt finden:

$$\lim \int_a^{c'} f(x)\,dx = \lim \int_\alpha^{\gamma'} f[\psi(y)]\,\psi'(y)\,dy$$

Augenscheinlich bleibt dieser Gedankengang derselbe, wenn $\gamma$ mit einer der Grenzen $\alpha$, $\beta$ zusammenfällt; unser Theorem ist somit als allgemein bewiesen zu betrachten.

## §. 21.

### Unendliche Integrationsgrenzen.

Unsere frühere Untersuchung der aus unendlich vielen Gliedern bestehenden Reihe

$(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots\ldots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1})$

hat uns gelehrt, dass dieselbe bei Voraussetzung der Stetigkeit von $f(x)$ innerhalb des Intervalls $(a, b)$ durch das Häufen der Zwischenglieder $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1}$ zuletzt nicht mehr um die beliebig kleine Grösse $\sigma\ (b - a)$ sich zu ändern vermag, wenn $b$ und $a$ zu den endlichen Grössen gehören. Wird folglich diese letztere Bedingung nicht mehr befriedigt, so bleibt auch die Existenz des Integrales $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ völlig ungewiss, d. h. mit andern Worten, die Schreibweise $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ drückt vorläufig nur ein blosses Zeichen aus. Da nun aber die Wahl unendlicher Integrationsgrenzen ausserordentliche Vortheile bietet, und da anderseits die Lösung vieler Probleme geradezu die Einführung derartiger Integrationsintervalle verlangt; so ist vor allen Dingen die genaue Bestimmung des Begriffes nothwendig, welchen man dem Zeichen $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ in den angezeigten Fällen beizulegen hat. Offenbar geschieht dies auch hier wieder in der natürlichsten und folgerichtigsten Weise, indem man unter den Symbolen

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx, \quad \int\limits_{\pm\infty}^b f(x)\, dx \text{ und } \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

die Grenzwerthe versteht, welchen das vorerst zwischen den endlichen Grenzen $a$ und $b$ genommene Integral $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ sich nähert, wenn entweder die obere, oder die untere, oder beide der Integrationsgrenzen ins Unendliche wachsen. Ergeben sich also bei diesem Process für $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ keine Grenzen, d. h. erscheinen dieselben unter der Form $\pm\infty$, oder schwanken sie fortwährend zwischen zwei festen Wer-

then; so kann selbstverständlich von einer Bedeutung des Integrales $\int_a^b f(x)\, dx$ nicht mehr die Rede sein.

Z. B. das Integral $\int_0^b e^x\, dx = e^b - 1$ ist für $b = +\infty$ durchaus sinnlos, weil hier mit unaufhörlich wachsendem $b$ der Ausdruck $e^b - 1$ über jede Grenze hinaus zunimmt. Und ebenso kann keinem der Integrale $\int_0^\infty \cos x\, dx$ und $\int_0^\infty \sin x\, dx$ eine Bedeutung zukommen, weil mit unendlich werdendem $b$ die Functionen $\sin b$ und $\cos b$ fortwährend zwischen $+1$ und $-1$ schwanken.

Was die Hülfsmittel betrifft, deren man sich bei der Beantwortung der Frage, ob das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ einen Sinn besitzt, oder nicht, zu bedienen hat; so sind es wieder dieselben, welche wir in dem Falle einer unendlichen Discontinuität der Function $f(x)$ kennen lernten. Und zwar wird auch hier, weil der Uebergang vom unbestimmten zum bestimmten Integrale in verhältnissmässig nur wenigen Fällen anwendbar ist, die Untersuchung hauptsächlich auf die Frage zurückgeführt, ob bei fortwährendem Wachsen einer oder beider Integrationsgrenzen die dadurch hervorgerufene Veränderung des Integrales $\int_a^b f(x)\, dx$ zuletzt von Null um weniger als ein beliebig kleines Quantum sich unterscheidet.

Nehmen wir beispielsweise an, dass bloss die obere Grenze $b$, die wir überdies positiv uns denken wollen, ohne Aufhören wächst; so muss, wenn $\int_a^b f(x)\, dx$ einen wirklichen Sinn besitzen soll, die Differenz

$$\int_a^q f(x)\, dx - \int_a^p f(x)\, dx = \int_p^q f(x)\, dx$$

ohne Hinsicht auf das Zeichen mit wachsendem $p$ und $q$ unter jede beliebig kleine Grösse hinabsinken, um wie viel übrigens $q$ auch grösser sein möge, als das beliebig grosse $p$.

Wie hiernach der Gedankengang sich gestaltet, wenn eine der Grenzen nach der negativen Seite ins Unendliche

wächst, ist selbstverständlich. Eine allgemeine Methode aber, die vorstehende Frage zu entscheiden, giebt es nicht. Gewöhnlich führt eine zweckmässige Benutzung des Maximum-Minimum-Satzes am leichtesten zum Ziele, und auch das folgende, dem in §. 20 bewiesenen ganz ähnliche Theorem liefert ein wichtiges Hülfsmittel. Dasselbe stellt sich jetzt in der nachstehenden Form dar.

Sei $f(x)$ eine von $x = a$ bis $x = +\infty$ continuirliche Function von $x$. Lässt sich nun zwischen $a$ und $+\infty$ eine solche endliche Zahl $\alpha$ bestimmen, dass für alle Werthe von $x > \alpha$ das Product $x^n f(x)$ abgesehen vom Zeichen beständig kleiner ist, als eine gegebene Zahl $A$; so nähert sich für $n > 1$ das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit stets wachsendem $b$ einer endlichen Grösse. Sinnlos ist dagegen das Integral, wenn von $x = \alpha$ an der absolute Werth von $x^n f(x)$ niemals kleiner, als die vorher bestimmte, von Null verschiedene absolute Zahl $A$ wird und der Exponent $n \overline{\gtrless} 1$ ist.

In der That hat man, da das Integral $\int_a^\alpha f(x)\,dx$ stets ausser Acht gelassen werden kann, für den ersten Fall ohne Rücksicht auf das Vorzeichen die Beziehung

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx < A\int_\alpha^b \frac{dx}{x^n} = A\,\frac{\alpha^{1-n} - b^{1-n}}{n-1},$$

in der die Grösse rechts mit wachsendem $b$ der Grenze $A\,\frac{\alpha^{1-n}}{n-1}$ sich nähert.

Ist hingegen absolut genommen $x^n f(x)$ von $x = \alpha$ an fortwährend grösser, als $A$, behält also $f(x)$ immer dasselbe Zeichen zwischen $x = \alpha$ und $x = \infty$; so ist auch numerisch

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx > A\int_\alpha^b \frac{dx}{x^n}$$

Da nun $\int_\alpha^b \frac{dx}{x^n} = \frac{b^{1-n} - \alpha^{1-n}}{1-n}$ oder $= \lg\frac{b}{\alpha}$, je nachdem $n < 1$, oder $= 1$ ist, folglich mit wachsendem $b$ über

jede Grenze hinaus zunimmt; so muss nothwendig $\int_a^b f(x)\,dx$ sinnlos sein.

Ganz dieselben Schlüsse gelten übrigens, wenn $b$ negativ unendlich wird und wenn statt der oberen die untere Grenze ohne Aufhören wächst. Man braucht, um dieses auf den ersten Blick einzusehen, nur der Gesetze

$$\int_a^b f(+x)\,dx = -\int_{-a}^{-b} f(-x)\,dx \text{ und } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

sich zu erinnern.

Schliesslich möge noch erwähnt werden, dass auch in dem jetzt vorliegenden Falle Cauchy unter Umständen von einem Hauptwerthe des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ spricht und ebenso singuläre bestimmte Integrale unterscheidet. Schreibt man nämlich das Unendliche in einer der Gestalten $\frac{1}{-\nu\varepsilon}$ und $\frac{1}{\mu\varepsilon}$, wo $\mu$ und $\nu$ willkürliche positive Constanten bedeuten, $\varepsilon$ aber der Null sich nähern soll; so heisst nach Cauchy, wenn das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ unbestimmt wird, der für $\mu = \nu = 1$ sich ergebende Werth des Integrales $\int_{-\frac{1}{\nu\varepsilon}}^{\frac{1}{\mu\varepsilon}} f(x)\,dx$ der Hauptwerth von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Und die Formen

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx \text{ und } \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)\,dx$$

würden nach Cauchy den Namen der singulären Integrale erhalten.

## §. 22.

### Beweis der Endlichkeit von $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ und $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Obwohl wir später vielfach Gelegenheit haben werden, das oben berührte Grundprincip der Infinitesimalrechnung bei

der Frage nach der Bedeutung von $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ namentlich für den Fall nicht endlicher Integrationsgrenzen in Anwendung zu bringen, so möge doch schon jetzt an einem Beispiele, an dem Integrale $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ nämlich, der innezuhaltende Gedankengang erläutert werden.

Schreiben wir zu dem Behufe $\int\limits_p^q \cos(x^2)\,dx$ zunächst in der Form

$$\int\limits_p^q \cos(x^2)\,dx = \int\limits_p^q \frac{\partial\,[\sin(x^2)]}{\partial x}\,\frac{\partial x}{2x},$$

und integriren wir hierauf theilweise, so folgt

$$\int\limits_p^q \frac{d\sin(x^2)}{dx}\,\frac{dx}{2x} = \frac{\sin(q^2)}{2q} - \frac{\sin(p^2)}{2p} + \frac{1}{2}\int\limits_p^q \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx.$$

Nun bezeichnen die Sinus echte Brüche, und somit kann, weil numerisch $\frac{\sin(q^2)}{2q}$ höchstens $= \frac{1}{2q} < \frac{1}{2p}$ und $\frac{\sin(p^2)}{2p}$ niemals grösser, als $\frac{1}{2p}$ ist, $\frac{\sin(q^2)}{2q} - \frac{\sin(p^2)}{2p}$ absolut genommen nicht grösser als $\frac{1}{p}$ sein. Ferner ist klar, dass innerhalb des Intervalles von $x = p$ bis $x = q$ die Function $\frac{1}{x^2}$ niemals das Zeichen wechselt; mithin hat man

$$\frac{1}{2}\int\limits_p^q \sin(x^2)\,\frac{dx}{x^2} = \frac{R}{2}\int\limits_p^q \frac{dx}{x^2} = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right),\ \text{also} < \frac{1}{2p}.$$

Das Integral $\int\limits_p^q \cos(x^2)\,dx$ kann daher mit wachsendem $p$ und $q$ zuletzt nicht mehr die beliebig kleine Grösse $\frac{3}{2p}$ überschreiten, und folglich muss $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ einen Sinn besitzen.

Hieraus aber nun schliessen zu wollen, dass auch die ursprüngliche Definitionsgleichung des bestimmten Integrales immer die Endlichkeit des Integrales $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ zeigen müsse,

würde ein grosser Irrthum sein. Wählt man z. B. die Zwischenglieder $x_1, x_2, \ldots$ in arithmetischer Reihe, bildet man also den Ausdruck

$$\delta\,[\cos(0) + \cos(\delta^2) + \cos(4\delta^2) + \ldots\ldots], \lim \delta = 0,$$

so müsste man jetzt wegen der Unmöglichkeit, die Convergenz desselben nachweisen zu können, geradezu die falsche Behauptung aufstellen, dass das Integral $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ sinnlos sei.

Die Endlichkeit des Integrales $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ lässt sich übrigens auch dadurch zeigen, dass man dasselbe zuvörderst in die Form $\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\beta}{\sqrt{\beta}}\,d\beta$ umsetzt und zwischen die Grenzen $(0, \infty)$ Theilintervalle

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \ldots\ldots \left[(2r+1)\frac{\pi}{2}, (2r+3)\frac{\pi}{2}\right] \ldots\ldots$$

einschiebt. Alsdann nämlich hat man

$$\int\limits_{(2r+1)\frac{\pi}{2}}^{(2r+3)\frac{\pi}{2}} \cos\beta.\, \frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} = M \int\limits_{(2r+1)\frac{\pi}{2}}^{(2r+3)\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta = 2\,M\,(-1)^{r+1},$$

der Minimalwerth von $\beta$ aber ist $(2r+1)\frac{\pi}{2}$ und demnach $M < \frac{1}{\sqrt{(2r+1)\frac{\pi}{2}}}$. Da nun für das folgende Intervall $M$ wieder kleiner als $\frac{1}{\sqrt{(2r+3)\frac{\pi}{2}}}$ ist und ausserdem zwei auf einander folgende Integrale mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind, also eine unendliche, aus alternirenden und der Null sich nähernden Gliedern bestehende Reihe erscheint; so muss wegen der Convergenz dieser auch das Integral $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ einen Sinn besitzen. — Aus später folgenden Betrachtungen wird sich ergeben, dass

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ist.

Um endlich noch eine Anwendung des am Schlusse im vorigen Paragraphen erwähnten Theoremes zu geben, betrachten wir das Integral $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$. Hier ist, wenn $n > 1$, für $x = 0$ und $x = \infty$ das Product $x^n\, e^{-x^2}$ der Null gleich. Man kann daher zwischen 0 und $\infty$ immer eine solche Zahl $\alpha$ bestimmen, dass $x^n\, e^{-x^2}$ beständig kleiner als eine gegebene $A$ bleibt, und sonach muss dem genannten Lehrsatze zufolge $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ nicht ohne Bedeutung sein. Der Werth des Integrales selbst ist, wie wir später sehen werden, mit $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ identisch.

## §. 23.

### Umformung einiger allgemeinen Integrale mittelst Substitution.

Nachdem wir in dem Vorhergehenden uns Kenntniss darüber erworben, welchen Begriff man mit dem Integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ zu verbinden hat, sofern die ursprünglichen Bedingungen der Stetigkeit von $f(x)$ oder der Endlichkeit von $a$, $b$ nicht mehr befriedigt werden, wollen wir jetzt behufs näherer Erläuterung einer früher nicht erwähnten Eigenthümlichkeit der Substitution mittelst derselben einige hierher gehörigen allgemeinen Integralformen in andere umsetzen. Vorher aber ist es nöthig, nochmals einen Blick auf die früher gewonnene Beziehung

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f\,[\psi(y)]\, \psi'(y)\, dy,$$

die wir in der kürzern Gestalt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta \varphi(y)\, dy$$

uns vorstellen werden, zu werfen. Offenbar bleibt diese Gleichung solange in Kraft, solange dem ursprünglichen Inte-

grale $\int_a^b f(x)\,dx$ eine Bedeutung zukommt; nichtsdestoweniger erfordert die Anwendung derselben gewisse Vorsichtsmassregeln, deren Nichtbeachtung zu falschen Schlüssen verleiten kann. In dem ursprünglichen Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ bewegt sich nämlich die Veränderliche $x$ stets in demselben Sinne, in dem entsprechenden Integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(y)\,dy$ dagegen braucht dies in Bezug auf $y$ keinesweges der Fall zu sein. Während z. B. $x$ von $x = a$ bis $x = c$ wächst, kann auch $y$ von $y = \alpha$ bis $y = \gamma$ wachsen, dagegen von $y = \gamma$ bis $y = \beta$ abnehmen, wenn $x$ den Zwischenwerth $c$ überschritten hat und nun bis $b$ zunimmt. Die Function $\varphi(y)$ verbindet sich daher bei der bekannten Bildung des Integrales $\int_\alpha^\beta \varphi(y)\,dy$ in den beiden Intervallen $(\alpha, \gamma)$ und $(\gamma, \beta)$ mit zwei Differenzgruppen von verschiedenem Vorzeichen, und somit hat man jetzt die obige Gleichung in der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma \varphi(y)\,dy + \int_\gamma^\beta \varphi(y)\,dy$$

anzuwenden. Solche Stellen indess, an denen ein Wechsel in der Natur der Variabeln $y$ Statt findet, können offenbar nur dann eintreten, wenn die zu bildende Relation $x = \psi(y)$ eigentlich erst durch Auflösung einer andern Gleichung $\chi(x, y) = 0$ erzielt werden muss, wenn also $y$, als Function von $x$ dargestellt, zu den Maxima und Minima besitzenden Functionen von $x$ gehört. Die gleich folgenden Beispiele werden uns hierüber genügenden Aufschluss verschaffen.

I. Sei zunächst das Integral

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \int_0^b \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^3+\frac{1}{x^3}}},$$

wo $b$ positiv sein soll, mittelst der Substitution

$$1. \qquad x^3 + \frac{1}{x^3} = 2y^{-\frac{3}{2}}$$

umzuformen. Löst man die vorstehende Gleichung nach $x^3$ auf, so bekommt man

$$x^3 = y^{-\frac{3}{2}} \pm y^{-\frac{3}{2}} \sqrt{1-y^3}$$

und demnach

$$2. \qquad x^3 - \frac{1}{x^3} = \pm 2 y^{-\frac{3}{2}} \sqrt{1-y^3}.$$

Anderseits folgt durch Differentiation der Gleichung 1

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) \frac{dx}{x} = - y^{-\frac{5}{2}} dy,$$

d. g. mit Beachtung der Beziehung 2.

$$\frac{dx}{x} = \pm \frac{y^{-1} dy}{2\sqrt{1-y^3}}$$

und somit ist

$$3. \qquad \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^3 + \frac{1}{x^3}}} = \pm \frac{dy}{2\sqrt[3]{2}\sqrt{y-y^4}}.$$

Es fragt sich daher bloss noch, welches der Zeichen $\pm$ in dem neuen Integrale $\int_\alpha^\beta \varphi(y)\, dy$ dem Differential $\varphi(y)\, dy$ hier beizulegen ist, oder ob hier beide Werthe $\pm \frac{dy}{2\sqrt[3]{2}\sqrt{y-y^4}}$ in Betracht kommen können.

Sei zu dem Behufe zunächst $b < 1$; alsdann muss, weil wegen des stets positiven $x$ der Factor $2y^{-\frac{3}{2}}$ nicht negativ sein kann, vermöge der Gleichung 2. das obere Zeichen in 3. gelten. Und sonach findet, weil die Variabele $y$ von 0 bis 1 wächst, sofern $x$ zwischen denselben Grenzen sich bewegt, jetzt die Beziehung Statt

$$4. \qquad \int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^\beta \frac{dy}{\sqrt{y-y^4}},$$

wenn $\beta$ die dem Werthe $x = b$ entsprechende obere Grenze des neuen Integrales bedeutet.

Ueberschreitet hingegen $x$ den Werth 1, so nimmt die Veränderliche $y$ ab, und folglich wird nunmehr für $b > 1$ von $y = 1$ an bis $y = \beta$ der Ausdruck 3. mit dem Minuszeichen zu nehmen sein. Die resultirende Gleichung heisst mithin für den jetzigen Fall

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y-y^4}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_1^\beta \frac{dy}{\sqrt{y-y^4}}$$

oder — was dasselbe —

$$5. \quad \int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y-y^4}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^\beta \frac{dy}{\sqrt{y-y^4}};$$

und man sieht nun augenblicklich, dass die beiden wesentlich verschiedenen Formeln 4. und 5. nur für $b = 1$, also auch $\beta = 1$ zusammenfallen. Die weitere Behandlung des Integrales endlich würde zeigen, dass es in die Klasse der sogenannten elliptischen Integrale gehört.

II. Als zweites Beispiel wählen wir das Integral

$$\int_0^\infty f\left(a\,x + \frac{b}{x}\right) dx,$$

in welchem wir $a$ und $b$ als positive Grössen betrachten und bei dem wir natürlich voraussetzen, dass es nicht sinnlos ist. Schreiben wir

$$a\,x + \frac{b}{x} = y,$$

so wird sowohl für $x = 0$, als auch für $x = \infty$ die Veränderliche $y$ den Grenzwerth $+\infty$, für $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ dagegen den Minimalwerth $2\sqrt{ab}$ erwerben. Während also das positive $x$ von 0 bis $\infty$ wächst, nimmt die Variabele $y$ zunächst von $\infty$ bis $2\sqrt{ab}$ ab, um hierauf wieder von $2\sqrt{ab}$ an mit $x$ über jede Grenze hinaus zu wachsen. Nun ist

$$x = \frac{y}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{y^2 - 4ab},$$

also

$$dx = \frac{dy}{2a} \pm \frac{y\,dy}{2a\sqrt{y^2-4ab}}$$

und

$$f\left(a\,x + \frac{b}{x}\right) = f(y) \left[\frac{1}{2} \pm \frac{y}{2\sqrt{y^2-4ab}}\right] \frac{dy}{a}.$$

Mit Beachtung des soeben Gesagten muss daher von $x = 0$ bis $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ die Relation

$$x = \frac{y}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{y^2 - 4ab},$$

dagegen für das Intervall von $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ bis $x = +\infty$ die Beziehung

$$x = \frac{y}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{y^2 - 4ab}$$

gelten, und somit findet die Gleichung Statt:

$$\int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}} f(y)\left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4ab}}\right] dy$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(y)\left[1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4ab}}\right] dy,$$

d. h.

$$\int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(y)\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 - 4ab}}.$$

Dieselbe gestattet eine weitere Behandlung, wenn man $y^2 - 4ab = z^2$ setzt; denn dadurch nimmt sie die Gestalt an:

$$\int_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty f\left[\sqrt{z^2 + 4ab}\right] dz.$$

Einen speciellen Fall des vorstehenden Integrales bilde das von Laplace im Calcul des probabilités page 99 betrachtete Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{b^2}{4x^2}} dx.$$

Ergänzt man hier den Exponenten $x^2 + \frac{b^2}{4x^2}$ zu einem vollständigen Quadrate $\left(x + \frac{b}{2x}\right)^2$, so folgt

$$\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{b^2}{4x^2}} dx = e^b \int_0^\infty e^{-\left(x + \frac{b}{2x}\right)^2} dx;$$

unsere Function $f\left(ax + \frac{b}{x}\right)$ ist also im vorliegenden Falle

mit der Exponentialgrösse $e^{-\left(x+\frac{b}{2x}\right)^2}$ gleichbedeutend. Daraus aber fliesst nun sogleich weiter, dass

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{b^2}{4x^2}}\,dx = e^b \int_{2\sqrt{\frac{b}{2}}}^\infty e^{-y^2}\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-2b}} = e^{-b}\int_0^\infty e^{-z^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}.e^{-b}}{2}$$

ist.

Auch das Integral $\int_0^\infty \varphi\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)dx$, wo $a>0, b>0$, lässt sich nach der obigen Formel reduciren. Denn da $a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}$ mit $\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2-2ab$ gleichbedeutend ist, so braucht man $\varphi\left[\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2-2ab\right]$ nur mit $f\left(ax+\frac{b}{x}\right)$ und folglich $f[\sqrt{z^2+4ab}]$ mit $\varphi[z^2+2ab]$ zu indentificiren, um sofort die Beziehung

$$\int_0^\infty \varphi\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty \varphi(x^2+2ab)\,dx$$

zu gewinnen.

III. Sei jetzt das Integral

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,dx$$

umzuformen, wo wiederum $a$ und $b$ positive Grössen bezeichnen sollen.

Ersetzt man $a\cos x + b\sin x$ durch die Veränderliche $y$, so wird für $x=0$ und $x=2\pi$ die Grösse $y=a$; während folglich $x$ von 0 bis $2\pi$ wächst, muss $y$ innerhalb des Intervalles von $y=a$ bis $y=a$ nothwendig eine verschiedene Natur zeigen. Schreibt man nun $a\cos x + b\sin x$ in der Form $a\left(\cos x+\frac{b}{a}\sin x\right)$, und setzt man $\frac{b}{a}=\operatorname{tang}\alpha$, wo $\alpha$ einen Bogen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bedeutet; so erhält man

$$y = a(\cos x + \operatorname{tang}\alpha\sin x) = \frac{a}{\cos\alpha}\cos(\alpha - x),$$

$$dx = \frac{\cos\alpha\,dy}{a\sin(\alpha-x)} = \pm\frac{\cos\alpha\,dy}{\sqrt{a^2-y^2\cos\alpha^2}},$$

und es zeigt sich jetzt sofort, dass für $\alpha - x = 0$ $y$ den Maximalwerth $y = \frac{a}{\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2}$, dagegen für $\alpha + \pi = x$ den kleinsten Werth $y = -\sqrt{a^2 + b^2}$ erwirbt. Die neue Veränderliche $y$ wächst also von $y = a$ bis $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ und innerhalb des Intervalles $[-\sqrt{a^2 + b^2}, a]$, wenn $x$ von 0 bis $\alpha$ und von $\pi + \alpha$ bis $2\pi$ sich bewegt; sie nimmt hingegen von $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ bis $y = -\sqrt{a^2 + b^2}$ ab, sofern $x$ zwischen den Grenzen $\alpha$ und $\pi + \alpha$ sich befindet. Mithin muss, weil für die zuerst genannten Intervalle von $x$ $\sin(\alpha - x)$ positiv ist, zwischen den Grenzen $y = a$ und $y = \sqrt{a^2 + b^2}$, sowie $-\sqrt{a^2 + b^2}$ und $y = a$ $dx$ mit $+\frac{\cos\alpha\, dy}{\sqrt{a^2 - y^2\cos\alpha^2}}$, hingegen von $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ bis $y = -\sqrt{a^2 + b^2}$ mit $-\frac{\cos\alpha\, dy}{\sqrt{a^2 - y^2\cos\alpha^2}}$ gleichbedeutend sein. Daher die Gleichung

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,dx = \int_a^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{f(y)\cos\alpha\, dy}{\sqrt{a^2 - y^2\cos\alpha^2}} - \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{-\sqrt{a^2+b^2}} \frac{f(y)\cos\alpha\, dy}{\sqrt{a^2 - y^2\cos\alpha^2}}$$

$$+ \int_{-\sqrt{a^2+b^2}}^{a} f(y) \frac{\cos\alpha\, dy}{\sqrt{a^2 - y^2\cos\alpha^2}} = 2\int_{-\sqrt{a^2+b^2}}^{+\sqrt{a^2+b^2}} f(y) \frac{\cos\alpha\,.\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2\cos\alpha^2}}.$$

Dies letztere Integral aber lässt sich nochmals umformen; denn bedenkt man, dass $y\cos\alpha = \frac{ya}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ niemals grösser als $a$ werden kann, so darf man offenbar $y\cos\alpha = a\sin\varphi$ setzen. Dadurch aber entspringt sogleich die neue Beziehung

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi\,.\sqrt{a^2 + b^2})\,d\varphi$$

IV. Des Interesses wegen möge endlich noch die nachfolgende Gleichung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos y^2)\cos y\,dy$$

eine Stelle hier finden, obwohl bei ihrer Herleitung Betrachtungen der obigen Art nicht erfordert werden. Zerlegt man

nämlich das vorgelegte Integral in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ und beachtet dann weiter, dass vermittelst der Substitution $x = \frac{\pi}{2} - x$ das Integral

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x \, dx \quad \text{in} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \sin x \, dx$$

übergeht; so erhält man die Gleichung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x) \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \, [\cos x + \sin x] \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \sqrt{1 + \sin 2x} \, . \, dx.$$

Nun ist $\sin 2x$ innerhalb des Intervalles $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fortwährend positiv, und folglich darf man $\sin 2x = \cos y^2$ setzen. Indem man aber die hierauf bezügliche Rechnung ausführt, gewinnt man die oben angezeigte Relation.

## §. 24.

### Bemerkungen zu dem Uebergang vom unbestimmten zum bestimmten Integral.

Der Uebergang vom unbestimmten Integrale $\int f(x) dx = \varphi(x) + \text{const.}$ zum bestimmten $\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$ setzt wesentlich voraus, dass die Function $\varphi(x)$ zu den einwerthigen und continuirlichen Functionen innerhalb des Intervalles $(a, b)$ gehört. Wird diese Bedingung nicht beachtet, so kann man sehr leicht in Irrthümer verfallen. Nehmen wir beispielsweise das Integral

$$\int \frac{\mu \, dx}{(x - \lambda)^2 + \mu^2},$$

so lässt sich der Werth desselben durch die Function $-\text{arc tg} \frac{\mu}{x - \lambda} + \text{const.}$ darstellen. Die Function $\text{arc tang} \frac{\mu}{x - \lambda}$ aber ist vieldeutig; um sie einwerthig zu machen, könnte man

den Bogen etwa zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ voraussetzen. Der Werth des zwischen den Grenzen $\pm\infty$ genommenen Integrales aber wäre alsdann, brauchte man die Stetigkeit der Function arc tg nicht zu berücksichtigen, $= 0$, während er in Wahrheit mit $\pm\pi$ zusammenfällt, je nachdem nämlich die Constante $\mu$ positiv oder negativ ist. Dies richtige Resultat nun findet man, wenn man eine zwischen $-\infty$ und $+\infty$ continuirliche einwerthige Function arc tang $\frac{\mu}{x-\lambda}$ wählt, eine Bedingung, der offenbar im vorhergehenden Falle nicht entsprochen wurde. Denn da für $x = \lambda$ $\frac{\mu}{x-\lambda} = \pm\infty$ wird, je nachdem $\mu$ positiv oder negativ ist, so springt z. B. bei positivem $\mu$, wenn $x$ von $-\infty$ zu $+\infty$ in stetiger Weise sich bewegt und der Bogen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ sich befindet, dieser für $x = \lambda$ von $-\frac{\pi}{2}$ zu $+\frac{\pi}{2}$. Setzt man dagegen den Bogen zwischen 0 und $\pi$ voraus, so kann für $x = \lambda$ nur $\frac{\pi}{2}$ der entsprechende Werth von arc tang $\frac{\mu}{x-\lambda}$ heissen, und folglich wird jetzt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\, dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2} = -\text{arc tang}\,\frac{\mu}{\infty-\lambda} + \text{arc tang}\,\frac{\mu}{-\infty-\lambda},$$

d. h. das Integral ist $= 0 + \pi$, oder $= -\pi + 0$, je nachdem $\mu \gtrless 0$.

Es lässt sich indess auch dann der Uebergang vom unbestimmten zum bestimmten Integrale benutzen, wenn die einwerthige Function $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen $a$ und $b$ nicht stetig bleibt*). Unter der als selbstverständlich geltenden Annahme, dass das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ nicht sinnlos wird, bezeichne daher $\varphi(x)$ jetzt eine solche Function von $x$, die zwischen $a$ und $b$ an den Stellen $c, e, \ldots. k$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Schliessen wir diese beson-

*) Man sehe hierüber eine schöne Abhandlung von Heine im Crelle'schen Journale. Bd. 51.

dern Stellen zuvörderst von der Betrachtung aus, d. h. zerlegen wir das ursprüngliche Intervall $(a, b)$ in die Theilintervalle $(a, c - \varepsilon)$, $(c + \varepsilon, e - \varepsilon)$ ...., wo $\lim \varepsilon = 0$; so bekommen wir augenscheinlich die stets richtige Gleichung

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{e-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots\ldots + \int_{k+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$
$$= \varphi(b) - \varphi(a) + \varphi(c-\varepsilon) - \varphi(c+\varepsilon) + \varphi(e-\varepsilon) - \varphi(e+\varepsilon) + \ldots\ldots$$
$$+ \varphi(k-\varepsilon) - \varphi(k+\varepsilon).$$

Da nun mit ins Unendliche abnehmendem $\varepsilon$ die linke Seite der Voraussetzung gemäss in das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ übergeht, so muss auch die folgende Beziehung Statt haben

$$1.\ \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) + \lim\,[\varphi(c-\varepsilon) - \varphi(c+\varepsilon)] + \ldots$$
$$+ \lim\,[\varphi(k-\varepsilon) - \varphi(k+\varepsilon)].$$

Nach unserm Dafürhalten ist diese Gleichung indess nur streng richtig für den Fall endlicher Discontinuitäten der Function $\varphi(x)$; geht dagegen $\varphi(x)$ durch das Unendliche, so kann die vorstehende Relation bloss den sogenannten Hauptwerth des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ liefern. Denn wird z. B. für $x = c$ $\varphi(x)$ unendlich, so muss auch schon in der Nähe von $c$ $\varphi(x)$ unstetig, also für mehrere unmittelbar auf einander folgende Punkte die Verbindung zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ aufgehoben werden, wenn $f(x)$ endlich ist. Daraus folgt, dass für $x = c$ $f(x)$ nicht mehr zu den endlichen Grössen gehören kann; falls $\varphi(x) +$ const. das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ vorstellen soll. Für den Fall einer unendlichen Stetigkeitsunterbrechung von $\varphi(x)$ muss daher auch $f(x)$ mit $\varphi(x)$ an derselben Stelle unendlich werden, und sonach hat man z. B. die Gleichung zu bilden

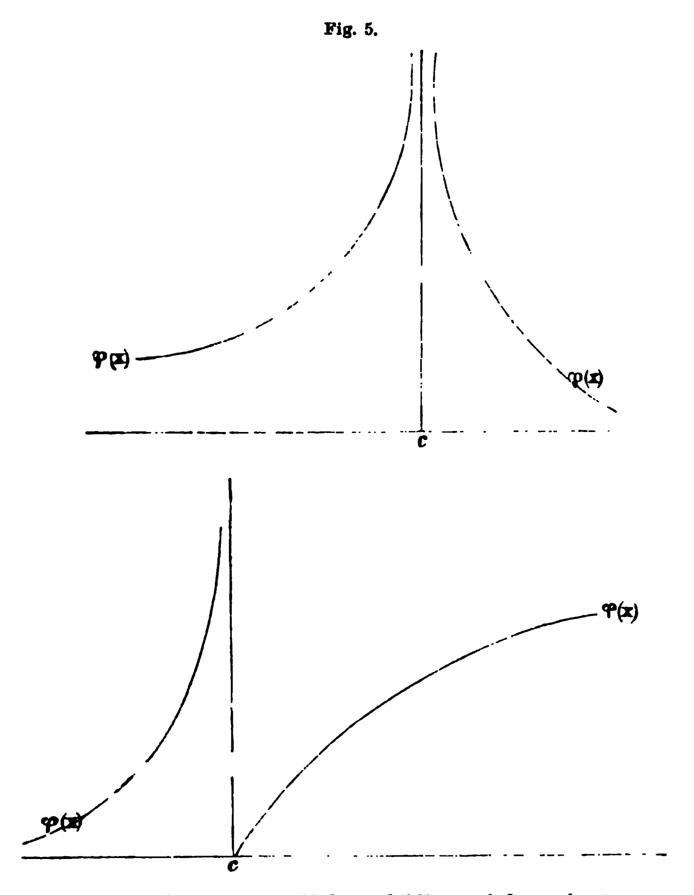
$$\lim \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx = \lim \varphi(c-\varepsilon) - \varphi(a)$$
$$+ \varphi(b) - \lim \varphi(c+\delta).$$

Diese aber ist sinnlos, wenn mit abnehmendem $\varepsilon$ und $\delta$ $\varphi(c-\varepsilon)$ und $\varphi(c+\delta)$ nicht endlich bleiben. (Fig. 5.)

Anders verhält es sich dagegen mit der Gleichung 1., wenn die vorkommenden Unstetigkeiten von $\varphi(x)$ endlich sind,

wenn also in geometrischer Fassung jeder Abscisse $c, e, \dots k$ zwei Ordinaten $\varphi(c-0)$ und $\varphi(c+0), \dots$ entsprechen. In diesem Falle besitzt freilich $\varphi(x)$ für die Unstetigkeitspunkte

Fig. 5.




in Wahrheit keinen eigentlichen Differentialquotienten, weil dieser in der bekannten Definitionsgleichung

$$\lim \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = f(x)$$

ganz unabhängig von dem Vorzeichen des Incrementes $h$ sein muss, was hier augenscheinlich nicht der Fall ist. Doch spricht man noch immer — wie schon früher erwähnt — von dem unbestimmten Integrale $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + \text{const.}$, und

folglich lässt sich jetzt die Relation 1. einfacher in nebenstehender Weise schreiben:

$$2. \quad \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) + \varphi(c-0) - \varphi(c+0)$$
$$+ \varphi(e-0) - \varphi(e+0) + \ldots\ldots + \varphi(k-0) - \varphi(k+0).$$

Betrachten wir beispielsweise wieder den obigen arc tang, indem wir den Bogen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ wählen; so existiren für $x = \lambda$ die beiden Werthe $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ und folglich wird

$$\int_{-r}^{\infty} \frac{\mu\,dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2} = -\operatorname{arc\,tg} 0 + \operatorname{arc\,tg} 0 - \operatorname{arc\,tg}(\pm\infty) + \operatorname{arc\,tg}(\mp\infty)$$
$$= 0 + 0 - \left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + \left(\mp\frac{\pi}{2}\right) = \mp\pi.$$

Zur Herleitung eines bestimmten Integrales aus einem unbestimmten bieten sich demnach jetzt zwei Wege dar, von denen der eine auf die vorstehenden Formeln sich stützt, der andere hingegen darauf hinausläuft, wenn möglich eine solche stetige Function $\varphi_1(x)$ zu suchen, welche denselben Differentialcoefficienten besitzt wie die an einzelnen Stellen unstetig werdende Function $\varphi(x)$. Macht also $\varphi(x)$ nur endliche Sprünge, so lässt sich geometrisch genommen dieses letztere Ziel leicht dadurch erreichen, dass man von den einzelnen Zweigen der $\varphi(x)$ repräsentirenden Curve den einen festhält und die andern mit jenem zu einer in sich zusammenhängenden Linie zusammenschiebt, wobei aber die einzelnen Punkte der zu verschiebenden Zweige immer auf ihren Ordinaten fortschreiten müssen. Die auf diese Weise erzeugte Curve stellt alsdann die gesuchte Function $\varphi_1(x)$ vor. Bei dem obigen arc tang verrücke man z. B. den von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$ verlaufenden Curvenzweig so auf den ihm zugehörigen Ordinaten, dass $-\frac{\pi}{2}$ mit $+\frac{\pi}{2}$ zusammenfällt. Die entstehende krumme Linie wird dann ersichtlich von den Ordinaten $\pi$ und 0 begrenzt, und folglich ist ihre Differenz je nach der verschiedenen Natur des $\mu \pm \pi$.

Ein anderes sehr passendes Beispiel liefert das Integral $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\cos x^2}\, dx$. Integrirt man nämlich zunächst unbestimmt, so findet man, dass

$$\int^x \frac{\sin x\, dx}{1+\cos x^2} = \text{arc tang}\, \frac{1}{\cos x} + \text{const.}$$

ist. Um die Vieldeutigkeit der Function arc tang aufzuheben, wollen wir den Bogen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ voraussetzen. Bewegt sich nun $x$ von 0 bis $\frac{3\pi}{4}$, so wird für $x = \frac{\pi}{2}$

$$\text{arc tang}\, \frac{1}{\cos x} = \text{arc tg}\, \infty = \frac{\pi}{2};$$

bei weiterem Fortschreiten des $x$ hingegen wird die Function arc tg $\frac{1}{\cos x}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und 0 sich befinden müssen, und folglich springt für $x = \frac{\pi}{2}$ der arc tang von $+\frac{\pi}{2}$ zu $-\frac{\pi}{2}$ über. Unserer obigen Formel gemäss ist daher

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos x^2} = \text{arc tang}\, \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{4}} - \text{arc tg}\, \frac{1}{\cos 0} + \text{arc tg}\, \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}$$
$$- \text{arc tang}\, \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+0\right)}$$
$$= - \text{arc tg}\, \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} - \text{arc tg}\, \sqrt{2}.$$

Ganz dasselbe Resultat aber erhält man sogleich, wenn man arc tg zwischen 0 und $\pi$ wählt; denn nun bleibt die Function stetig, und sonach wird

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos x^2} = \text{arc tang}\left[\frac{1}{\cos\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2}\right] - \frac{\pi}{4}$$

sein. Setzt man aber für den Augenblick arc tg $(-\sqrt{2}) = z$, d. h. $-\text{tg}\, z = \sqrt{2} = \text{tang}\,(\pi - z)$, so ergiebt sich $z = \pi -$ arc tg $\sqrt{2}$, und folglich ist wieder

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos x^2} = \frac{3\pi}{4} - \operatorname{arc\,tang} \sqrt{2}.$$

Um endlich auch einmal ein Beispiel für die Benutzung der Gleichung 1. bei dem Aufsuchen des sogenannten, uns aber völlig gleichgültigen Hauptwerthes eines bestimmten Integrales vorzuführen, wollen wir das Integral $\int_0^b \frac{dx}{a^2 - x^2}$, $0 < a < b$ betrachten. Das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ ist bekanntlich mit $\frac{1}{2a} \lg \frac{a+x}{a-x} +$ const. gleichbedeutend, wofür man indess, um das Imaginäre zu vermeiden, die Form $\frac{1}{4a} \lg \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2 +$ const. wählen wird. Nun wächst für $x = a$ der Logarithmus über jede Grenze, und demnach ist das Integral $\int_0^b \frac{dx}{a^2 - x^2}$ völlig unbestimmt, also in Wahrheit sinnlos. Sein Hauptwerth aber ergiebt sich in nebenstehender Weise:

$$\int_0^b \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{4a}\lg\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \lim \frac{1}{4a}\left[\lg\left(\frac{a+a-\varepsilon}{a-a+\varepsilon}\right)^2 - \lg\left(\frac{a+a+\varepsilon}{a-a-\varepsilon}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4a} \lg \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \frac{1}{4a} \lim \lg \left(\frac{2a-\varepsilon}{2a+\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{4a} \lg \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

## II. Abtheilung.

## Die besondern Fälle bestimmter Integrale.

### §. 25.

### Einleitende Bemerkungen.

In den vorhergehenden Untersuchungen haben wir vorzugsweise die Gesetze zu entwickeln versucht, welchen das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ gehorcht, wenn diese oder jene Operationen an demselben vollzogen werden. Deuteten wir auch schon hier

und da einmal gewisse bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten an, welche durch die Wahl besonderer Intervalle $(a, b)$, z. B. $(0, 1)$, $(0, \infty)$ .... sich zeigen, während bei Voraussetzung ganz beliebiger Integrationsgrenzen, natürlich immer unter der Bedingung, dass hier wie dort das Integral noch zulässig bleibt, Resultate von grossem Interesse meistens nicht zu erlangen sind; so hat uns doch die ausführliche Betrachtung solcher speciellen Fälle bis jetzt gänzlich fern gelegen. Diese aber bilden hauptsächlich den Inhalt der Theorie der bestimmten Integrale. Unsere jetzige Aufgabe wird demnach auch darin bestehen, gestützt auf die früher gewonnenen Lehren die Auswerthung und die Erforschung der Eigenschaften besonderer bestimmter Integrale zu versuchen.

Zu den wesentlichsten Vortheilen, welche mit der Wahl besonderer Integrationsgrenzen verknüpft sind, gehören ohne Zweifel die, dass dadurch gewisse Vereinfachungen in den Werthen bestimmter Integrale sich erzielen lassen, dass oft die Angabe eines Integrales in geschlossener Form gelingt, während dies bei Voraussetzung beliebiger Grenzen nicht der Fall ist und dass endlich auf diese Weise Transscendenten erzeugt werden können, die in den verschiedensten Untersuchungen auftreten und oft sogar schon um ihrer selbst willen das höchste Interesse beanspruchen.

Betrachten wir beispielsweise das Integral $\int_a^b x^m dx$, wo $a$, $b$ und $m$ positiv sein sollen, so ist dasselbe bekanntlich $= \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$. Das bestimmte Integral behält also noch den Charakter des unbestimmten Integrales. Setzen wir aber $a = 0$ und $b = 1$, so verwandelt sich die Potenz in den Quotienten $\frac{1}{m+1}$, ein für die Summation gewisser unendlicher Reihen z. B. nicht unwichtiges Resultat*). Das Integral $\int_0^b e^{-x^2} dx$ ferner lässt eine Darstellung in geschlossener Form nicht zu, dagegen ist dasselbe für $b = +\infty$ mit $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ gleichbedeutend. Und zu der Klasse der neuen, durch ausserordentliche

*) Vergl. §. 115.

Fruchtbarkeit sich auszeichnenden Transscendenten endlich gehört vorzugsweise das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$, wo $a > 0$.

## I. Kapitel.

## Integration rationaler Brüche zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$.

### §. 26.

**Beweis der Formel** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx = \pi i \sum \pm \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

Sehr bald nach der Entdeckung der Infinitesimalrechnung hatte man erkannt, dass jeder rationale Bruch $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ unbestimmt sich integriren lässt; aber erst Euler, dem Begründer der Theorie der bestimmten Integrale, war es vorbehalten, die schönen Beziehungen zu entwickeln, welche aus der von $-\infty$ bis $+\infty$ sich erstreckenden Integration des rationalen Bruches $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ hervorgehen. Zwar hat Euler seine Forschung nicht in der Allgemeinheit geführt, wie wir es hier nach Dirichlet zu thun gedenken, dessenungeachtet aber können wir den folgenden Gedankengang seinem Wesen nach unbedenklich Euler zuschreiben.

Wir setzen nun hierbei voraus, dass die beiden Polynome $\varphi(x)$ und $f(x)$ prim unter sich sind und dass keine der Wurzeln von $f(x)$ wiederholt vorkommt. Soll unter diesen Annahmen das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx$ nicht sinnlos sein, so ist einer schon in §. 20. gemachten Bemerkung zufolge die Bedingung unerlässlich, dass die verschiedenen Wurzeln von $f(x)$ zu den imaginären Grössen gehören müssen. Aber diese Eigenschaft des Bruches $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ allein würde nicht genügen; vielmehr muss nothwendig der Grad des Polynomes $\varphi(x)$ mindestens um zwei Einheiten niedriger sein, als der von

$f(x)$. Denn schreiben wir, um dies einzusehen, die Polynome $\varphi(x)$ und $f(x)$ zunächst in der Gestalt

$$\varphi(x) = x^m \left[b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots\right]$$

und

$$f(x) = x^n \left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots\right],$$

so bezeichnen die in den Klammern befindlichen Grössen Functionen von $x$, die mit ins Unendliche wachsendem $x$ beziehungsweise den Grenzen $b_0$ und $a_0$ sich nähern. Mithin können wir $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in der Form $x^{m-n}\,\psi(x)$ dargestellt denken, wo $\psi(x)$ eine Function von $x$ ausdrückt, die für $x = \pm\infty$ den Grenzwerth $\frac{b_0}{a_0}$ erwirbt. Wird nun $x^{m-n}\,\psi(x)$ von einem beliebig grossen $p$ bis zu einem beliebig grössern $q$ integrirt; so wird dem bekannten Maximum-Minimum-Satze zufolge $\int_p^q \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx$ nur dann der Null sich nähern, wenn das Integral $\int_p^q x^{m-n}\,dx$ diese Eigenschaft besitzt. Ein Blick aber genügt, um zu zeigen, dass dies nur geschehen kann, wenn $m - n + 1$ negativ, also $m$ höchstens $= n - 2$ ist.

Setzen wir daher die für die Existenz des Integrales $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx$ nothwendigen Bedingungen als erfüllt voraus, und bedenken wir noch, dass

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \dots\dots$$

oder abkürzend geschrieben

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum \frac{A}{x-\alpha} = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)} \cdot \frac{1}{x-\alpha}$$

ist; so reducirt sich unsere weitere Betrachtung zuvörderst auf die nähere Untersuchung eines Partialbruches $\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)} \cdot \frac{1}{x-\alpha}$.

Sei zu dem Behufe $\alpha = \lambda + \mu i$, wo $\lambda$ auch Null sein kann und $\mu$ als algebraische Grösse zu behandeln ist, da

$x - \alpha$ überhaupt den Vertreter sämmtlicher Factoren von $f(x)$ bilden soll. Nun ergiebt sich sofort, dass

$$\int \frac{dx}{x - \lambda - \mu i} = \int \frac{(x-\lambda)\,dx}{(x-\lambda)^2 + \mu^2} + i \int \frac{\mu\, dx}{(x-\lambda)^2 + \mu^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lg\,[(x-\lambda)^2 + \mu^2] + i \operatorname{arc\,tang} \frac{x-\lambda}{\mu} + \text{const.},$$

also

$$\int_{-p}^{+q} \frac{dx}{x - \lambda - \mu i}$$

$$= \frac{1}{2} \lg \frac{(q-\lambda)^2 + \mu^2}{(p+\lambda)^2 + \mu^2} + i\left[\operatorname{arc\,tang} \frac{q-\lambda}{\mu} + \operatorname{arc\,tang} \frac{p+\lambda}{\mu}\right]$$

ist. Dabei haben wir, um der Stetigkeit zu genügen, den Bogen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gewählt. Diese Gleichung aber vereinfacht sich, wenn die positiven Grössen $p$ und $q$ über jede Grenze hinaus zunehmen. Denn da einerseits

$$(q-\lambda)^2 + \mu^2 = q^2\left[1 - \frac{2\lambda}{q} + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{q^2}\right],$$

$$(p+\lambda)^2 + \mu^2 = p^2\left[1 + \frac{2\lambda}{p} + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{p^2}\right],$$

also der Quotient $\frac{(q-\lambda)^2 + \mu^2}{(p+\lambda)^2 + \mu^2}$ in der kürzern Form $\frac{q^2}{p^2}\frac{z}{y}$ sich schreiben lässt, wo mit wachsendem $p$ und $q$ die Grössen $y$ und $z$ der Einheit sich nähern; so darf man ersichtlich

$$\frac{1}{2} \lg \frac{(q-\lambda)^2 + \mu^2}{(p+\lambda)^2 + \mu^2} = \lg \frac{q}{p} + \sigma_1$$

setzen, wenn man mit $\sigma_1$ eine Grösse bezeichnet, die für unendlich grosse Werthe von $q$ und $p$ verschwindet.

Und da andererseits

$$\lim \operatorname{arc\,tang} \frac{q-\lambda}{\mu} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \lim \operatorname{arc\,tang} \frac{p+\lambda}{\mu} = \pm \frac{\pi}{2},$$

je nachdem $\mu$ positiv oder negativ ist, folglich in ähnlicher Weise wie vorhin hier $i\left[\operatorname{arc\,tang} \frac{q-\lambda}{\mu} + \operatorname{arc\,tang} \frac{p+\lambda}{\mu}\right]$ mit dem kürzern Ausdrucke $\pm \pi i + \sigma_2$ identificirt werden darf, wenn auch unter dem imaginären $\sigma_2$ eine Grösse verstanden wird, die beim Uebergange zum Unendlichen den Werth Null erwirbt; so erwächst jetzt die Beziehung

$$A \int_{-p}^{+q} \frac{dx}{x-\alpha} = A \lg \frac{q}{p} \pm A \pi i + A \sigma,$$

in der $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Hieraus aber fliesst weiter, dass

$$\int_{-p}^{+q} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx = \lg \frac{q}{p}\, \Sigma A + i \pi\, \Sigma \pm A + \Sigma (A \sigma)$$

ist, eine Relation, die im Unendlichen wegen des ersten Gliedes rechts scheinbar einen ganz unbestimmten Charakter annimmt. Erwägt man indess, dass $\varphi(x) = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)} \frac{f(x)}{x-\alpha}$ höchstens vom Grade $n-2$ ist, also rechts der Exponent $n-1$ von $x$ nur formell erscheint; so muss nothwendig $\Sigma A$ mit Null zusammenfallen.

Das Resultat aller dieser Betrachtungen spricht sich daher in der Gleichung aus:

$$\text{I.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx = \pi i \sum \left[ \pm \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)} \right],$$

in der man dem Quotienten $\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}$ das obere oder untere Zeichen beizulegen hat, je nachdem $\mu$ zu den positiven oder negativen Zahlen gehört.*)

## §. 27.

### Anwendung auf den Fall $f(x) = x^n - (a + b\,i)$; $\varphi x = x^{m-1}$.

Für den weitern Fortgang unserer Untersuchungen wollen wir statt $f(x)$ ein solches Polynom wählen, dessen Factoren in sehr einfacher Weise sich darstellen lassen. Diese Eigenschaft aber kommt bekanntlich den binomischen Ausdrücken $f(x)$ zu; wir setzen demnach $f(x) = x^n - (a + b\,i)$, wo $a + b\,i$ nur für ein gerades $n$ reell werden darf.

Schreiben wir nun $a + bi$ in der Form $\varrho\, e^{\vartheta i}$, und nennen wir $\alpha = r\,(\cos t + i \sin t)$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$; so entspringen aus der Beziehung

---

*) Vergl. hiermit: Cauchy. Résumé des leçons données à l'école pol. p. 136. Moigno. Leçons de cal. diff. et de cal. int. T. II., p. 89.

$$r^n (\cos nt + i \sin nt) = \varrho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

bekanntlich die andern Relationen

$$r = \varrho^{\frac{1}{n}}, t = \frac{\vartheta \pm 2s\pi}{n},$$

so dass nunmehr

$$\alpha = \varrho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\vartheta + 2s\pi}{n} i}$$

wird, wo $s$ irgend $n$ auf einander folgenden ganzen Zahlen gleich zu setzen ist. Unter dem Bogen $\vartheta$ verstehen wir hierbei den kleinsten Bogen, dessen Sinus $= b$ ist und dessen Cosinus $a$ heisst; wir wählen ihn also zwischen 0 und $2\pi$. Da aber keine reelle Wurzel $\alpha$ erscheinen darf, so muss für $\vartheta$ die Beziehung gelten

$$0 < \vartheta < 2\pi.$$

In diesem Falle wird offenbar $a + bi$ nur für $\vartheta = \pi$ zu einer reellen Grösse, die entsprechenden Wurzeln $\alpha$ aber bleiben imaginär, wenn $n$ eine gerade Zahl bedeutet. Setzen wir folglich ein solches $n$ hier voraus, so dürfen wir auch statt $\vartheta$ jeden zwischen den obigen Grenzen enthaltenen Bogen zulassen.

Wie ferner sogleich erhellt, verliert die Untersuchung im Wesentlichen nichts an Allgemeinheit, wenn wir den Modul $\varrho$ gleich der Einheit und statt $\varphi(x)$ die Potenz $x^{m-1}$ wählen. Nehmen wir alsdann noch für $s$ die $n$ auf einander folgenden Zahlen $0, 1, 2 \ldots\ldots n-1$, so liegen sämmtliche Bogen $\frac{\vartheta + 2s\pi}{n}$ in den vier ersten Quadranten. Nun ist aber für $s' = 0, 1, 2 \ldots\ldots \frac{n}{2} - 1$ $\frac{\vartheta}{n} < \frac{2\pi}{n}$ und $\frac{\vartheta + (n-2)\pi}{n} < \pi$, mithin $\mu = \sin \frac{\vartheta + 2s'\pi}{n}$ positiv; dagegen führt $\mu$ das Minuszeichen, wenn $s'' = \frac{n}{2} + s' = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \ldots\ldots n-1$ genommen wird. Und beachten wir endlich, dass gegenwärtig $\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}$ mit

$$\frac{1}{n} \alpha^{m-n} = \frac{1}{n} \left(e^{\frac{\vartheta + 2s\pi}{n} i}\right)^{m-n} = \frac{1}{n} e^{\left(\frac{m}{n} - 1\right)\vartheta i} e^{\frac{2sm}{n} \pi i}$$

zusammenfällt; so ergiebt sich nunmehr in Folge unseres obigen Theoremes die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - e^{\vartheta i}} = \frac{\pi i}{n}\, e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i} \sum_0^{n-1} \left(\pm e^{2s\frac{m}{n}\pi i}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{n}\, e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i} \left[\sum_0^{\frac{n}{2}-1} e^{2s'\frac{m}{n}\pi i} - \sum_{\frac{n}{2}}^{n-1} e^{2s''\frac{m}{n}\pi i}\right]$$

$$= \frac{\pi i}{n}\, e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} e^{2s'\frac{m}{n}\pi i} \left[1 - e^{m\pi i}\right]$$

Bezeichnet daher $m$ eine ungerade Zahl, so wird $1 - e^{m\pi i} = 2$ und folglich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - e^{\vartheta i}} = \frac{2\pi i}{n}\, e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} e^{2s\frac{m}{n}\pi i}.$$

Nun ist

$$\sum_0^{\frac{n}{2}-1} \left(e^{2\frac{m}{n}\pi i}\right)^s = \frac{1 - e^{m\pi i}}{1 - e^{2\frac{m}{n}\pi i}} = \frac{2}{1 - e^{2\frac{m}{n}\pi i}},$$

sonach

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - e^{\vartheta i}} = \frac{4\pi i}{n}\, \frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}}{1 - e^{2\frac{m}{n}\pi i}}$$

In Betreff dieses Resultates ist wohl zu beachten, dass es abgesehen von den Beziehungen

$$m \overline{\gtrless} n - 1,\quad \begin{matrix} m \equiv 1 \\ n \equiv 0 \end{matrix} \left\{ \text{mod. } 2 \right\}$$

wesentlich durch die Wahl von $\vartheta$ bedingt ist. Denn vermehrt oder vermindert man $\vartheta$ um ein Vielfaches von $2\pi$, so bleibt das Integral zwar unverändert, die Grösse $e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}$ dagegen erwirbt im Allgemeinen einen andern Werth. Nimmt man z. B. für $\vartheta$ den Bogen $\vartheta + 2k\pi$, so geht $e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}$ in $e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}\, e^{2\frac{m}{n}k\pi i}$ über und stimmt folglich nur dann mit dem

ursprünglichen Ausdrucke überein, wenn $\frac{k}{n}$ eine ganze Zahl vorstellt. Für ein durch $n$ nicht theilbares $k$ hätte man also die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - e^{\vartheta i}} = \frac{\pi i}{n} e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}\, e^{2\frac{m}{n}k\pi i} \sum_{0}^{n-1} \left(\pm e^{2s\frac{m}{n}\pi i}\right).$$

Ein bestimmtes Integral kann mithin je nach der Wahl darin befindlicher Parameter verschiedene Werthe selbst dann annehmen, wenn mit der Aenderung dieser Parameter eine Veränderung der Function unter dem Integralzeichen auch nicht verbunden ist.

Unsere obige Gleichung gestattet eine weitere Behandlung, wenn wir den Quotienten $\dfrac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}}{1 - e^{2\frac{m}{n}\pi i}}$ im Zähler und Nenner mit $e^{-\frac{m}{n}\pi i}$ multipliciren und den sich ergebenden Factor $-1$ durch $e^{\pi i}$ ersetzen. Denn so entspringt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - e^{\vartheta i}} = \frac{2\pi}{n} \frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)(\vartheta-\pi)i}}{\sin\frac{m}{n}\pi},$$

und hier wird der Bogen $\vartheta - \pi$ offenbar zwischen $-\pi$ und $+\pi$ sich befinden. Schreibt man folglich $\vartheta - \pi = \vartheta_1$, so gewinnt man die neue Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n + e^{\vartheta i}} = \frac{2\pi}{n} \frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}}{\sin\frac{m}{n}\pi},$$

in der also das jetzige $\vartheta$ die Bedingung $-\pi < \vartheta < +\pi$ zu erfüllen hat. Nun bezeichnet $\dfrac{x^{m-1}}{x^n + e^{\vartheta i}}$ eine gerade Function von $x$; bleibt aber $f(x)$ durch Vertauschung von $x$ mit $-x$ unverändert, so muss auch, das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ als existirend vorausgesetzt,

$$\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

und daher

$$\int_{-b}^{+b} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

sein. Mit Benutzung dieses Satzes erhalten wir demnach die andere Relation

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n + e^{\vartheta i}} = \frac{\pi}{n}\,\frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}}{\sin\frac{m}{n}\pi}.$$

Und hieraus fliesst weiter, wenn wir $x$ mit $x_1^{\frac{1}{n}}$ vertauschen,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{n}-1}\,dx}{x + e^{\vartheta i}} = \pi\,\frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}}{\sin\frac{m}{n}\pi}.$$

Das Integral wird hier, obgleich für $x = 0$ der Factor $x^{\frac{m}{n}-1}$ durch das Unendliche schreitet, nicht sinnlos, indem diese Unstetigkeit nur eine Folge der angewendeten Substitution ist.

## §. 28.

### Gültigkeit der Gleichung $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+e^{\vartheta i}} = \pi\,\frac{e^{(a-1)\vartheta i}}{\sin a\pi}$ für jedes echt gebrochene $a$.

Die vorhin gefundene Gleichung bleibt in Kraft für jeden echten rationellen Bruch, dessen Zähler eine ungerade, dessen Nenner eine gerade Zahl ausdrückt. Mit jedem beliebigen Grade der Annäherung aber kann man irgend einer andern zwischen 0 und 1 befindlichen Zahl $a$ durch eine Reihe von einschliessenden Brüchen der obigen Art nahe kommen. Bleiben folglich für eine Reihe solcher den Bruch $a$ einschliessenden und bei hinreichend weit fortgesetztem Processe unendlich wenig von einander und von $a$ abweichenden Quotienten $\frac{m}{n}$ die beiden Grössen

1. $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+e^{\vartheta i}} \text{ und } \pi\,\frac{e^{(a-1)\vartheta i}}{\sin a\pi}$$

fortwährend zwischen den diesen verschiedenen Brüchen $\frac{m}{n}$ entsprechenden Ausdrücken:

$$2. \qquad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{n}-1}\,dx}{x+e^{\vartheta i}} \text{ und } \pi\,\frac{e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)\vartheta i}}{\sin\frac{m}{n}\pi};$$

so muss nothwendig einem bekannten Principe zufolge die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+e^{\vartheta i}} = \pi\,\frac{e^{(a-1)\vartheta i}}{\sin a\pi}$$

für jeden echten von 0 und 1 verschiedenen Bruch $a$ Geltung besitzen.

Offenbar findet diese Frage nach der in der eben beschriebenen Weise zwischen den Grössen 1. und 2. vielleicht Statt habenden Beziehung sofort ihre Beantwortung, wenn sich zeigen lässt, dass für ein $a$ der genannten Art das Integral und der Ausdruck $\frac{e^{(a-1)\vartheta i}}{\sin a\pi}$ stetige Functionen von $a$ sind. In Betreff dieser letztern Grösse leuchtet dies sofort ein, weil ja $\sin a\pi$ niemals mit Null zusammenfallen kann; die stetige Aenderung des Integrales mit $a$ hingegen lässt sich nicht ohne eine eingehendere Erörterung behaupten. Denn ein bestimmtes Integral ändert sich, wenn auch in Bezug auf eine Constante die zu integrirende Function niemals unstetig wird, nicht immer in continuirlicher Weise mit diesem Parameter. So haben wir z. B. oben gesehen, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\,dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2} = \pm\pi$$

ist, je nachdem die Constante $\mu$ zu den positiven oder negativen Zahlen gehört, welchen von Null verschiedenen Werth sie sonst auch besitzen möge. Für $\mu = 0$ aber ist das Integral ebenfalls der Null gleich; lässt man also $\mu$ continuirlich vom Positiven zum Negativen übergehen, so springt bei $\mu = 0$ das Integral plötzlich von $+\pi$ zu Null und hierauf wieder von Null zu $-\pi$ über.

Dem bekannten Kriterium der Stetigkeit zufolge nun

werden wir dieselbe dem Integrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+e^{\vartheta i}}$ zuschreiben müssen, wenn für ein von $a$ nur unendlich wenig verschiedenes $b$, das wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, kleiner als $a$ voraussetzen, die Differenz

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+e^{\vartheta i}} - \int_0^\infty \frac{x^{b-1}\,dx}{x+e^{\vartheta i}}$$

ebenfalls die Null zur Grenze besitzt. Dies aber ist wirklich der Fall, und zwar lässt sich die Richtigkeit dieser Behauptung ohne die geringste Schwierigkeit mittelst unseres bekannten Mittelwerthsatzes darthun. Doch kann die Benutzung desselben nicht ohne Weiteres geschehen. Denn der hier zu integrirende Factor $x^{a-1} - x^{b-1} = x^{b-1}(x^{a-b} - 1)$ ist negativ für ein echt gebrochenes $x$, er führt hingegen das Pluszeichen, wenn $x$ zwischen den Grenzen 1 und $\infty$ sich bewegt. Alsdann aber würde ohne fernere Aenderung für das zweite Integral $\int_1^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{x+e^{\vartheta i}}\,dx$ wegen der obern Grenze die unbestimmte Form $\infty - \infty$ erscheinen. Um dieselbe zu beseitigen, muss mithin eine nochmalige Umformung eintreten, und zwar muss hier das Integral in der Gestalt

$\int_1^\infty \frac{x^{a-2} - x^{b-2}}{1+\frac{e^{\vartheta i}}{x}}\,dx$ der Untersuchung unterworfen werden.

Bedenkt man nun, dass wegen $-\pi < \vartheta < +\pi$ weder $\frac{1}{x+e^{\vartheta i}}$, noch $\frac{1}{1+\frac{e^{\vartheta i}}{x}}$ jemals unendlich werden können, so darf man offenbar in beiden Fällen die Quotienten in der Form $r + s\,i$ sich vorstellen, in welcher $r$ und $s$ stets endliche Grössen bezeichnen. Heissen folglich $\varrho$ und $\sigma$ die beziehlich zwischen dem grössten und kleinsten Werthe von $r$ und $s$ innerhalb der Intervalle (0, 1) und (1, $\infty$) befindlichen Factoren von bekannter Bedeutung; so ist der reelle Theil von

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{x + e^{\vartheta i}} dx \text{ mit } \varrho \int_0^1 (x^{a-1} - x^{b-1})\, dx = \varrho\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right),$$

der imaginäre Theil hingegen mit $\sigma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ gleichbedeutend. Und ebenso ergeben sich für die entsprechenden Theile des Integrales

$$\int_1^\infty \frac{x^{a-2} - x^{b-2}}{1 + \frac{e^{\vartheta i}}{x}} dx$$

die beiden Beziehungen

$$\varrho\left[\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-b}\right] \text{ und } \sigma\left[\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-b}\right].$$

Nähert sich mithin $b$ dem $a$ ins Unendliche, so weichen sämmtliche Werthe von Null um weniger als jede noch so kleine Grösse ab. Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{x + e^{\vartheta i}}$$

ändert sich daher in stetiger Weise mit dem Parameter $a$, und folglich besteht für jedes von 0 und 1 verschiedene, echt gebrochene $a$ die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{x + e^{\vartheta i}} = \pi \frac{e^{(a-1)\vartheta i}}{\sin a\pi}.$$

Dieses Integral verdient, ganz abgesehen von seiner Wichtigkeit für die später folgenden Untersuchungen, auch insofern ein grosses Interesse, weil es das erste Integral gewesen ist, das immer in geschlossener Form sich darstellen liess, obwohl für das unbestimmte Integral eine solche nur bei Voraussetzung eines rationalen $a$ möglich ist.

Den bei weitem interessantesten Fall, welcher aus der vorstehenden Gleichung entspringt, erhält man für $\vartheta = 0$; man bekommt so das äusserst wichtige Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{1 + x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

## §. 29.

### Das Integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1} - x^{m'-1}}{x^n - 1} dx.$

Bei unsern bisherigen Betrachtungen liessen wir das ursprüngliche $\vartheta$ nicht mit der Zahl $2\pi$ zusammenfallen; wir schlossen also den Fall $f(x) = x^n - 1$ von unserer Untersuchung aus. Lässt sich aber in keiner Weise ein Integral $\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx$ bilden, in welchem der Nenner $f(x)$ durch das Binom $x^n - 1$, in dem $n$ wieder gerade sein soll, vertreten wird? Wir müssen diese Frage bejahend beantworten. Denn setzt man $\varphi(x) = x^{m-1} - x^{m'-1}$, wo $m$ und $m'$ ungerade Zahlen vorstellen, so leuchtet auf den ersten Blick ein, dass jetzt das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1} - x^{m'-1}}{x^n - 1} dx$$

zu den angebbaren Grössen gehören wird. Und in der That folgt sogleich aus der Beziehung

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx = \pi i \sum \left[ \pm \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)} \right],$$

d. i. hier

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1} - x^{m'-1}}{x^n - 1} dx = \frac{\pi i}{n} \sum \pm \frac{\alpha^{m-1} - \alpha^{m'-1}}{\alpha^{n-1}}$$

wegen $\alpha = e^{\frac{2s\pi i}{n}}$ die andere

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1} - x^{m'-1}}{x^n - 1} dx = \frac{\pi i}{n} \left[ \sum_0^{\frac{n}{2}-1} e^{2\frac{m}{n} s\pi i} (1 - e^{m\pi i}) \right.$$

$$\left. - \sum_0^{\frac{n}{2}-1} e^{2\frac{m'}{n} s\pi i} (1 - e^{m'\pi i}) \right]$$

$$= \frac{4\pi i}{n} \left[ \frac{e^{-\frac{m'}{n}\pi i}}{2i \sin\frac{m'}{n}\pi} - \frac{e^{-\frac{m}{n}\pi i}}{2i \sin\frac{m}{n}\pi} \right],$$

d. h.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{m-1}-x^{m'-1}}{x^n-1}\,dx=\frac{2\pi}{n}\left[\operatorname{cotg}\frac{m'}{n}\pi-\operatorname{cotg}\frac{m}{n}\pi\right].$$

Hieraus aber fliesst weiter

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{m-1}-x^{m'-1}}{x^n-1}\,dx=\frac{\pi}{n}\left[\operatorname{cotg}\frac{m'}{n}\pi-\operatorname{cotg}\frac{m}{n}\pi\right],$$

eine Form, die durch die Substitution $y^{\frac{1}{n}}=x$ und nachherige Vertauschung von $\frac{1}{y-1}$ oder $\frac{1}{x-1}$ mit $-\frac{1}{1-x}$ in die folgende übergeht:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\frac{m}{n}-1}-x^{\frac{m'}{n}-1}}{1-x}\,dx=\pi\left[\operatorname{cotg}\frac{m}{n}\pi-\operatorname{cotg}\frac{m'}{n}\pi\right].$$

Bedeuten nun $a$ und $b$ von 0 und 1 verschiedene echte Brüche, so bleiben cotg $a\pi$ und cotg $b\pi$ stetig. Ausserdem aber ändert sich das Integral

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx$$

continuirlich mit $a$ und $b$. Denn bildet man z. B. das Integral

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx-\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{a-1}-x^{\alpha-1}}{1-x}\,dx,$$

in welchem $\alpha$ dem $a$ sich ins Unendliche nähern soll, und zerlegt das Integral in drei andere zwischen den Grenzen 0 und $\gamma$, $\gamma$ und $g$, $g$ und $\infty$, wo $\gamma<1$, $g$ aber $>1$; so folgt zunächst, dass einerseits

$$\int\limits_0^{\gamma}\frac{x^{a-1}-x^{\alpha-1}}{1-x}\,dx=R\int\limits_0^{\gamma}(x^{a-1}-x^{\alpha-1})\,dx=R\left[\frac{\gamma^a}{a}-\frac{\gamma^\alpha}{\alpha}\right],$$

andererseits hingegen

$$\int\limits_{\gamma}^{g}\frac{x^{a-1}-x^{\alpha-1}}{1-x}\,dx=\frac{\xi^{a-1}-\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}(g-\gamma)$$

ist, wenn $\xi$ einen Mittelwerth zwischen $\gamma$ und $g$ vorstellt.

Zwischen den Grenzen 0 und $g$ muss sonach, weil der Gedankengang in Bezug auf $b$ ganz ähnlich sich gestaltet, unser Integral in stetiger Weise von $a$ und $b$ abhängen.

Indem man jetzt weiter bedenkt, dass innerhalb des Intervalles von $g$ bis $\infty$ die Differenz $x^{a-2} - x^{a-2}$ niemals das Zeichen wechselt und dass der Factor $\frac{1}{\frac{1}{x} - 1}$ zwischen $g$ und $\infty$ nie unendlich wird, gewinnt man offenbar die Beziehung

$$\int_g^\infty \frac{x^{a-1} - x^{a-1}}{1-x}\, dx = R \int_g^\infty [x^{a-2} - x^{a-2}]\, dx.$$

Daraus aber folgt, wie man auch hier unmittelbar behaupten darf, die Stetigkeit des ursprünglichen Integrales zwischen $g$ und $\infty$ in Bezug auf $a$ und $b$.

Aus allem diesem ergiebt sich daher in bekannter Weise die Allgemeingültigkeit der Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\, dx = \pi\,[\operatorname{cotg} a\pi - \operatorname{cotg} b\pi], \quad \begin{matrix} 0 < a < 1, \\ 0 < b < 1. \end{matrix}$$

Setzt man in derselben $b = 1 - a$ voraus, so verwandelt sie sich in die folgende

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\, dx = 2\pi \operatorname{cotg} a\pi.$$

Hieraus aber schliesst man weiter, wenn man das Integral in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und 1, 1 und $\infty$ zerlegt und in dem zweiten der Theilintegrale $x$ mit $\frac{1}{x_1}$ vertauscht, dass

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\, dx = \pi \operatorname{cotg} a\pi$$

ist.

## II. Kapitel.

### Theorie der Euler'schen Integrale.

### §. 30.

#### Definition des Euler'schen Integrales erster Gattung.

Unsere vorhergehenden Entwicklungen haben uns namentlich die Kenntniss eines Integrales verschafft, das, wie wir bald sehen werden, für die jetzt folgenden Untersuchungen von wahrhaft fundamentaler Bedeutung ist. Wir meinen das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{1+x},$$

dessen Werth für $0 < a < 1$ bekanntlich $\frac{\pi}{\sin a\pi}$ heisst. Offenbar wird dasselbe als specieller Fall des Integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^c}$$

zu betrachten sein, wenn diesem ein völlig bestimmter Sinn beigelegt werden kann. Diese nöthige Vorfrage aber ist hier ohne Mühe zu beantworten. Denn augenblicklich erhellt, dass wegen der untern Grenze die Constante $a$ nothwendig grösser, als Null sein muss. Und bedenkt man nun, dass in dem Ausdruck

$$\frac{1}{(1+x)^c} = \frac{1}{x^c\left(1+\frac{1}{x}\right)^c} = \frac{x^{-c}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^c}$$

der Factor $\vartheta = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^c}$ für ein unendlich werdendes $x$ die Einheit zur Grenze hat; so kommt auch hier die Discussion des Integrales

$$\int \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^c} = \int x^{a-c-1}\, \vartheta\, dx$$

auf die Betrachtung des Integrales $\int x^{a-c-1}\, dx$ zurück. Integrirt man also unserm Fundamentalprincip zufolge von einem

beliebig grossen $p$ bis zu einem beliebig grössern $q$, so zeigt sich, dass mit wachsendem $p$ und $q$ das Integral

$$\int_p^q x^{a-c-1}\,dx = \frac{1}{a-c}\left[q^{a-c} - p^{a-c}\right]$$

und folglich auch $\int_p^q x^{a-c-1}\,\vartheta\,dx$ unter jede angebbare Grenze sinken wird, wenn $a - c$ negativ, somit $c > a$ ist. Schreiben wir daher $c = a + b$, so haben wir die Form

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}.$$

Nach Legendre's Vorgange belegen wir ein solches Integral mit dem Namen des „Euler'schen Integrales erster Gattung, erster Art", und wir werden dasselbe mit Binet durch das Symbol $B(a, b)$ andeuten, bemerken aber dabei, dass man sich auch der Schreibweise $\left(\frac{b}{a}\right)$ bedient.

## §. 31.

### Umformung von $B(a, b)$ mittelst Substitution; Beziehungen, die daraus erwachsen.*)

Setzt man in dem Integrale

$$B(a, b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}$$

statt $\frac{1}{1+x}$ die Grösse $1 - y$, d. h. $x = \frac{y}{1-y}$, so bekommt man, wenn nach vollzogener Substitution der Integrationsbuchstaben wieder $x$ genannt wird, die andere Form

---

*) Man vergl. J. Binet. Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes, et sur leur application à la théorie des suites, ainsi qu' à l'évaluation des fonctions des grands nombres in: Iournal de l'école polytechnique, cah. 27.

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.^{*})$$

Und hieraus folgt augenblicklich durch Vertauchung von $x$ mit $1 - x$

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1}dx = B(b,a).$$

Das Integral $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ hängt sonach symmetrisch von den Parametern $a$ und $b$ ab, obgleich der zu integrirende Ausdruck keineswegs eine symmetrische Function von ihnen vorstellt.

Weniger einfach würde man dieses Fundamentaltheorem erzielt haben, wenn man in $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ die Variabele $x = \frac{1+y}{2}$ gesetzt hätte; indess bietet diese Substitution noch den andern, hier zu berührenden Vortheil, dass man mittelst derselben ohne Mühe die Berechnung der Function $B(b, b)$ auf die des Integrales $B\left(\frac{1}{2}, b\right)$ zurückzuführen vermag. Denn man hat

$$B(a, b) = \frac{1}{2^{a+b-1}}\int_{-1}^{1}(1+y)^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy$$

$$= \frac{1}{2^{a+b-1}}\left\{\int_0^1(1+y)^{a-1}(1-y)^{b-1}dy + \int_0^1(1-y)^{a-1}(1+y)^{b-1}dy\right\},$$

---

*) Hätte man das Integral $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}$ mittelst der einfacheren Substitution $\frac{1}{1+x} = y$, d. h. $x = \frac{1-y}{y}$ umgeformt, so hätte man das Integral $\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1}\,dx$, d. i. nach Binet's Schreibweise $B(b,a)$ gefunden. Das Integral $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}}$ müsste hiernach zunächst bei Anwendung der Binet'schen Bezeichnung durch $B(b, a)$ vorgestellt werden. Der Vergleich beider Substitutionsresultate aber zeigt dann, dass $B(a, b) = B(b, a)$ ist. Uebrigens lässt sich aus $B(b, a)$ sofort $B(a, b)$ durch Vertauschung von $x$ mit $1 - x$ erzielen.

und daher ist für $a = b$

$$B(b, b) = \frac{1}{2^{a+b-2}} \int_0^1 (1 - y^2)^{b-1}\, dy.$$

Das Integral rechts aber nimmt für $y^2 = u$ die Form $\frac{1}{2}\int_0^1 (1 - u)^{b-1}\, u^{\frac{1}{2}-1}\, du$ an, und folglich ergiebt sich der von Legendre gefundene Satz

$$B(b, b) = \frac{1}{2^{2b-1}}\, B\left(\frac{1}{2}, b\right).$$

Eine andere interessante Eigenschaft der Function $B(a, b)$ gewinnt man durch folgende Betrachtung. Addirt man nämlich die beiden Integrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1 + x)^{a+b}}$ und $\int_0^\infty \frac{x^{b-1}\, dx}{(1 + x)^{a+b}}$, so kommt

$$B(a, b) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{a-1} + x^{b-1}}{(1 + x)^{a+b}} \cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^{a-1} + x^{b-1})\, dx}{(1 + x)^{a+b}}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{(x^{a-1} + x^{b-1})\, dx}{(1 + x)^{a+b}}.$$

Jedes von diesen Integralen aber geht in das andere über, wenn man in ihm $x$ mit $\frac{1}{t}$ vertauscht. Und demnach entspringt die Gleichung

$$B(a, b) = \int_1^\infty \frac{x^{a-1} + x^{b-1}}{(1 + x)^{a+b}} \cdot dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1} + x^{b-1}}{(1 + x)^{a+b}} \cdot dx,$$

die von Euler für den Fall $a + b = 1$ gefunden*), von Legendre aber als allgemeingültig erkannt wurde.

---

*) Also $\int_0^1 \frac{x^{a-1} + x^{-a}}{1 + x}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} = \int_1^\infty \frac{x^{a-1} + x^{-a}}{1 + x}\, dx.$

Vergl. §. 29.

Schreibt man endlich in $B(a, b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1 + x)^{a+b}}$ statt $x$ $e^{2u}$, so folgt

$$B(a, b) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2au}\, du}{(1 + e^{2u})^{a+b}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(a-b)u}\, du}{(e^u + e^{-u})^{a+b}}$$

$$= 2 \int_0^\infty \frac{e^{(a-b)u} + e^{(b-a)u}}{(e^u + e^{-u})^{a+b}}\, du.$$

Mithin ergiebt sich für $a = t + r$, $b = t - r$

$$B(t + r, t - r) = 2 \int_0^\infty \frac{e^{2ru} + e^{-2ru}}{(e^u + e^{-u})^{2t}}\, du.$$

## §. 32.

**Theoreme, welche aus der Aenderung der Argumente $a$ und $b$ um ganze Zahlen entspringen.**

Unterwerfen wir das Integral

$$B(a, b + 1) = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^b\, dx$$

der theilweisen Integration, so gewinnen wir den Satz

1. $$B(a, b + 1) = \frac{b}{a} B(a + 1, b).$$

Andererseits aber ist

$$\int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^b\, dx = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\, dx - \int_0^1 x^a (1 - x)^{b-1}\, dx,$$

d. h.

$$B(a, b + 1) = B(a, b) - B(a + 1, b),$$

und daher entspringt der Gleichung 1. zufolge die neue Beziehung

2. $$B(a, b) = \frac{a + b}{a} B(a + 1, b)$$

Da diese Formel für jedes positive $a$ und $b$ Geltung besitzt, so kann man dieselbe wiederholt in Anwendung bringen.

Bezeichnet mithin $n$ eine ganze Zahl, so hat man das schon seit Stirling bekannte Theorem*)

$$3.\quad B(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)\ldots(a+b+n-1)}{a.(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)} B(a+n,b).$$

Indem man hierin $a = 1$ setzt und bedenkt, dass

$$B(1,b) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{1-1}\,dx = \frac{1}{b},$$

gewinnt man noch die Beziehung

$$B(b, n+1) = \frac{1.2.3\ldots n}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n)},$$

also

$$4.\quad B(b,n) = \frac{1.2.3\ldots\ldots n-1.}{b.(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)},$$

eine Formel, welche von Wallis gefunden ist.*)

Vermöge der Gleichung 3. kann nicht nur die Function $B(a+n,b)$ auf das Integral $B(a,b)$ zurückgeführt werden, sondern auch für $B(a+n, b+h)$ ist dies möglich, sofern $h$ gleichfalls eine ganze Zahl ausdrückt. Denn man hat zunächst

$$B(a,b+h) = \frac{(a+b+h)(a+b+h+1)\ldots\ldots(a+b+h+n-1)}{a(a+1)(a+2)(a+3)\ldots\ldots(a+n-1)} B(a+n,b+h),$$

anderseits aber ist ebenfalls nach 3.

$$B(b+h,a) = \frac{b(b+1)(b+2)(b+3)\ldots(b+h-1)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)\ldots(a+b+h-1)} B(a,b),$$

mithin schliesslich durch Verbindung beider Relationen

$$5.\quad B(a+n,b+h)$$
$$= \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1).b(b+1)(b+2)\ldots(b+h-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+h-1)(a+b+h)(a+b+h+1)\ldots(a+b+h+n-1)} B(a,b)$$

Diese Gleichung aber kann wiederum zur Darstellung eines Abhängigkeitsverhältnisses der Function $B(a-n, b-h)$ von $B(a,b)$ dienen, vorausgesetzt natürlich, dass $a-n$ und $b-h$ grösser, als Null sind. In der That erhält man sofort

$$B(a-n, b-h)$$
$$= B(a,b)\frac{(a-n+b-h)(a-n+b-h+1)\ldots\ldots(a-n+b)\ldots(a+b-1)}{(a-n)(a-n+1)\ldots\ldots(a-1)(b-h)\ldots\ldots\ldots(b-1)}$$
$$= \frac{(a+b-1)(a+b-2)\ldots\ldots(a+b-h-n)}{(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n)(b-1)(b-2)\ldots(b-h)} B(a,b).$$

*) Vergl. J. Binet. Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes etc. in: Journal de l'école polytechnique, cah. 27, p. 138.

Ganz ebenso einfach wird endlich aus Gleichung 3. diese entspringen:

6. $B(a+n+h, b-h)$

$$= B(a,b) \frac{a.(a+1)\ldots\ldots(a+n+h-1)}{(b-1)(b-2)\ldots(b-h)(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+n-1)}$$

wo $n$ und $h$ selbstverständlich ganze Zahlen bezeichnen; denn man hat nach und nach:

$$B(a+n+h,b-h) = \frac{(a+h)\ldots(a+h+n-1)}{(a+b)\ldots(a+b+n-1)} B(a+h,b-h),$$

$$B(a+h,b-h) = \frac{a.(a+1)\ldots(a+h-1)}{(a+b-h)\ldots(a+h+b-h-1)} B(a,b-h)$$

und

$$B(a,b-h) = \frac{(a+b-h)(a+b-h+1)\ldots(a+b-h+h-1)}{(b-h)(b-h+1)\ldots(b-h+h-1)} B(a,b).$$

## §. 33.

### Darstellung von $B(a, b)$ durch ein unendliches Product.

Der natürlichste Weg, welcher sich jetzt zum Zwecke weiterer Untersuchungen darbietet, ist offenbar der, nachzusehen, was aus der Gleichung

$$B(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)\ldots\ldots(a+b+n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1)} B(a+n,b)$$

wird, wenn man sich das $n$ wachsend denkt. So würde augenscheinlich unsere Function $B(a, b)$ durch ein unendliches Product dargestellt werden, falls der Ergänzungsfactor $B(a+n,b)$ $= \int_0^1 (1-x)^{b-1} x^{a+n-1} dx$ mit unaufhörlich wachsendem $n$ der Einheit sich näherte; allein eine leichte Untersuchung zeigt, dass in dieser Weise eine Vereinfachung der genannten Art bei $B(a, b)$ nicht erzielt wird.

Beachtet man nämlich, dass $x$ zwischen 0 und 1 sich befindet, so muss offenbar die Differenz

$$B(m', b) - B(m, b) = \int_0^1 (1-x)^{b-1} x^{m'-1} (1-x^{m-m'}) dx$$

der beiden Integrale $B(m', b)$ und $B(m, b)$ positiv sein, wenn $m > m'$. Wächst also das eine Argument der Function $B(a, b)$, so nimmt das Integral ab und folglich muss mit unendlich wachsendem $n$ das Integral

$$B(a+n, b) = \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a+n-1} dx$$

die Null zur Grenze haben.

Nun folgt aber noch aus $B(m', b) > B(m, b)$, dass

$$\frac{B(m', b)}{B(m, b)} > 1.$$

Sollte es daher nicht möglich sein, dass für unendlich werdende $m'$ und $m$ der Quotient $\frac{B(m', b)}{B(m, b)}$ von 1 um weniger als eine noch so kleine Grösse verschieden ist? Wäre dies etwa der Fall, so würde offenbar der Quotient

$$\frac{B(a, b)}{B(a', b)} = \frac{a'(a+b) \ldots . (a'+n-1)(a+b+n-1)}{a(a'+b) \ldots . (a+n-1)(a'+b+n-1)} \frac{B(a+n, b)}{B(a'+n, b)}$$

augenblicklich als unendliches Product sich darstellen lassen.

Ein solches Verhältniss aber findet in der That hier Statt. Denn lassen wir die Grössen $m'$ und $m$ so wachsen, dass stets $m'+h > m$ ist, wo $h$ eine constante ganze Zahl ausdrückt; so hat man

$$\frac{B(m'+h, b)}{B(m, b)} < 1.$$

Für $B(m', b)$ aber gilt jetzt die Gleichung

$$B(m', b) = \frac{(m'+b) \ldots \ldots (m'+b+h-1)}{m' \ldots \ldots \ldots (m'+h-1)} \cdot B(m'+h, b),$$

und hieraus entspringt, da $h$ constant bleiben soll,

$$B(m'+h, b) = \sigma\, B(m', b),$$

wo $\sigma$ ersichtlich einen der Einheit sich nähernden echten Bruch bezeichnet. Mit Benutzung dieser Relation aber geht aus der Ungleichheit

$$\frac{B(m'+h, b)}{B(m, b)} < 1$$

unmittelbar die andere hervor

$$\frac{B(m', b)}{B(m, b)} < \frac{1}{\sigma},$$

und somit hat man die Beziehung

$$\frac{1}{\sigma} > \frac{B(m', b)}{B(m, b)} > 1.$$

Daher ist schliesslich

$$\lim \frac{B(m', b)}{B(m, b)} = 1.$$

Mithin besteht wirklich die Gleichung

$$\frac{B(a,b)}{B(a',b)} = \frac{a'(a+b)(a'+1)(a+b+1)(a'+2)(a+b+2)\ldots\ldots}{a(a'+b)(a+1)(a'+b+1)(a+2)(a'+b+2)\ldots\ldots} \text{ in inf.}$$

Indem man aber hierin $a' = 1$ setzt, entspringt wegen $B(1,b) = \frac{1}{b}$:

$$B(a,b) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1(a+b)}{a(b+1)} \cdot \frac{2(a+b+1)}{(a+1)(b+2)} \cdots\cdots\cdots$$

Weil aber vorstehende Gleichung für jedes positive $a$ und $b$ Geltung besitzt, so darf man auch statt $a$ $a+1$ schreiben. Wird diese Substitution vollzogen, so kommt

$$B(a+1,b) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1(a+b+1)}{(a+1)(b+1)} \cdot \frac{2(a+b+2)}{(a+2)(b+2)} \cdots\cdots,$$

und hieraus fliesst in Folge der Relation $B(a,b) = \frac{a+b}{b} B(a+1,b)$ sogleich wieder die schon von Euler gekannte Gleichung

$$B(a,b) = \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{1(a+b+1)}{(a+1)(b+1)} \cdot \frac{2(a+b+2)}{(a+2)(b+2)} \cdots\cdots$$

Elegant lässt dieselbe sich darstellen, sofern man das Productenzeichen in Anwendung bringt; man erhält so

$$B(a,b) = \frac{a+b}{ab} \prod_{1}^{\infty} \frac{s(a+b+s)}{(a+s)(b+s)}.$$

## §. 34.

### Definition der Gammafunction.

Schon die nächstfolgende Untersuchung wird lehren, in welch' innigem Zusammenhang das Euler'sche Integral der ersten Art mit dem der zweiten Gattung, der sogenannten Gammafunction steht. Man begreift hierunter nach Legendre ein Integral von der Form $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$ und bezeichnet dasselbe mit dem genannten Forscher gewöhnlich durch das Symbol $\Gamma(a)$.

Wie aus den Elementen bekannt ist, lässt ein solches Integral unbestimmt nur für ein ganzes $a$ sich integriren. Soll für irgend ein $a$ dasselbe zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ genommen werden, so ist offenbar vorher zu entscheiden, ob ein derartiges Beginnen nicht auf Ungereimtheiten führt.

Diese Frage beantwortet sich für die obere Grenze sofort, wenn man nur erwägt, dass wegen $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$ die Grösse $e^{-x}$ kleiner ist, als eine Constante, dividirt durch jede noch so hohe Potenz von $x$; es wird folglich für die obere Grenze das Integral nicht sinnlos. Dagegen muss wegen der Grenze Null die Constante $a$ wesentlich positiv sein, weil — wie unmittelbar einleuchtet — für $a \overline{\gtrless} 0$ das Integral einen unendlich grossen Werth darbieten würde.

Leicht würde es nun sein, schon jetzt einige Eigenschaften dieser äusserst wichtigen Gammafunction abzuleiten; wir beschränken uns jedoch vorläufig auf die Bemerkung, dass man nach Gauss das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, dx$ zweckmässiger durch $\Pi(a-1)$ bezeichnet, dass aber diese Bezeichnungsweise nicht eine so grosse Verbreitung als die Legendre'sche gefunden hat.

## §. 35.

**Darstellung von $B(a+n,\, b)$ durch $m^{-b}\,\Gamma(b)$ für ein unendlich grosses $n$.**

In §. 33 erwähnten wir, dass der Ergänzungsfactor $B(a+n,\, b)$ der Gleichung

$$B(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)\ldots\ldots(a+b+n-1)}{a(a+1)\ldots\ldots\ldots(a+n-1)}\, B(a+n, b)$$

für ein ins Unendliche wachsendes $n$ der Null sich nähert. Nur dies ist nicht klar geworden, wie die Annäherung an Null geschieht. Um hierüber jetzt Aufschluss zu erlangen, setzen wir der Kürze halber $a + n - 1 = m$ und substituiren in dem Integrale

$$B(a+n,\, b) = \int\limits_0^1 x^{b-1}\,(1-x)^m\, dx$$

statt $x$ die Grösse $\frac{z}{m}$. Dadurch gewinnen wir die Form

$$B(a+n,\, b) = m^{-b} \int\limits_0^m z^{b-1} \left(1 - \frac{z}{m}\right)^m dz.$$

Wäre nun hierin $z$ von $m$ unabhängig, so würde für ein un-

endlich grosses $m$ der Ausdruck $\left(1 - \frac{z}{m}\right)^m$ offenbar mit $e^{-z}$ gleichbedeutend und sonach

$$B(a + n, b) = m^{-b} \, \Gamma(b)$$

sein. Obwohl nun von einer derartigen Substitution unmittelbar nicht die Rede sein kann, so lässt sich doch fragen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn für ein mit $m$ veränderliches $z$ die Potenz $\left(1 - \frac{z}{m}\right)^m$ der Exponentialgrösse $e^{-z}$ gleichgesetzt werden soll.

Diese Frage wollen wir in dem folgenden Paragraphen zu beantworten versuchen.

## §. 36.

**Bedingung, unter welcher $\lim \left(1-\frac{z}{m}\right)^m = e^{-z}$ gesetzt werden darf.**

Bekanntlich lässt sich jede zweitheilige Grösse $1 - u$, in der $u$ einen positiven echten Bruch bezeichnet, durch einen Ausdruck von folgender Form darstellen:

$$e^{\lg(1-u)} = e^{-\frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \cdots\cdots}$$

Nennen wir nun der Kürze halber die Summe

$$\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \cdots\cdots = U,$$

so ist offenbar

$$U > \frac{u^2}{2} \text{ und } < \frac{u^2}{2}(1 + u + u^2 + u^3 + \ldots.) = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{1-u}.$$

Daraus folgt, dass für $u < \frac{1}{2}$ die Grösse $U$ zwischen $u^2$ und $\frac{u^2}{2}$ sich befindet und demnach $= \vartheta \, u^2$ gesetzt werden kann, wenn $\vartheta$ einen zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegenden Factor ausdrückt.

Ist mithin $\frac{z}{m} = u < \frac{1}{2}$, d. h. ist $z < \frac{m}{2}$, so dürfen wir stets die Gleichung bilden

$$\left(1 - \frac{z}{m}\right)^m = e^{-z-\vartheta\frac{z^2}{m}}.$$

Hieraus aber ergiebt sich sofort, dass wie beim constanten $z$

$\lim\left(1 - \frac{z}{m}\right)^m = e^{-z}$ Statt finden wird, wenn nur das hier veränderliche $z$ langsamer als $\sqrt{m}$ wächst, also $\lim \frac{z^2}{m} = 0$ wird. Dagegen nähert sich der Factor $e^{-\vartheta \frac{z^2}{m}}$ einer von der Einheit verschiedenen Grenze, sofern $\lim \frac{z^2}{m} = \infty$ ist, oder wenn $\frac{z^2}{m}$ einen endlichen Werth, was z. B. für $z = \frac{1}{3}\sqrt{m} - 3$ eintritt, erwirbt. In allen Fällen aber ist $\left(1 - \frac{z}{m}\right)^m$ nie grösser, als $e^{-z}$, selbst wenn $z$ bis $m$ geht.

## §. 37.

### Untersuchung des Integrales $\int_0^m z^{b-1}\left(1 - \frac{z}{m}\right) dz$.

Die vorhergehende Betrachtung liefert uns augenblicklich das Mittel, eine genaue Kenntniss des früher gewonnenen Integrales $\int_0^m z^{b-1}\left(1 - \frac{z}{m}\right)^m dz$ uns zu erwerben. Dabei ist indess der Umstand nicht zu übersehen, dass nicht für das ganze Intervall von 0 bis $m$ unsere Annahme $z < \frac{m}{2}$ befriedigt wird und sonach auch nicht unmittelbar $\left(1 - \frac{z}{m}\right) = e^{-z-\vartheta \frac{z^2}{m}}$ gesetzt werden kann. Zerlegt man aber das Integral in eines von 0 bis $p$ und in ein anderes zwischen den Grenzen $p$ und $m$ und setzt zugleich voraus, dass die zwischen 0 und $m$ befindliche Zahl $p$ stets die Bedingung $\lim \frac{p^2}{m} = 0$ erfüllt; so darf man offenbar

$$\int_0^p z^{b-1}\left(1 - \frac{z}{m}\right)^m dz \text{ mit } \int_0^p z^{b-1} e^{-z-\vartheta \frac{z^2}{m}} dz$$

identificiren, während man für das Integral von $p$ bis $m$ sogleich die Beziehung

$$\int_p^m z^{b-1}\left(1 - \frac{z}{m}\right)^m dz < \int_p^m e^{-z} z^{b-1} dz$$

gewinnt. Und nennt man nun $M$ den zwischen dem Maximum und Minimum von $e^{-\vartheta \frac{z^2}{m}}$ innerhalb des Intervalles von 0 bis $p$ befindlichen Factor, welcher der Gleichung $\lim e^{-\vartheta \frac{z^2}{m}} = 1$ zufolge mit wachsendem $p$ und $m$ gleichfalls der Einheit sich nähern wird; so ist in aller Strenge

$$\int_0^m z^{b-1} \left(1 - \frac{z}{m}\right)^m dz = \Gamma(b)\,(1 + \varepsilon)$$

zu setzen, wo mit wachsendem $p$ $\varepsilon$ die Null zur Grenze hat.

Für das zweite Integral hingegen hat man augenscheinlich die Gleichung

$$\lim \int_p^m z^{b-1} \left(1 - \frac{z}{m}\right)^m dz = 0.$$

Da nun $B(a + n, b) = m^{-b} \int_0^m z^{b-1} \left(1 - \frac{z}{m}\right)^m dz$ gefunden wurde; so wird jetzt in völliger Strenge die Beziehung bestehen

$$B(a + n, b) = m^{-b}\, \Gamma(b)\,(1 + \varepsilon).$$

## §. 38.

### Darstellung der Gammafunction durch ein unendliches Product.

Setzen wir nunmehr in der Gleichung

$$B(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)\ldots\ldots(a+b+n-1)}{a.(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1)}\, m^{-b}\, \Gamma(b), n = \infty$$

$a = 1$, so entspringt

$$\Gamma(b) = \frac{1.2.3\ldots\ldots n.m^b}{b.(b+1)\ldots\ldots(b+n)}, \; n = \infty.$$

Beachtet man aber, dass im Unendlichen $m = a + n - 1$ und $n$ das Verhältniss der Gleichheit besitzen*), so kann man auch schreiben

$$1. \qquad \Gamma(b) = \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{b(b+1)\ldots\ldots(b+n)}\, n^b, \; n = \infty.$$

*) Unter dieser Ausdrucksweise verstehen wir die Beziehung

$$\lim \frac{a + n - 1}{n} = 1.$$

Diese Gleichung, welche also $\Gamma(b)$ durch eine unendliche Factorenfolge darzustellen lehrt, bildet eine der schönsten und frühesten Entdeckungen Euler's. In einem an Goldbach gerichteten Schreiben vom 13. October 1729*) theilt er nämlich ohne irgend eine weitere Auseinandersetzung den ins Unendliche verlaufenden Ausdruck

$$\frac{1^{1-b}\,.\,2^b}{1+b}\cdot\frac{2^{1-b}\,.\,3^b}{2+b}\cdot\frac{3^{1-b}\,.\,4^b}{3+b}\cdots\cdots$$

als Lösung einer Interpolationsaufgabe mit, und in diesem Sinne wurde dies Product auch von Euler zuerst im 2. Bande, Kap. 17 seiner Differentialrechnung bekannt gemacht. Dass jenes unendliche Product aber nur eine veränderte Form des obigen ausdrückt, ist leicht zu sehen; denn, da in der Unendlichkeit $n^b$ mit $(n+1)^b$ vertauscht werden darf, so erhält man sogleich, wenn $(n+1)^b = \left(\frac{2}{1}\right)^b\left(\frac{3}{2}\right)^b\left(\frac{4}{3}\right)^b\cdots\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^b$ geschrieben wird,

$$\Gamma(b+1)=\frac{1^{1-b}\,.\,2^b}{1+b}\cdot\frac{2^{1-b}\,.\,3^b}{2+b}\cdot\frac{3^{1-b}\,.\,4^b}{3+b}\cdots\frac{n^{1-b}\,(n+1)^b}{n+b},\ n=\infty.$$

Auch Gauss ist in seinen berühmten Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe auf die Gleichung 1 geführt worden und hat sie zur Definition der Gammafunctionen benutzt, ein Verfahren, das ohne Zweifel bei der Betrachtung der Gammafunctionen an sich vor jeder andern Erklärung derselben den Vorzug verdient. Denn sie bietet vor allem den Vortheil, dass für negative gebrochene Argumente die Function Gamma nun nicht aufhört, eine bestimmte endliche Grösse zu sein. Es lässt sich nämlich sogleich zeigen, dass Gleichung 1 für $b-1$ noch Geltung besitzen muss, sofern sie nur für irgend ein Argument $b$ nicht ohne Bedeutung ist.

In der That, aus 1 ergiebt sich sofort

$$\Gamma(b)=\frac{1}{b}\cdot\frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,n}{(b+1)\,(b+2)\ldots\ldots(b+n-1)}\cdot\frac{n^b}{n+b},\ n=\infty.$$

Da nun im Unendlichen zwischen $n$ und $n+b$ zuletzt das Verhältniss der Gleichheit besteht, so hat man auch

---

*) Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle etc. par P. H. Fuss. Tome I., page 3. St. Pétersbourg 1843.

$$\Gamma(b) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots \cdot n}{(b+1)(b+2) \ldots \ldots (b+n-1)} n^{b-1}, \ n = \infty,$$

d. h.

$$1. \quad \Gamma(b) = (b-1)\,\Gamma(b-1).$$

Oben aber wurde gezeigt, dass unter Voraussetzung eines positiven $b$ für ein ohne Aufhören wachsendes $n$ die Gleichung 1. wirklich zum Vorschein kommt, mithin muss nun vermöge der Beziehung $\Gamma(b-1) = \frac{\Gamma(b)}{b-1}$ auch $\Gamma(b-1)$ noch dann eine bestimmte Grösse ausdrücken, wenn $b$ einen positiven echten Bruch bedeutet. Daraus aber fliesst immer mit Berücksichtigung der Relation J. sogleich weiter, dass überhaupt für ein gebrochenes negatives Argument die Function $\Gamma(b)$ nicht ohne Bedeutung ist, sofern ihre Definition durch die Gleichung

$$1. \quad \Gamma(b) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots n}{(b+1)(b+2) \ldots \ldots (b+n)} \cdot n^b, \ n = \infty$$

gegeben wird.

Bezeichnet hingegen $b$ eine negative ganze Zahl oder die Null, so muss in Uebereinstimmung mit unserer ursprünglichen Erklärung der Gammafunction als bestimmtes Integral auch hier $\Gamma(b)$ eine unendliche Grösse vorstellen.

## §. 39.

### Fundamentaltheoreme über Gammafunctionen, gestützt auf Gleichung 1.

1. Vorhin haben wir mittelst der Definitionsgleichung 1. in höchst einfacher Weise das Theorem

$$1. \qquad a\,\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$$

entwickelt. Ausser diesem bestehen aber noch zwei andere Fundamentaleigenschaften der Gammafunction, die wir jetzt erörtern wollen.

2. Bedenken wir zunächst, dass dem Vorhergehenden zufolge für $\Gamma(a)$ die Gleichung Statt findet

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots n}{(a+1)(a+2) \ldots \ldots (a+n)} n^a (1 + \varepsilon_n),$$

wo $\varepsilon_n$ mit wachsendem $n$ verschwindet; so wird offenbar

$$\Gamma(1-a) = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}{(2-a)(3-a)\ldots\ldots(n+1-a)} n^{1-a} (1+\varepsilon'_n),$$

wo ebenfalls wieder $\lim \varepsilon'_n = 0$.

Multiplicirt man nun beide Gleichungen mit einander, so kommt

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)$$

$$= \frac{1^2 . 2^2 3.^2 \ldots . n^2}{a(1^2-a^2)(2^2-a^2)\ldots.(n^2-a^2)} \cdot \frac{n}{n+1-a} (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon'_n)$$

$$= \frac{(1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon'_n)}{a\left(1-\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)} \frac{1}{1+\frac{1-a}{n}}$$

Diese Beziehung aber vereinfacht sich für $n = \infty$; denn in diesem Falle wird

$$\lim (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon'_n) \cdot \frac{1}{1+\frac{1-a}{n}} = 1,$$

und $a\left(1-\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)$ geht mit Benutzung der bekannten Formel

$$\frac{\sin z}{z} = \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

in den Ausdruck $\frac{1}{\pi} \sin a\pi$ über.*) Für beliebige reelle Werthe von $a$ gilt daher die zweite Eigenschaft der Gammafunction

II. $$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Zwar ist dieselbe für ein ganzes $a$ und $a = 0$ ohne eigentliche Bedeutung, weil ihre beiden Seiten auf das Unendlichgrosse führen, indess kann man der Analogie zufolge auch für diesen Fall die Gleichung II. als richtig ansehen, nur muss man sich hüten, bei der Form $\infty = \infty$ an eine wirkliche Gleichheit zu denken.

---

*) Vergl. §. 83, 5.

3. Bezeichnen $r$ und $m$ ganze positive Zahlen, so ist

$$\Gamma\left(a+\frac{r}{m}\right)=\frac{1.2.3\ldots\ldots n.n^{a+\frac{r}{m}-1}}{\left(a+\frac{r}{m}\right)\left(a+\frac{r}{m}+1\right)\ldots\ldots\left(a+n+\frac{r}{m}-1\right)}(1+\varepsilon_n)$$

$$=\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots n.m^n}{(ma+r)(ma+r+m)\ldots(ma+mn+r-m)}\, n^{a+\frac{r}{m}-1}(1+\varepsilon_n)$$

Daraus folgt, wenn $r=0, 1, \ldots\ldots m-1$ gesetzt wird und sämmtliche Gleichungen mit einander multiplicirt werden,

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)$$

$$=\frac{(1.2.3\ldots\ldots n)^m.m^{mn}.n^{ma-\frac{m+1}{2}}}{ma\cdot(ma+1)\ldots\ldots\ldots(ma+mn-1)}(1+\delta_n);$$

$\delta_n$ bedeutet hierbei selbstverständlich wieder eine Grösse, welche mit wachsendem $n$ der Grenze Null sich nähert.

Nehmen wir nun andererseits $ma$ als Argument der Function Gamma und schreiben wir $mn$ statt des beliebigen $n$, so erhalten wir die Beziehung

$$\Gamma(ma)=\frac{1.2\ldots\ldots mn}{ma(ma+1)\ldots.(ma+mn-1)}(mn)^{ma-1}(1+\delta_n'),\ \lim\delta_n'=0.$$

Diese Gleichung aber mit der vorhergehenden verbunden zeigt sofort, dass

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)}{m^{-ma}\,\Gamma(ma)}$$

$$=\frac{(1.2.3\ldots\ldots n)^m}{1.2.3\ldots\ldots mn}m^{mn+1}\frac{1}{n^{\frac{m-1}{2}}}(1+\delta_n''),\ \lim\delta_n''=0$$

sein wird. Es fragt sich daher bloss noch, welchen Werth wir dem Ausdrucke

$$\frac{(1.2.3\ldots\ldots n)^m}{1.2.3\ldots\ldots mn}m^{mn+1}\frac{1}{n^{\frac{m-1}{2}}}$$

für ein unendliches $n$ beizulegen haben. Denn dass diese Grösse mit wachsendem $n$ einer Grenze $\varphi(m)$ sich nähern muss, sofern wenigstens keines der Argumente $a, a+\frac{1}{m}, \ldots$

mit Null oder einer negativen ganzen Zahl zusammenfällt, leuchtet unmittelbar ein.

Der einfachste Weg, diese Grenze $\varphi(m)$ zu entdecken, aber besteht in Folgendem. Setzt man nämlich $a = \frac{1}{m}$ und beachtet, dass $\Gamma(1)$ ersichtlich $= 1$; so hat man zunächst

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{\varphi(m)}{m}.$$

Und schreibt man mit Gauss die Gleichung nochmals, indem man die Ordnung der Gammafunctionen umkehrt; so bekommt man aus dieser neuen und der vorhergehenden Gleichung die andere

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)$$
$$= \left[\frac{\varphi(m)}{m}\right]^2.$$

Mit Benutzung des Theoremes II. aber heisst dies

$$\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}\cdots\cdots\frac{\pi}{\sin\frac{m-1}{m}\pi} = \frac{\pi^{m-1}}{\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\cdots\cdots\sin\frac{m-1}{m}\pi}$$
$$= \left[\frac{\varphi(m)}{m}\right]^2.$$

Nun ist bekanntlich

$$\prod_1^{m-1}\sin\frac{s\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}\text{ *)}$$

---

*) Sei $x^m - 1 = 0$, so wird der Ausdruck

$$x = \cos\frac{2s\pi}{m} + i\sin\frac{2s\pi}{m} = e^{\frac{2s\pi}{m}i}$$

die $m$ Wurzeln der vorgelegten binomischen Gleichung liefern, wenn für $s$ irgend $m$ auf einander folgende ganze Zahlen gewählt werden. Setzen wir demnach $s = 0, 1, 2, \ldots m-1$, und beachten wir, dass die Wurzel $x = 1$ für $s = 0$ erscheint; so stellt offenbar für $s = 1, 2, \ldots m-1$ $e^{\frac{2s\pi}{m}i}$ die Wurzeln der Gleichung

$$X = \frac{x^m - 1}{x - 1} = 0$$

vor, d. h.

und demnach

$$\frac{\pi^{m-1}}{\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\cdots\cdots\sin\frac{m-1}{m}\pi} = \frac{(2\pi)^{m-1}}{m} = \left[\frac{\varphi(m)}{m}\right]^2,$$

also, da $\varphi(m)$ nur positiv sein kann,

$$\varphi(m) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}}.$$

Weil nun allgemein

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)=\varphi(m)m^{-ma}\Gamma(ma),$$

so hat man jetzt das wichtige, von Gauss zuerst entdeckte Theorem

$$\text{III.}\quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)$$
$$= (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{-ma+\frac{1}{2}}\Gamma(ma).\text{*)}$$

$$X = \prod_1^{m-1}\left(x - e^{\frac{2s\pi}{m}i}\right).$$

Wird hierin $x=1$ gesetzt, so folgt nun wegen $X=1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}=m$ die Beziehung

$$m = \prod_1^{m-1}\left(1 - e^{\frac{2s\pi}{m}i}\right)$$

oder

$$m = \prod_1^{m-1}\left(1-\cos\frac{2s\pi}{m}-i\sin\frac{2s\pi}{m}\right)=\prod_1^{m-1} 2\sin\frac{s\pi}{m}\left[\sin\frac{s\pi}{m}-i\cos\frac{s\pi}{m}\right]$$
$$= (-2i)^{m-1}\prod_1^{m-1}\sin\frac{s\pi}{m}\cdot e^{\frac{s\pi}{m}i}.$$

Aber

$$\prod_1^{m-1} e^{\frac{s\pi}{m}i} = e^{\frac{\pi}{m}i(1+2+3+\dots+m-1)} = \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{m-1} = (+i)^{m-1},$$

daher

$$\prod_1^{m-1}\sin\frac{s\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}.$$

*) Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+$ etc. Nr. 26, formula 57, (Gauss Werke. Bd. 3.)

4. Bei der Bestimmung des Grenzausdruckes $\varphi(m)$ haben wir mit Gauss und Legendre*) auf die in II. ausgedrückte Fundamentaleigenschaft der Gammafunction uns berufen. Eine derartige Benutzung ist indess keineswegs erforderlich, wie wir nun nach Serret's Vorgange zu zeigen versuchen wollen**).

Setzt man der Kürze halber

$$\psi(n) = \frac{1.2.3\ldots.n}{n^{n+\frac{1}{2}}},$$

so lässt sich die Grenzgleichung

$$\varphi(m) = \lim \frac{(1.2.3\ldots.n)^m}{1.2.3\ldots.mn} \frac{m^{mn+1}}{n^{\frac{m-1}{2}}}$$

augenscheinlich in folgender Form darstellen:

$$\varphi(m) = \sqrt{m} \lim \frac{[\psi(n)]^m}{\psi(nm)} = A_m \sqrt{m}.$$

Weil aber die ganze Zahl $n$ nur unendlich gross werden soll, sonst aber willkürlich ist, so müssen offenbar auch folgende Gleichungen bestehen

$$A_m = \lim \frac{[\psi(2n)]^m}{\psi(2nm)},$$

$$A_m = \frac{A_m^2}{A_m} = \lim \frac{[\psi(n)]^{2m}}{[\psi(nm)]^2} : \lim \frac{[\psi(2n)]^m}{\psi(2mn)}$$

$$= \lim \left[\frac{[\psi(n)]^2}{\psi(2n)}\right]^m : \lim \frac{[\psi(nm)]^2}{\psi(2nm)}.$$

Nun ist für $m = 2$

$$A_2 = \lim \frac{[\psi(n)]^2}{\psi(2n)} = \lim \frac{[\psi(nm)]^2}{\psi(2nm)},$$

mithin wird

$$A_m = A_2^{m-1} \text{ und } \varphi(m) = A_2^{m-1} \sqrt{m}.$$

Die Grösse $A_2$ aber bestimmt sich vermöge der von Wallis gegebenen Formel

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2.2.4.4.6.6\ldots.2n-2.2n-2.2n}{1.3.3.5.5.7\ldots.2n-3.2n-1.2n-1}, \quad n = \infty;$$

denn

---

*) Legendre. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes. Tome II.

**) Cours de calcul différentiel et intégral, Tome II., page 190 etc.

$$A_2 = \frac{\varphi(2)}{\sqrt{2}} = \lim \frac{(1.2.3\ldots.n)^2}{1.2.3\ldots.2n} \frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim \frac{2.4.6\ldots.2n}{2.4.6\ldots.2n} \cdot \frac{2.4.6\ldots.2n-2.2n}{1.3.5\ldots.2n-1} \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim \sqrt{\frac{2.2.4.4.6.6\ldots.2n-2.2n-2.2n}{1.3.3.5.5.7\ldots.2n-1.2n-1} \cdot \frac{2.2.n}{n}} = \sqrt{4\,\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi},$$

und sonach folgt wie oben

$$\varphi(m) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}}.$$

Nicht ohne Interesse ist übrigens noch die Bemerkung, dass mit Benutzung des Theoremes II. und der Formel

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\ldots.\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right) = m^{-ma}\Gamma(ma)\cdot\varphi(m)$$

die Grösse $A_2$ sich sofort bestimmt; denn für $a = \frac{1}{2}$ und $m = 2$ ergeben sich nun die Beziehungen

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(2)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\pi}.$$

## §. 40.

### Zusammenhang der Euler'schen Integrale erster und zweiter Gattung.

Die Euler'sche Gleichung

$$\Gamma(b) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1.2.3\ldots.n}{(b+1)(b+2)\ldots.(b+n)} n^b, \quad n = \infty$$

lässt sich mit Anwendung des Productenzeichens $\Pi$ kurz in folgender Form schreiben

$$1. \qquad \Gamma(b) = \frac{1}{b} n^b \cdot \prod_1^n \frac{s}{b+s}, \quad n = \infty.$$

Offenbar darf bei einer solchen Darstellungsweise die obere Grenze $n$ nicht unmittelbar durch das Zeichen $\infty$ angedeutet, also nicht $\Gamma(b) = \frac{1}{b} n^b \prod_1^\infty \frac{s}{b+s}$ geschrieben werden, weil

sonst das ganze Product eine mit $\prod_1^\infty \frac{s}{b+s}$ unendlich klein werdende Grösse ausdrücken würde.

Bildet man nun die beiden ähnlichen Formeln

2. $$\Gamma(a) = \frac{1}{a} n^a \prod_1^n \frac{s}{a+s}, \quad n = \infty$$

und

3. $$\Gamma(a+b) = \frac{1}{a+b} n^{a+b} \prod_1^n \frac{s}{a+b+s}, \quad n = \infty,$$

und nimmt man in sämmtlichen Relationen dasselbe $n$; so lassen sich diese drei Gleichungen durch Multiplication und Division zu der Beziehung

4. $$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{a+b}{ab} \prod_1^\infty \frac{s(a+b+s)}{(a+s)\,(b+s)}$$

verbinden, in welcher 1 und $\infty$ sofort als Grenzen genannt werden dürfen, weil der Ergänzungsfactor $n^{a+b}$ verschwunden ist.

Nun fanden wir früher, dass bei Voraussetzung positiver Argumente

$$B(a,b) = \frac{a+b}{ab} \prod_1^\infty \frac{s(a+b+s)}{(a+s)\,(b+s)};$$

sind also in den Formeln 1. bis 4. die Grössen $a$ und $b$ positiv, so besteht auch die von Euler entdeckte Gleichung

I. $$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Es lässt sich also jedes Euler'sche Integral der ersten Gattung durch drei Gammafunctionen ausdrücken; die weitere Entwicklung jener Integrale ist daher unmittelbar durch die nähere Erforschung dieser gegeben.

## §. 41.

### Bemerkung zu den vorstehenden Betrachtungen.

Die in den beiden letzten Paragraphen geflogenen Untersuchungen gehören nicht mehr in das Gebiet der Integral-

rechnung. Da wir nun aber die Functionen $B$ und $\Gamma$ als bestimmte Integrale definirten, so liegt uns offenbar noch die Verpflichtung ob, die vorhergehenden Theoreme bloss mit den von der Integralrechnung dargebotenen Hülfsmitteln zu beweisen. Dies soll daher den Gegenstand unserer nächsten Betrachtungen bilden. Freilich wird dabei nun der Umstand eintreten, dass die sämmtlichen Eigenschaften der Gammafunctionen bloss noch unter Voraussetzung positiver Argumente zulässig sind; denn nur unter dieser Annahme kann, wie wir gezeigt, den Euler'schen Integralen eine wirkliche Bedeutung zugeschrieben werden. Zwar lassen dieselben auch dann noch als bestimmte Grössen sich auffassen, wenn die Argumente solche complexen Werthe erhalten, deren reelle Theile zu den positiven Grössen gehören, indessen werden wir diesen Fall einer nähern Betrachtung nicht unterziehen, sondern verweisen hierüber auf Enneper's Inaugural-Dissertation: „Ueber die Function $\Pi$ mit complexem Argument. Göttingen 1856."

## §. 42.

### Umformung der Gammafunction durch Substitution. Zweiter Beweis des Fundamentaltheoremes $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

Das Euler'sche Integral der zweiten Gattung

$$1. \qquad \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, dx$$

wird sehr häufig in der Form

$$1^a. \qquad \Gamma(a) = \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{a-1} dx.$$

dargestellt. Man gewinnt dieselbe sogleich, indem man $e^{-x}$ mit $x_1$, also $x$ mit $l\,\frac{1}{x_1}$ vertauscht*) und schliesslich die Grenzen des Integrales umkehrt.

Eine andere sehr einfache, aber ungemein wichtige Formel

*) Statt dieser Ausdrucksweise werden wir uns bisweilen der freilich weniger genauen „$e^{-x}$ mit $x$, oder $e^{-x}=x$ u.s.w." bedienen, was wir ja wegen der völligen Gleichgültigkeit in der Benennung des Integrationsbuchstabens etc. thun dürfen.

ergiebt sich durch die Substitution $x = kx_1$, wo $k$ eine Constante ausdrückt. Soll unter dieser Annahme das resultirende Integral immer eine völlig bestimmte Grösse vorstellen, so muss augenscheinlich die Constante $k$ wesentlich positiv sein. Indem wir daher diesen Fall voraussetzen, erhalten wir die Gleichung

$$2. \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a},$$

der wir auch die Gestalt

$$2^a. \qquad \frac{\Gamma(a)}{k^a} = \int_0^1 x^k \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{a-1} dx$$

geben können, wenn wir $e^{-x} = x_1$ schreiben.

Wird das Integral der Gleichung 1. jetzt der theilweisen Integration unterworfen, so ergiebt sich, weil $\left[\frac{e^{-x}\, x^a}{a}\right]_0^\infty = 0$, die Beziehung

$$\text{I.} \qquad \Gamma(a+1) = a\, \Gamma(a).$$

Und vertauscht man in ihr das beliebige Argument $a$ mit $a + n - 1$, wo $n$ eine ganze Zahl ausdrückt; so folgt aus der wiederholten Anwendung der Gleichung I. die neue Relation

$$3. \quad \Gamma(a+n) = (a+n-1)\,(a+n-2) \ldots .\ a\, \Gamma(a),$$

d. h. mit Benutzung der symbolischen Schreibweise Kramp's*)

$$3^a. \quad \Gamma(a+n) = (a+n-1)^{n|-1}\, \Gamma(a) = a^{n|1}\, \Gamma(a).$$

Diese Formel ist offenbar desshalb und daher namentlich für die Berechnung von Tafeln sehr wichtig, weil sie jede Gammafunction, deren Argument einen unechten Bruch vorstellt, auf ein Integral zurückzuführen lehrt, in dem der Parameter $a < 1$ ist. So wird beispielsweise die Function $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ auf $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ reducirt, indem

$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}+3\right) = \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

---

*) C. Kramp. Elémens d'arithmétique universelle. Cologne 1808. Page 348.

Setzt man $a = 1$, so gehört streng genommen das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$$

nicht mehr zu den Euler'schen Integralen, indessen behält man der Analogie zufolge auch hier die Benennung bei und hat so die Gleichung

$$\Gamma(1) = 1.$$

Mit Benutzung dieses Werthes aber folgt jetzt aus 3 die Beziehung

$$\Gamma(n+1) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n = n! = 1^{n|1}.$$

Nach Gauss würde diese Gleichung sich so darstellen

$$\Pi(n) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n,$$

und hieraus allein dürfte schon der Vorzug der Gauss'schen Bezeichnungsweise vor der Legendre'schen einleuchten.

Bemerkt mag endlich noch werden, dass die letztere Beziehung auch verschiedenen andern Grössen, wie z. B.

$$\cos\,(2\,\pi\, n)\ \Pi(n),\quad (\cos\,\pi\, n)^{2m}\ \Pi n \ldots,$$

zukommt*); zur Unterscheidung der Gamma von andern Functionen könnte also diese Relation nicht benutzt werden.

## §. 43.

**Beweis der Formel $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ und des Theoremes II.**

**$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, $0 < a < 1$. Dirichlet'sche Formel.**

Bei der Darstellung der Principien, welche bei der Untersuchung bestimmter Integrale zu befolgen sind, deuteten wir die Wichtigkeit des Theoremes von der Vertauschung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen mit constanten Grenzen an. Der jetzt folgende Beweis des Euler'schen Satzes

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

wird uns nun zum ersten Male diese ausserordentliche Fruchtbarkeit des genannten Theoremes in der Theorie der bestimmten

*) Gauss. Disq. circ. seriem etc. Nr. 21. Werke. Bd. 3. Seite 146.

Integrale zur Anschauung bringen. Ersetzen wir nämlich in der vorhin bewiesenen Formel

$$\frac{1}{k^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \, dx$$

den Parameter $k$ durch die positive Grösse $1 + y$ und $a$ durch $a + b$, wo $a$ und $b$ ebenfalls das Zeichen plus führen, so entsteht zunächst die Beziehung

$$\frac{1}{(1+y)^{a+b}} = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty e^{-(1+y)x} x^{a+b-1} \, dx.$$

Wird dieselbe aber mit $y^{b-1} \, dy$ multiplicirt und darauf zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ integrirt, so entspringt die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{y^{b-1} \, dy}{(1+y)^{a+b}} = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty y^{b-1} \, dy \int_0^\infty e^{-(1+y)x} x^{a+b-1} \, dx,$$

d. h.

$$B(a, b) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty y^{b-1} \, dy \int_0^\infty e^{-(1+y)x} x^{a+b-1} \, dx.$$

Daraus folgt nun durch Umkehrung der Integrationsordnung*)

$$B(a, b) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty e^{-x} x^{a+b-1} \, dx \int_0^\infty e^{-yx} y^{b-1} \, dy,$$

und dies giebt mit abermaliger Benutzung der Formel 2. §. 42.

$$B(a, b) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty e^{-x} x^{a+b-1} \, dx \cdot \frac{\Gamma(b)}{x^b}$$

$$= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \, dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Auf den ersten Blick scheint dieser Satz nur für die Reduction eines zusammengesetzteren Integrales auf einfachere Functionen von Bedeutung zu sein, gleichwohl ist dies nicht

*) Man vergl. hierbei die Anmerkung zu §. 101.

der Fall. Denn setzt man $a + b = 1$, also $b = 1 - a$, so wird das Integral

$$B(a, 1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$$

unsern frühern Betrachtungen zufolge mit $\frac{\pi}{\sin a\pi}$ gleichbedeutend. Und daher entspringt nun die Gleichung

$$\text{II.}\qquad \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},\quad 0 < a < 1^{*}),$$

aus welcher wieder für $a = \frac{1}{2}$ die andere fliesst

$$\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^2 = \pi,$$

d. h., weil die Function $\Gamma$ wesentlich positiv ist,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Verbindet man dies mit der Formel 3. des vorigen Paragraphen, so leuchtet sofort die Wahrheit der Behauptung ein, dass mit der Kenntniss der Gammafunctionen, deren Argument eine zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ befindliche Zahl bezeichnet, die Bestimmung aller übrigen Gamma gegeben ist.

Das Theorem

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

stellt sich als specieller Fall einer von Dirichlet**) gegebenen Relation zwischen zwei Transscendenten derselben Form dar. Multiplicirt man nämlich die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-(c+z)y}\,y^{a-1}\,dy = \frac{\Gamma(a)}{(c+z)^a}$$

durch $e^{-kz} z^{b-1}\,dz$, wo $k$ und $b$ wie $c$ und $z$ zu den positiven Grössen

*) Einen andern auf die Reihenentwicklung von $\frac{\pi}{\sin a\pi}$ sich stützenden sehr einfachen Beweis dieses Theoremes hat Hoppe in Grunert's Archiv Thl. 41, S. 66—67 gegeben.

**) Dirichlet. Sur les intégrales Eulériennes. Crelle. Journal. Bd. 15.

gehören, und integrirt alsdann zwischen den Grenzen 0 und $\infty$; so entspringt die Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-kz} z^{b-1}\,dz \int_0^\infty e^{-(c+z)y} y^{a-1}\,dy = \Gamma(a)\int_0^\infty \frac{e^{-kz} z^{b-1}\,dz}{(c+z)^a},$$

deren linker Seite man durch Umkehrung der Integrationsordnung augenblicklich die Gestalt

$$\Gamma(b)\int_0^\infty \frac{e^{-cy} y^{a-1}\,dy}{(k+y)^b}$$

geben kann. Man hat daher die Gleichung

$$\Gamma(b)\int_0^\infty \frac{e^{-cy} y^{a-1}\,dy}{(k+y)^b} = \Gamma(a)\int_0^\infty \frac{e^{-kz} z^{b-1}\,dz}{(c+z)^a},$$

deren blosser Anblick zeigt, dass sie für $c = 0$, $b = a + b'$ und $k = 1$ in das Euler'sche Theorem übergeht.

## §. 44.

### Das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$; Folgerungen.

Schreibt man in der Gleichung $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ statt $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ das entsprechende Integral, so erhält man

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Dieses Integral aber nimmt eine elegantere Gestalt an, wenn man $x$ mit $x_1{}^2$ vertauscht; denn nun wird — natürlich unter Voraussetzung eines positiven $x_1$ —

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty e^{-x_1{}^2}\,dx_1 = \sqrt{\pi},$$

also

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

und, weil $e^{-x^2}$ eine gerade Function ausdrückt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Wegen der Wichtigkeit, welche diesem Integrale in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der mathematischen Physik zukommt, wollen wir dasselbe ganz unabhängig von dem Vorhergehenden entwickeln und zugleich einige nahe liegenden Folgerungen nicht unberücksichtigt lassen.

Setzen wir für den Augenblick

$$z = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

so folgt durch die Substitution $x = \alpha y$, wo $\alpha$ eine positive Constante ausdrückt,

$$z = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 y^2}\,dy.$$

Hieraus aber entspringt durch Multiplication mit $e^{-\alpha^2}\,d\alpha$ und Integration zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ die neue Beziehung

$$z^2 = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2}\,d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 y^2}\,dy = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-(1+y^2)\alpha^2}\,\alpha\,d\alpha.$$

Nun ist

$$\int e^{-(1+y^2)\alpha^2}\,\alpha\,d\alpha = -\frac{1}{2(1+y^2)}\,e^{-(1+y^2)\alpha^2} + \text{const.},$$

also

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+y^2)\alpha^2}\,\alpha\,d\alpha = \frac{1}{2(1+y^2)},$$

und folglich wird jetzt

$$z^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Substituirt man in dem Integrale

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

anstatt $x$ die Grösse $x\sqrt{\alpha}$, wo $\alpha$ wie vorhin eine positive Constante vorstellt, so ergiebt sich die Formel

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx.$$

Und indem man diese $n$-mal nach $\alpha$ differentiirt, erhält man die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n}\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2^n}\,\alpha^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

folglich wird für $\alpha = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2^n}.$$

Aus dem Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ entspringt ferner, wenn $\alpha$ irgend eine reelle Constante bezeichnet, durch Vertauschung von $x$ mit $x \pm \alpha$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 \mp 2x\alpha}\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{\alpha^2}.$$

Und hieraus folgen leicht die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\frac{e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}}{2}\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{\alpha^2}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 x^2}\,\frac{e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}}{2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\,e^{\frac{\alpha^2}{\beta^2}},\ \beta > 0.$$

Noch andere Folgerungen ergeben sich, wenn man in $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ mittelst der Substitutionen $x = \alpha\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ $x = \alpha\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{\alpha}$, in denen $a$ und $b$ positiv sein sollen, eine neue Veränderliche $\alpha$ einführt. So nämlich gewinnt man die Formeln *)

*) Cauchy. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constans. Journal de l'école polytechnique Tome XII., cah. 19, pg. 517 etc. — Auch vergl. Serret: Cours de cal. diff. et intégral Tome II. Paris 1868.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\alpha^2 - b\alpha}\, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{\frac{b^2}{4a^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)}\, d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}\, {}^{*)},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)}\, \frac{d\alpha}{\alpha^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-2\sqrt{ab}},$$

aus deren ersten beiden man durch $n$-malige Differentiation nach $b$ die Gleichungen erzielt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n e^{-a\alpha^2 - b\alpha}\, d\alpha = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{b}{2a}\right)^n e^{\frac{b^2}{4a}} \left[1 + \frac{n.(n-1)}{1}\frac{a}{b^2} + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2}\frac{a^2}{b^4} + \text{etc.}\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)}\, \frac{d\alpha}{\alpha^{2n}} = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \frac{d^n\, e^{-2\sqrt{ab}}}{db^n}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-2\sqrt{ab}} \left[1 + \frac{n(n-1)}{1.}\frac{1}{4\sqrt{ab}} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\frac{1}{4\sqrt{ab}}\right)^2 + \text{etc.}\right]$$

*) Durch die Substitution $x = \alpha\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{\alpha}$ gewinnt man zunächst die Gleichung

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2 - 2\sqrt{ab} + \frac{b}{\alpha^2}\right)} \left(\sqrt{a} + \frac{\sqrt{b}}{\alpha^2}\right) d\alpha$$

$$= \sqrt{a}\, e^{2\sqrt{ab}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)}\, d\alpha + \sqrt{b}\, e^{2\sqrt{ab}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)}\, \frac{d\alpha}{\alpha^2}.$$

Jedes der Integrale

$$2\sqrt{a}\, e^{2\sqrt{ab}} \int_0^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)}\, d\alpha \quad \text{und} \quad 2\sqrt{b}\, e^{2\sqrt{ab}} \int_0^{\infty} e^{-\left(a\alpha^2+\frac{b}{\alpha^2}\right)}\, \frac{d\alpha}{\alpha^2}$$

aber geht in das andere über, wenn man $\alpha$ mit $\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{1}{\alpha}$ vertauscht; die beiden Integrale und folglich auch die von $-\infty$ bis $+\infty$ genommenen Integrale sind daher einander gleich.

Vergl. auch §. 23, II.

Dass übrigens dies letztere Integral für $\alpha = 0$ nicht sinnlos wird, ergiebt sich sogleich, weil es durch die Substitution $\alpha = \frac{1}{\alpha_1}\sqrt{\frac{b}{a}}$ aus dem Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^{2n-2}\, e^{-\left(a\alpha^2 + \frac{b}{\alpha^2}\right)} d\alpha$ hervorgeht.

## §. 45.

### Stetigkeit der Gammafunction. Derivirte von $\Gamma(a)$.

Bei den bislang gepflogenen Untersuchungen ist die Frage nach der Stetigkeit der Gammafunction niemals berührt worden. Diese Frage aber ist für die jetzt folgenden Betrachtungen wesentlich. Es liegt uns nämlich, um nur dies Eine zu erwähnen, die Verpflichtung noch ob, die Richtigkeit des Gauss'schen Fundamentaltheoremes über die Gammafunctionen ebenfalls bloss mit den Hülfsmitteln der Integralrechnung darzuthun. In der elegantesten Weise aber wird uns dies nach Dirichlet's Vorgange gelingen, wenn wie zuvor die Derivirte von $\log \Gamma(a)$ durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Weil nun aber $\frac{d \lg \Gamma(a)}{da} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ sein wird, so muss natürlich vor allem die Gewissheit vorliegen, dass $\Gamma(a)$ in der That der Differentiation unterzogen werden kann. Und hierzu wird bekanntlich die Continuität der Function $\Gamma(a)$ als eine der ersten und wesentlichsten Bedingungen erfordert.

Soll aber $\Gamma(a)$ eine stetige Function von $a$ ausdrücken, so muss für ein ins Unendliche abnehmendes $h$ die Differenz $\Gamma(a+h) - \Gamma(a)$ der Null als ihrer Grenze sich nähern. Da nun $\Gamma(a+h) - \Gamma(a)$ mit dem Integrale $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}(x^h - 1)\,dx$ gleichbedeutend ist, so brauchen wir bloss nachzusehen, ob dieses Integral mit abnehmendem $h$ wirklich ein beliebig kleines Quantum nicht mehr zu überschreiten vermag.

Wie man sieht, erfordert die Beantwortung dieser Frage wegen der Differenz $x^h - 1$ eine Zerlegung des Integrales in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und 1 und 1 und $\infty$. Von diesen Integralen aber bedarf das erstere nur der Strenge halber einiger Worte. Denn da nach dem bekannten Maximum-Minimum-Satze

$$\int_0^1 e^{-x}\, x^{a-1}\,(x^h - 1)\, dx = R \int_0^1 [x^{a+h-1} - x^{a-1}]\, dx$$
$$= R\left[\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right]$$

ist, wo $R$ stets endlich bleibt, so erhellt auf den ersten Blick, dass mit abnehmendem $h$ das Integral zuletzt unter jeden beliebig kleinen Werth sinken wird.

Und was das zweite Integral $\int_1^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\,(x^h - 1)\, dx$ betrifft, so ist auch hier bloss in Betreff der obern Grenze die Entscheidung nicht so unmittelbar einleuchtend. Denn schreibt man wieder

$$\int_1^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\,(x^h - 1)\, dx = R \int_1^\infty (x^h - 1)\, dx,$$

so wird nun für $x = \infty$ das Integral in einer unbestimmten Form sich darstellen. Integrirt man jedoch von einem beliebig grossen $p$ bis zu einem beliebig grössern $q$, so hat man

$$\int_p^q e^{-x}\, x^{a-1}\,(x^h - 1)\, dx = R \int_p^q (x^h - 1)\, dx$$
$$= R\left[\frac{q^{h+1}}{h+1} - q - \frac{p^{h+1}}{h+1} + p\right].$$

Und dieser Unterschied wird, weil $R$ wegen $e^{-x}$ niemals über jede Grenze hinaus wachsen kann, mit fortwährend abnehmendem $h$ eine ebenfalls unendlich klein werdende Grösse ausdrücken.

Aus allem diesem aber folgt, dass in der That $\Gamma(a)$ zu den stetigen Functionen gehört.

Die Derivirte $\Gamma'(a) = \lim \frac{\Gamma(a+h) - \Gamma(a)}{h}$ selbst findet sich sogleich durch Differentiation nach $a$ unter dem Zeichen $\int$.

Man erhält so

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, \mathrm{l}\,(x)\, dx.$$

Umgekehrt hätte man übrigens, die Stetigkeit der Function $\Gamma(a)$ zunächst als Statt findend vorausgesetzt, aus der Endlichkeit dieses Integrales auf die Continuität jener zurückschliessen können. Dass aber $\int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1} \lg(x)\, dx$ eine stets endliche Grösse sein muss, ist leicht zu zeigen. Schreibt man nämlich $\Gamma'(a)$ in folgender Form

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^a \frac{lx}{x} dx$$

und bedenkt, dass für $x = \infty$ $\frac{lx}{x}$ in Null übergeht; so muss offenbar

$$\int_p^q e^{-x} x^a \frac{lx}{x} dx = R \int_p^q e^{-x} x^a dx$$

mit wachsendem $p$ und $q$ zuletzt unter jeden angebbaren Werth sinken, und demnach wird das $\Gamma'(a)$ darstellende Integral für die obere Grenze nicht sinnlos.

In Betreff der untern Grenze dagegen schreibe man, um alle Fälle zu umfassen,

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} e^{-x} x^{a-1} \lg x \, dx = R \int_\varepsilon^{\varepsilon'} x^{a-1} \,\mathrm{l}\, x \, dx = R \left[\frac{x^a \lg x}{a} - \frac{x^a}{a^2}\right]_\varepsilon^{\varepsilon'},$$

wo $\lim \varepsilon' = \lim \varepsilon = 0$ und $\lim R = 1$ ist, und bedenke, dass $x^a \lg x = \dfrac{-\lg\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{-a}}$ für $x = 0$ den Werth Null erwirbt.

Auf ganz gleiche Weise endlich wird man sich überzeugen, dass auch $\Gamma''(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} (\lg x)^2 \, dx$ nicht ohne Bedeutung ist.

## §. 46.

### Minimum der Function $\Gamma(a)$.

Die stetige Function $\Gamma(a)$ erhält für $a = 1$ und $a = 2$ den Werth 1, sie muss daher zwischen diesen Grenzen entweder ein Maximum, oder ein Minimum besitzen, und folglich muss ihre erste Derivirte, weil sie niemals unendlich wird, innerhalb dieses Intervalles wenigstens einmal mit Null zusammenfallen. Giebt man nun dem Integrale $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \,\mathrm{l}\, x \, dx$ die Gestalt

$$\Gamma'(a) = \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} \,\mathrm{l}\, x \, dx - \int_0^1 e^{-x} x^{a-1} \,\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

und berücksichtigt gleichzeitig die für $h > 0$ Statt findenden Beziehungen

$$x^{a+h-1} > x^{a-1}, \quad x > 1$$

und

$$x^{a+h-1} < x^{a-1}, \quad 0 < x < 1,$$

so muss von diesen beiden stets positiven Integralen das erstere immer wachsen, das zweite hingegen beständig abnehmen, wenn dem Argumente $a$ grössere Werthe beigelegt werden. Daraus aber folgt, dass nur für einen Werth von $a$ diese Differenz in Null übergehen kann; die Function $\Gamma(a)$ hat also auch nur ein Maximum, oder Minimum. Ein Grösstes aber kann sie nicht besitzen, weil die zweite Abgeleitete von $\Gamma(a)$ wesentlich positiv ist. Diesseit und jenseit ihres augenscheinlich durch einen echten Bruch vorgestellten Minimalwerthes aber wächst die Function Gamma fortwährend, und ihr Differentialquotient ist auf der einen Seite dieses Kleinsten beständig positiv, auf der andern Seite dagegen immer negativ.

## §. 47.

**Darstellung von $\frac{d \log \Gamma(a)}{d a}$ durch ein bestimmtes Integral. Anwendung auf die Gleichung**

$$\frac{\partial \lg B(a, b)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \lg \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Wenn man den Ausdruck

$$\frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b}$$

mit $\Gamma(b)$ im Zähler und Nenner multiplicirt, so lässt sich augenblicklich die Gleichung bilden

$$1^a. \quad \frac{\Gamma(a+b)\,\Gamma(b) - \Gamma(a)\,\Gamma(b)}{b\,\Gamma(b)} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b+1)}\,[\Gamma(b) - B(a, b)].$$

Daraus aber fliesst, wenn statt der Functionen $\Gamma(b)$ und $B(a, b)$ die entsprechenden Integrale

$$\int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{b-1} d x \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx$$

substituirt werden, die andere Form

$$\frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b+1)} \int_0^1 dx \left[\left(\lg \frac{1}{x}\right)^{b-1} - x^{a-1}(1-x)^{b-1}\right].$$

Und diese giebt, falls $b$ ins Unendliche abnimmt, die neue Beziehung

$$\Gamma'(a) = \Gamma(a) \int_0^1 \left[ \frac{1}{\lg\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{x^{a-1}}{1-x} \right] dx,$$

d. h.

$$1. \quad \frac{d \lg \Gamma(a)}{da} = \int_0^1 \left[ \frac{1}{\lg\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{x^{a-1}}{1-x} \right] dx\text{*}).$$

So unverfänglich dieser Gedankengang auf den ersten Blick auch erscheinen mag, so ist er doch bei näherer Betrachtung nicht frei von Zweifeln. Denn für $x = 1$ und $b = 0$ werden die beiden Integrale

$$\int_0^1 \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{b-1} dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

unendlich; folglich bedarf zunächst die Frage einer Entscheidung, ob ihr Unterschied, d. h. hier ob die Differenz

$$\left(\lg \frac{1}{x}\right)^{b-1} - x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

mit abnehmendem $b$ auch wirklich in eine bestimmte Grösse übergeht. Dies nun ist in der That der Fall, und zwar überzeugt man sich hiervon sogleich, wenn man statt des Werthes $x = 1$ zuvörderst die ihm beliebig nahe liegende Grösse $1 - \varepsilon$ schreibt und den hierdurch entstehenden Ausdruck

$$[- \lg (1 - \varepsilon)^{b-1} - (1 - \varepsilon)^{a-1} \varepsilon^{b-1}]$$

nach der Binomialformel sich entwickelt denkt. Alsdann beginnt die so erzeugte Reihe mit einer positiven Potenz von $\varepsilon$ und wird mithin für $b = 0$ nicht unendlich, wie nahe auch $\varepsilon$ der Null liegen mag. Daraus aber fliesst weiter, dass für $x = 1$ und $b = 0$ der Unterschied $\left(\lg \frac{1}{x}\right)^{b-1} - x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ zu den endlichen Grössen gehören muss.

Bezeichnet ferner $a$ einen echten positiven Bruch, so

---

*) Diese Formel rührt von Gauss her, a. a. O. Nr. 35. Werke. Bd. 3. S. 159.

wird für $x = 0$ die Function $\frac{x^{a-1}}{1-x}$ unendlich; eine Schwierigkeit erwächst indess hieraus nicht, weil das Integral $\int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}}{1-x} dx$ für die untere Grenze nicht sinnlos wird.

Hätte man endlich statt des Integrales $\int\limits_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ das ihm gleiche $\int\limits_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-1} dx$ gewählt, so würden die beiden Integrale

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\lg \frac{1}{x}} \text{ und } \int\limits_0^1 \frac{(1-x)^{a-1}}{x} dx$$

an verschiedenen Stellen unendlich geworden sein, und folglich hätte man ein ganz unbrauchbares Resultat erzielt.

Aus dem Gesagten schliesst man nun sogleich, dass bei Voraussetzung der Integrationsgrenzen 0 und $\infty$ in Gleichung 1.$^a$ für $B\,(a, b)$ dasjenige Integral zu wählen ist, welches mit $\Gamma(b)$ für denselben Werth von $x$, also hier an der untern Grenze 0 unendlich wird. Augenscheinlich ist dies das Integral

$$B\,(a, b) = \int\limits_0^\infty \frac{x^{b-1}\,dx}{(1+x)^{a+b}},$$

und demnach wird jetzt

$$2. \qquad \frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} = \int\limits_0^\infty \left[ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right] \frac{dx}{x}.\text{*)}$$

Die Abgeleitete von $\lg \Gamma(a)$ können wir übrigens ohne Hülfe des Integrales der ersten Art finden. Schreiben wir nämlich mit Dirichlet in der bekannten Formel

$$\frac{\Gamma(a)}{s^a} = \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, x^{a-1}\, dx$$

$a = 1$, und integriren wir die so erzielte, auch unmittelbar

*) Von Dirichlet herrührend. Crelle Journal. Bd. 15.

einleuchtende Gleichung in Bezug auf $s$ zwischen den Grenzen 1 und $s$; so kommt

$$\lg s = \int_0^\infty [e^{-x} - e^{-sx}] \frac{dx}{x}.$$

Und wird diese Beziehung durch $e^{-s} s^{a-1} ds$ multiplicirt und hierauf von $s = 0$ bis $s = \infty$ integrirt, so folgt

$$\int_0^\infty e^{-s} s^{a-1} \lg s \, ds = \int_0^\infty e^{-s} s^{a-1} ds \int_0^\infty [e^{-x} - e^{-sx}] \frac{dx}{x}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left[ e^{-x} \int_0^\infty e^{-s} s^{a-1} ds - \int_0^\infty e^{-(1+x)s} s^{a-1} ds \right].$$

In andern Zeichen aber heisst dies

$$\Gamma'(a) = \Gamma(a) \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left[ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right],$$

wodurch also Gleichung 2 von neuem bewiesen ist. Aus ihr entspringt durch Vertauschung von $\frac{1}{1+x}$ mit $x$ die andere Formel

3. $$\frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} = \int_0^1 \left[ e^{1-\frac{1}{x}} - x^a \right] \frac{\partial x}{x(1-x)} \text{*)},$$

in der also die Grösse $\frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x}$ den Logarithmus in dem Integrale der Gleichung 1 vertritt.

Man kann jedoch von dem Integrale der Gleichung 2. zu dem in 1. ermittelten gelangen, indem man die Exponentialgrösse $e^{-x} = y$ setzt und $\frac{1}{1+x}$ wie vorhin mit $y$ vertauscht. Und von der Zulässigkeit einer derartigen Operation im vorliegenden Falle überzeugt man sich, abgesehen von dem Obigen, auch leicht in folgender Weise. Da nämlich die Function

$$\frac{1}{x} \left[ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right]$$

von $x = 0$ bis $x = \infty$ niemals unendlich wird, so braucht

*) Dirichlet a. a. O. Sur les int. Eul.

man nur zu beachten, dass der Unterschied zwischen den beiden Integralen

$$\int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{dx}{x} \text{ und } \int_\varepsilon^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{dx}{x}$$

für ein der Null sich näherndes positives $\varepsilon$ unter jeden angebbaren Werth sinken wird. Nun nimmt aber das letzte Integral durch die angedeuteten Substitutionen die Form

$$\int_0^{e^{-\varepsilon}} \frac{dy}{\lg \frac{1}{y}} - \int_1^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \frac{y^{a-1}\,dy}{1-y}$$

an, und diese lässt sich wieder mittelst Addition und Subtraction des Integrales

$$\int_{e^{-\varepsilon}}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \frac{dy}{\lg \frac{1}{y}}$$

in folgender Weise darstellen

$$\int_0^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left[\frac{1}{\lg \frac{1}{y}} - \frac{y^{a-1}}{1-y}\right] dy - \int_{e^{-\varepsilon}}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \frac{dy}{\lg \frac{1}{y}}.$$

Augenscheinlich aber ist, weil $\frac{1}{\lg \frac{1}{y}}$ innerhalb des Intervalles von $e^{-\varepsilon}$ bis $\frac{1}{1+\varepsilon}$ zu den wachsenden Functionen gehört, das zweite Integral kleiner, als die mit $\varepsilon$ zu gleicher Zeit unendlich klein werdende Grösse

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon} - e^{-\varepsilon}\right) \frac{1}{\lg (1+\varepsilon)}.$$

Das Integral $\int_0^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \left[\frac{1}{\lg \frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x}\right] dx$ unterscheidet sich da-

her von dem Integrale $\int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right] \frac{dx}{x}$ zuletzt um weniger, als jede angebbare Grösse, und folglich muss, weil für $x = 1$ die Function $\frac{1}{\lg \frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x}$ einen endlichen Werth besitzt, für $\varepsilon = 0$ die Derivirte von $\lg \Gamma(a)$ dem Integrale

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{\lg \frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x}\right] dx$$

gleich sein.

Die Gleichung 3. bietet endlich noch das Mittel, in sehr einfacher Weise die von Euler auf anderm Wege gefundene Relation

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} \lg\left(\frac{1}{x}\right) dx = B(a, b) \int_0^1 x^{b-1} \frac{1-x^a}{1-x} dx$$

zu erhärten.

Denn differentiirt man die Gleichung

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\, \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

logarithmisch nach $b$, so kommt

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} \lg x\, dx = \left[\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma'(a+b)}{\Gamma(a+b)}\right] \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx.$$

Mit Rücksicht auf Gleichung 3. aber lässt sich

$$\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma'(a+b)}{\Gamma(a+b)}$$

durch das bestimmte Integral $-\int_0^1 x^{b-1} \frac{1-x^a}{1-x} dx$ darstellen, und folglich wird

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} \lg\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 x^{b-1} \frac{1-x^a}{1-x} dx \,.\, \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-1} dx.\text{*)}$$

*) Dirichlet a. a. O.

## §. 48.

**Beweis des Gauss'schen Fundamentalsatzes.**

Vertauscht man in der Gleichung 1. des vorigen P graphen das Argument $a$ nach und nach mit

$$a, a+\frac{1}{n}, a+\frac{2}{n}, \cdots a+\frac{n-1}{n},$$

wo $n$ eine positive, von $a$ unabhängige ganze Zahl bede und addirt die gewonnenen Resultate; so entsteht die ziehung

$$\frac{\partial}{\partial a}\lg\left[\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$=\int_0^1\left[\frac{n}{\lg\frac{1}{x}}-\frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right]dx,$$

d. h., wenn in das Integral statt $x^{\frac{1}{n}}$ eine neue Variabe eingeführt wird,

$$1.\quad \frac{\partial}{\partial a}\lg\left[\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$=n\int_0^1\left[\frac{x^{n-1}}{\lg\frac{1}{x}}-\frac{x^{na-1}}{1-x}\right]dx.$$

Andererseits aber ergiebt sieh aus der Gleichung 1. §. für das Argument $na$ die Relation

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}=\int_0^1\left[\frac{1}{\lg\frac{1}{x}}-\frac{x^{na-1}}{1-x}\right]dx,$$

also durch Multiplication mit $n$

$$2.\quad \frac{\partial\lg\Gamma(na)}{\partial a}=n\int_0^1\left[\frac{1}{\lg\frac{1}{x}}-\frac{x^{na-1}}{1-x}\right]dx.$$

Und zieht man diese Gleichung von der unter 1. dargestel ab, so hat man die Beziehung

$$3.\quad \frac{\partial}{\partial a}\lg\frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}$$

$$= n\int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{\lg\frac{1}{x}}\,dx,$$

in der offenbar die rechte Seite eine numerische Constante $r$ ausdrückt.

Aus 3. aber fliesst weiter durch Integration nach $a$

$$\lg\frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = ra+s,$$

wo $s$ die Constante der Integration bezeichnet. Geht man folglich von den Logarithmen zu den Zahlen über, so gewinnt man die Gleichung

$$4.\quad \frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = e^{ra+s} = p^a\,.\,q,$$

wenn der Kürze halber $e^r = p$ und $e^s = q$ geschrieben wird,

Um nun von diesen Grössen $p$ und $q$ zunächst die erste zu bestimmen, wird man bedenken, dass Gleichung 4. für jedes $a$ und demnach auch für $a' = a + \frac{1}{n}$ in Kraft bleibt. Mit Benutzung dieser Substitution aber erhält man

$$5.\quad \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\Gamma(a+1)}{\Gamma(na+1)} = p^{a+\frac{1}{n}}.q.$$

Mithin entspringt durch Division von 4. in 5. und mit Rücksicht auf das erste Fundamentaltheorem

$$n^{-1} = p^{\frac{1}{n}},$$

d. h.

$$p = n^{-n}.$$

Und sonach schreibt Gleichung 4. sich jetzt so:

$$4^a.\quad \frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = n^{-na}\,.\,q.$$

Die Constante $q$ aber wird nun sofort gefunden, wenn

man wie früher $a = \frac{1}{n}$ setzt, die erzeugte Reihe nochmals in umgekehrter Folge schreibt und beide Gleichungen durch Multiplication mit einander verbindet. Denn so folgt wieder im Hinblick auf die Gleichungen

$$\Gamma(b)\,\Gamma(1-b) = \frac{\pi}{\sin b\pi},\ 0 < b < 1 \text{ und } \prod_1^{n-1} \sin\frac{s\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

die Relation

$$\frac{1}{n^2}\,q^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n},$$

d. h., weil $q$ wesentlich positiv ist,

$$q = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\sqrt{n}.$$

Wird somit dieser Werth in Gleichung 4ᵃ. substituirt, so besteht nunmehr die Beziehung

$$\text{I.}\qquad \Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= \Gamma(na)\,.\,n^{-na+\frac{1}{2}}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Dirichlet gebührt das Verdienst, diese schöne Formel zuerst mit den Hülfsmitteln der Integralrechnung bewiesen zu haben, und zwar stützt er bei seinen ersten, im 15. Bande des Crelle'schen Journals mitgetheilten Betrachtungen den Beweis auf Gleichung 3. §. 47. Nach Dirichlet haben dann noch andere Schriftsteller ebenfalls nur auf Integralrechnung beruhende Beweise des Gauss'schen Theoremes geliefert. Von diesen werden wir namentlich den Liouville'schen Gedankengang, der die Behandlung vielfacher Integrale voraussetzt, bei ihrer Untersuchung wiederzugeben versuchen. Ausserdem aber werden wir in dem Nachfolgenden einen Theil der Betrachtungen mittheilen, welche einem von Stern in seinen „Beiträgen zur Theorie der Euler'schen Integrale“ *) veröffentlichten Beweise der obigen Formel I. zu Grunde liegen.

---

*) Abgedruckt aus den Göttinger Studien, Vandenhoeck und Ruprecht; 1847.

## §. 49.

### Darstellung von lg $\Gamma(a)$ durch bestimmte Integrale.

Wenn man in der von Gauss gefundenen Gleichung

$$1.\qquad \frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{\lg \frac{1}{x}} - \frac{x^{a-1}}{1-x}\right]$$

statt $\lg \frac{1}{x}$ $z$ schreibt, so nimmt sie die Form an

$$1^a.\qquad \frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} - \frac{z\,e^{-az}}{1-e^{-z}}\right].\text{*)}$$

Hieraus aber entspringt durch Integration nach $a$ zwischen den Grenzen 1 und $a$ die von Liouville, jedoch nur für ein ganzes $a$ gegebene Relation

$$2.\qquad \lg \Gamma(a) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[(a-1)e^{-z} - \frac{e^{-z} - e^{-az}}{1 - z^{-z}}\right].\text{**)}$$

Eine andere, freilich nicht so elegante Gestalt kann man dieser Gleichung geben, sofern man $z = \lg(1+x)$ setzt; dadurch nämlich wird

$$3.\ \lg \Gamma(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{\lg(1+x)} \left[(a-1)(1+x)^{-2} - \frac{(1+x)^{-1} - (1+x)^{-a}}{x}\right].$$

---

*) Gauss a. a. O. Nr. 37, Werke Bd. 3, Seite 160.

**) Integrirt man die obige Gl. 1 sofort nach $a$ von $a = 1$ bis $a = a$, so nimmt die Liouville'sche Formel 2. diese Gestalt an:

$$\log \Gamma(a) = \int_0^1 \left[a - 1 - \frac{1 - x^{a-1}}{1 - x}\right] \frac{dx}{\lg \frac{1}{x}}$$

Vergl. Lipschitz in Crelle's Journal, Bd. 56, Seite 14.
Liouville. Journal, t. IV., p. 318.
Liouville leitet die Gleichung 2. aus der Formel

$$\lg z = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha z}}{\alpha}\, d\alpha$$

ab, indem er $z = 1, 2, 3, \ldots, x$ setzt und die einzelnen Resultate addirt.

In nicht so einfacher Weise aber würde diese Form gefunden sein, wenn man das Dirichlet'sche Integral

$$\frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right] \frac{dx}{x}$$

in Bezug auf $a$ zwischen den Grenzen 1 und $a$ integrirt hätte. Denn so wäre zunächst die Beziehung

$$\lg \Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1)e^{-x} - \frac{(1+x)^{-1} - (1+x)^{-a}}{\lg(1+x)}\right] \frac{dx}{x}$$

zum Vorschein gekommen. Und um nun von hieraus zu der Formel 3. gelangen zu können, müsste man mit der vorstehenden Gleichung die folgende

$$(a-1) \lg \Gamma(2) = \int_0^\infty \left[\frac{(a-1)e^{-x}}{x} - \frac{(a-1)\,(1+x)^{-2}}{\lg(1+x)}\right] dx = 0$$

durch Subtraction verbinden.

Wie man übrigens sofort sieht, liessen sich ohne grosse Mühe noch andere hierher gehörigen Darstellungsweisen für $\lg \Gamma(a)$ aufzeigen. Indess beschränken wir uns auf eine Form, von der wir in dem Nachfolgenden Gebrauch machen werden. Schreiben wir zu dem Behufe Gleichung 2. wie folgt:

$$\lg \Gamma(a) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z}(a-1) - \frac{z}{e^z - 1}\left\{\frac{1}{z} - \frac{e^{-(a-1)z}}{z}\right\}\right],$$

und setzen wir der Kürze halber

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots} = 1 - \frac{z}{2} + R;$$

so können wir $\lg \Gamma(a)$ die Gestalt 4. geben:

$$4.\ \lg \Gamma(a) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z}(a-1) - \frac{1}{e^z - 1} + \frac{e^{-(a-1)z}}{z} - \frac{e^{-(a-1)z}}{2}\right]$$
$$+ \int_0^\infty \frac{dz}{z^2} R\, e^{-(a-1)z}$$

d. h., wenn wir das erste Integral kurz $G_{a-1}$, das zweite dagegen $H_{a-1}$ nennen,

$$4^a. \qquad \lg \Gamma(a) = G_{a-1} + H_{a-1}.$$

## Ueber die Darstellung von lg $\Gamma(a)$ durch Reihen.

### §. 50.

### Theorem Cauchy's.

Die Function lg $\Gamma(a)$ und ihre Derivirte lassen sich mit ziemlicher Leichtigkeit durch verschiedene convergirende Reihen darstellen. Obwohl es nicht in unserer Absicht liegt, diese für die numerische Berechnung der Gammafunction äusserst wichtigen Entwicklungen einer eingehendern Beleuchtung zu unterziehen, wollen wir doch einige der hier nöthigen Betrachtungen wenigstens anführen, und zwar wollen wir uns zunächst mit der Entwicklung eines Theoremes befassen, das füglich zu einer der Grundlagen für die jetzt in Frage kommenden Erörterungen gemacht werden kann.

Die Gleichung 1. des vorhergehenden Paragraphen ist augenscheinlich mit der folgenden äquivalent

$$\frac{d \lg \Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} - \frac{z}{e^z - 1} e^{-(a-1)z}\right],$$

und diese lässt sich, wenn man $a$ mit $a+1$ vertauscht und $\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + R$ setzt, auch so ausdrücken:

$$\frac{d \lg \Gamma(a+1)}{da} = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-az} dz - \int_0^\infty R e^{-az} \frac{dz}{z}.$$

In andern Zeichen aber heisst dies

$$1. \qquad \frac{\partial \lg \Gamma(a+1)}{\partial a} = \lg a + \frac{1}{2a} - \int_0^\infty R e^{-az} \frac{dz}{z} \text{ *)},$$

und daher wird

$$2. \qquad \lg \Gamma(1+a) = \text{const.} + a(\lg a - 1) + \frac{1}{2} \lg a$$
$$+ \int_0^\infty \left[\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\right] \frac{e^{-az} dz}{z}.$$

---

*) Siehe Liouville: Journal de math., t. IV., p. 320.

Mit Rücksicht auf die Formeln 4. §. 49. ergiebt sich folglich, dass

3. $$G_a = \text{const.} + a\,(\lg a - 1) + \frac{1}{2}\lg a$$

sein wird, eine Relation, durch deren Hülfe wir mit Stern in sehr einfacher Weise die Constante ermitteln können, wenn wir den besondern Fall $a = \frac{1}{2}$ in Betracht ziehen. Unter dieser Voraussetzung nämlich wird einerseits

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = \text{const.} + \frac{1}{2}\lg\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lg\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \text{const.} + \lg\frac{1}{2} - \frac{1}{2},$$

andererseits hingegen ist

$$\lg \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \lg\left(\frac{1}{2}\right) + \lg\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\lg\pi + \lg\left(\frac{1}{2}\right).$$

Daher die Gleichung

$$\frac{1}{2}\lg\pi + \lg\left(\frac{1}{2}\right) = \text{const.} + \lg\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + H\left(\frac{1}{2}\right),$$

d. h.

4. $$H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\lg\pi + 1\right] - \text{const.}$$

Nun ist

$$H_a = \int_0^\infty \frac{dz}{z} e^{-az}\left[\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\right],$$

sonach

$$H\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} e^{-\frac{1}{2}z}\left[\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\right],$$

und diese Gleichung lässt sich nach einigen Reductionen in der folgenden Gestalt schreiben

$$H\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z} - \frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-z}}{2}\right].$$

Denn beachtet man, dass

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z} e^{-\frac{1}{2}z}\left[\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\right] = \int_0^\infty \frac{dz}{z} e^{-z}\left[\frac{1}{e^{2z} - 1} - \frac{1}{2z} + 1 - \frac{1}{2}\right],$$

$$\frac{e^z}{e^{2z} - 1} = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{e^{2z} - 1} \text{ und } \frac{e^{-z}}{2z} = \frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-z}}{2z}$$

ist; so kann man $H\left(\frac{1}{2}\right)$ in nebenstehender Form darstellen:

$$H\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{e^{2z}-1}+\frac{e^{-z}}{2z}-\frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z}-\frac{e^{-z}}{z}-\frac{e^{-z}}{2}+\frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z}\right]$$

$$=\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[\frac{1}{e^z-1}-\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{z}\right]-\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[\frac{1}{e^{2z}-1}-\frac{e^{-z}}{2z}\right]$$

$$+\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z}-\frac{e^{-z}}{z}-\frac{e^{-z}}{2}\right].$$

Von diesen Integralen aber verwandelt sich das erste in das zweite, wenn man $z$ mit $2z$ vertauscht, und folglich ist $H\left(\frac{1}{2}\right)$ mit dem dritten Integrale gleichgeltend.

Integrirt man jetzt die Gleichung

$$\lg s=\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-sz}}{z}\,dz$$

nach $s$ zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1, so folgt

$$\frac{1}{2}\lg 2-\frac{1}{2}=\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[e^{-z}-\frac{1}{2}e^{-z}+\frac{e^{-z}-e^{-\frac{1}{2}z}}{z}\right],$$

d. h.

$$\frac{1}{2}(1-\lg 2)=\int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z}-\frac{e^{-z}}{z}-\frac{e^{-z}}{2}\right]=H\left(\frac{1}{2}\right).$$

Vermöge der in 4. ausgedrückten Beziehung ist daher

$$\frac{1}{2}\lg\pi+\frac{1}{2}-\text{const.}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lg 2,$$

d. g.

$$\text{const.}=\frac{1}{2}\lg(2\pi).$$

Und demnach besteht nun das von Cauchy gegebene Theorem

$$\text{I. } \lg\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\lg 2\pi a + a(\lg a - 1) + \int_0^\infty \left[\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\right]\frac{e^{-az}}{z}dz.\text{*)}$$

## §. 51.

### Beweis eines Hülfssatzes. Bemerkungen über die Benutzung unendlicher Reihen.

Die Gleichung I. zeigt sich in einer andern Gestalt, wenn man statt der Function $\frac{1}{e^x-1}$ die ihr gleichgeltende unendliche Reihe $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + 2\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{x}{x^2+4r^2\pi^2}$ substituirt. Bevor wir indess die hieraus entspringende Form des obigen Integrales selbst vorführen, wird es zweckmässig sein, zunächst von der Richtigkeit der so eben angedeuteten Beziehung uns zu überzeugen und zugleich einige Bemerkungen über den Gebrauch der unendlichen Reihen in der Theorie der bestimmten Integrale einzuschalten.

In Betreff der ersten Frage nun erwähnen wir, dass man durch Zerlegung des Bruches $\frac{1}{y^{2n}-1}$ in Partialbrüche mit trinomen Nennern zuvörderst die Gleichung

$$\frac{1}{y^{2n}-1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{y^2-1} + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{y\cos\frac{r\pi}{n} - 1}{y^2 - 2y\cos\frac{r\pi}{n} + 1}$$

wird erzielen. Diese aber lässt sich mit Beachtung der Beziehungen

$$y\cos\frac{r\pi}{n} - 1 = -\frac{1}{2}\left[y^2 - 2y\cos\frac{r\pi}{n} + 1\right] + \frac{1}{2}\left[y^2 - 1\right], \quad \cos\frac{r\pi}{n} = 1 - 2\sin^2\frac{r\pi}{2n}$$

sogleich in folgender Weise ausdrücken:

$$\frac{1}{y^{2n}-1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{y^2-1} - \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{2n}\sum_1^{n-1} \frac{y^2-1}{(y-1)^2 + 4y\left(\sin\frac{r\pi}{2n}\right)^2},$$

und hieraus fliesst weiter, dass

---

*) Vergleiche Limbourg. Théorie de la fonction Gamma. Gand 1859. Cauchy. Exerc. d'anal., t. II., page 386. Paris 1841.

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{2n}\right)^{2n}-1}=\frac{1}{x+\frac{x^2}{4n}}-\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{n-1}\frac{4x+\frac{x^2}{n}}{x^2+16\left(n^2+\frac{nx}{2}\right)\left(\sin\frac{r\pi}{2n}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{x+\frac{x^2}{4n}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{1}^{n-1}\frac{4x+\frac{x^2}{n}}{x^2+4r^2\pi^2\left(\frac{\sin\frac{r\pi}{2n}}{\frac{r\pi}{2n}}\right)^2+4r\pi x\left(\frac{\sin\frac{r\pi}{2n}}{\frac{r\pi}{2n}}\right)\sin\frac{r\pi}{2n}}$$

ist. Lässt man nun $n$ über jede Grenze hinaus wachsen, so geht bekanntlich $\left(1+\frac{x}{2n}\right)^{2n}$ in $e^x$ und der Ausdruck rechts in die unendliche convergirende Reihe

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+2\sum_{1}^{\infty}\frac{x}{x^2+4r^2\pi^2}$$

über, und demnach ist

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+2\sum_{1}^{\infty}\frac{x}{x^2+4r^2\pi^2}.\text{*)}$$

Die Aufgabe endlich, bestimmte Integrale in convergente Reihen umzusetzen, ist dem Principe nach sehr leicht. Man hat dabei nur zu beachten, dass die zu integrirende Function oder — bei einer Zerlegung derselben in zwei Factoren — der eine Factor innerhalb der gegebenen Grenzen in eine convergente Reihe sich muss entwickeln lassen. Stellen alsdann die Grenzen des Integrales zunächst endliche Grössen vor, und bleibt der andere Factor endlich, so ist auch jedesmal die durch Integration erzielte Reihe convergent und hat das vorgelegte Integral zur Summe. In der That, sei

1. $\varphi(x)=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots\ldots$

die für alle Werthe von $x$ innerhalb des endlichen Intervalles $(a, b)$ convergirende Reihe, in welche der Factor $\varphi(x)$ der Function $\psi(x)=\varphi(x)f(x)$ unter dem Integralzeichen sich entwickeln lässt. Das Restglied dieser Reihe, also die Summe

*) Diese Formel findet sich schon, wenn auch in anderer Schreibweise, bei Euler. Introductio in analysin inf. §. 183.

$u_{n+1} + u_{n+2} + in\ inf.$ wollen wir mit $r_n$ bezeichnen; alsdann können wir der Gleichung 1. die Gestalt

$$2. \qquad \varphi(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + r_n$$

geben. Wird aber Gl. 2. mit $f(x)\,dx$ multiplicirt und darauf zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ integrirt, so folgt

$$3. \quad \int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,f(x)\,dx + \int_a^b u_2\,f(x)\,dx + \ldots$$
$$+ \int_a^b u_n\,f(x)\,dx + \int_a^b r_n\,f(x)\,dx.$$

Nun kann dem Begriffe einer convergenten Reihe zufolge keine der Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von $x = a$ bis $x = b$ jemals unendlich werden, und $r_n$ muss mit wachsendem $n$ der Null sich nähern. Bleibt folglich $f(x)$ innerhalb des Intervalles $(a, b)$ fortwährend stetig oder doch wenigstens endlich, so müssen offenbar die Grössen $u_1 f(x), u_2 f(x), \ldots, u_n f(x), r_n f(x)$ und demnach auch ihr algebraisch grösster und kleinster Werth von $x = a$ bis $x = b$ immer endlich sein. Nennen wir also $m_1, m_2, \ldots, m_n, \varrho_n$ die zwischen dem Maximum und Minimum beziehlich von $u_1\,f(x)$, $u_2\,f(x)$, .... innerhalb der Grenzen $a$ und $b$ liegenden Factoren von bekannter Bedeutung, so entspringt aus 3. die neue Gleichung

$$4. \int_a^b \psi(x)\,dx = m_1(b-a) + m_2(b-a) + \ldots + m_n(b-a) + \varrho_n(b-a).$$

Daraus aber folgt weiter, weil wegen $\lim r_n\,f(x) = 0$ auch $\varrho_n$ mit wachsendem $n$ der Null sich nähert, dass für ein unendlich werdendes $n$ die aus 4. entspringende Reihe zu den convergirenden gehören muss. Und gleichzeitig geht hieraus hervor, dass, wenn $\varphi(x) = \sum_1^\infty u_n$ wirklich für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ eine convergente Reihe vorstellt und $f(x)$ endlich bleibt innerhalb dieses Intervalles, auch die Gleichung

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty \int_a^b u_n\,f(x)\,dx$$

gilt.

Geht die Reihe $\varphi(x) = \sum_1^\infty u_n$ für einen der Grenzwerthe $a, b$, z. B. für $x = b$ in eine divergirende über, so wird man

zunächst diesen Werth von der Betrachtung ausschliessen, also von $x = a$ bis $x = b - \varepsilon$ integriren, so dass die Reihe $\varphi(x) = \sum_1^\infty u_n$ für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b - \varepsilon$ convergirt. Alsdann ist offenbar dem Obigen zufolge

$$\int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\, f(x)\, dx = \sum_1^\infty \int_a^{b-\varepsilon} u_n\, f(x)\, dx.$$

Bleibt nun für ein der Null sich näherndes $\varepsilon$ die Reihe $\sum_1^\infty \int_a^b u_n\, f(x)\, dx$ convergent, so muss auch

$$\lim \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\, f(x)\, dx = \lim \sum_1^\infty \int_a^{b-\varepsilon} u_n\, f(x)\, dx,$$

d. h.

$$\int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx = \sum_1^\infty \int_a^b u_n\, f(x)\, dx$$

sein.

Werden die vorhin gemachten Annahmen der Endlichkeit von $a$, $b$ und $f(x)$ nicht mehr erfüllt, so kann sehr wohl der Fall eintreten, dass die Integration auf eine völlig unbrauchbare Reihe führt. Doch darf man behaupten, dass für den Fall einer unendlichen Discontinuität von $f(x)$ zwischen $a$ und $b$ die aus 1. durch Integration erzielte neue Reihe immer convergirt, wenn $a$ und $b$ endlich bleiben, $\int_a^b f(x)\, dx$ nicht sinnlos wird und $f(x)$ innerhalb des Intervalles $(a, b)$ niemals das Zeichen wechselt*). Denn in diesem Falle würde die Reihe 4. so aussehen:

$$\int_a^b \psi(x)\, dx = m_1 \int_a^b f(x)\, dx + m_2 \int_a^b f(x) dx + \ldots + \varrho_n \int_a^b f(x)\, dx,$$

wo die Grössen $m_1, m_2, \ldots, \varrho_n$ in Bezug auf $u_1, u_2, \ldots$ die bekannte Bedeutung besitzen, und folglich muss wegen $\lim \varrho_n \int_a^b f(x)\, dx = 0$

$$\int_a^b \psi(x)\, dx = \sum_1^\infty \int_a^b u_n\, f(x)\, dx$$

sein.

*) Wenn $f(x)$ an einzelnen Stellen das Zeichen ändert, so hat man augenscheinlich eine Zerlegung des Integrales vorzunehmen und den obigen Gedankengang zu wiederholen.

Fasst man sämmtliche Einzelfälle zusammen, so ergiebt sich der Satz, dass die Benutzung unendlicher Reihen in der Theorie der bestimmten Integrale immer gestattet ist, wenn nur die durch Integration erzielte Reihe convergirt.

Lässt die Function $\varphi(x)$ nicht für den ganzen Umfang des Intervalles $(a, b)$ auf dieselbe Weise in eine convergirende Reihe sich entwickeln, so hat man natürlich eine Zerfällung des Intervalles in Theilintervalle und für jedes derselben die Entwicklung von $\varphi(x)$ in eine convergente Reihe vorzunehmen. Soll z. B. das früher gefundene Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1$$

durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden, so würde hier eine Zerlegung des Integrales in die beiden folgenden

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} \text{ und } \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$$

eintreten müssen. In dem erstern wäre $\frac{1}{1+x}$ nach steigenden, in dem zweiten Integrale hingegen nach fallenden Potenzen von $x$ zu entwickeln. Man erhielte folglich wegen

$$\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^s x^s, \; x < 1 \text{ und } \frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{1}{x^{s+1}}, \; x > 1:$$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{1}{a+s}, \quad \int_1^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^s \frac{1}{a-s-1},$$

also

$$\pi \operatorname{cosec} a\pi = \sum_0^\infty (-1)^s \left[\frac{1}{a+s} + \frac{1}{a-s-1}\right].$$

Wollte man dagegen das Integral $\int_0^\infty \frac{\cos cx}{k^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{k}\,e^{-kc}$, $c > 0$, $k > 0$*) in der Weise behandeln, dass man $\cos cx$

*) Dieses von Laplace gefundene Integral werden wir später entwickeln.

durch die stets convergirende Reihe $\cos c x = \sum_{0}^{\infty} (-1)^s \frac{(cx)^{2s}}{2s!}$ ersetzte, so folgte durch Integration ein sinnloses Resultat.

## §. 52.

### Umformung der Cauchy'schen Gleichung.

Ersetzen wir jetzt in dem Integrale

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right] \frac{e^{-ax}}{x} dx$$

den in der Klammer befindlichen Ausdruck durch die unendliche Reihe $2 \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 4r^2\pi^2}$, so erhalten wir die Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx \, 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 4r^2\pi^2} = \sum_{1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{2e^{-ax} dx}{x^2 + 4r^2\pi^2}.$$

Nun folgt aber sogleich durch Vertauschung von $x$ mit $2 r \pi x'$, dass

$$\int_0^\infty \frac{2e^{-ax} dx}{x^2 + 4r^2\pi^2} = \frac{1}{r\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-2ar\pi x} dx}{1 + x^2},$$

und daher wird

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) dx \text{ in } \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{r\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-2ar\pi x}}{1 + x^2} dx$$

übergehen. Vorläufig machen wir natürlich den obigen Bemerkungen gemäss hierbei immer die stillschweigende Voraussetzung, dass die erzeugte Reihe auch wirklich den convergirenden zuzuzählen ist. Davon aber werden wir uns sofort überzeugen, wenn wir das Integral $\int \frac{e^{-2r a\pi x}}{1 + x^2} dx$ vorerst zwischen den endlichen und positiven Grenzen $p$ und $q$ nehmen, also die ihm vorhergehenden Integrale ebenfalls auf solche Intervalle beschränken. Denn dadurch gewinnen wir die gewiss richtige Gleichung

$$\sum_1^\infty \frac{1}{r\pi}\int_p^q \frac{e^{-2ra\pi x}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_p^q \frac{dx}{1+x^2}\sum_1^\infty \frac{e^{-2ra\pi x}}{r},$$

und hieraus fliesst mit Beachtung der bekannten für $0 \leq u < 1$ Statt findenden Reihe

$$-\lg(1-u) = \lg\frac{1}{1-u} = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots\ldots,$$

also

$$\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}} = \sum_1^\infty \frac{e^{-2ra\pi x}}{r},$$

die andere Relation

$$\sum_1^\infty \frac{1}{r\pi}\int_p^q \frac{e^{-2ra\pi x}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_p^q \frac{dx}{1+x^2}\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}.$$

Nun bedenke man zuvörderst, dass in Folge der Beziehung

$$\int_p^q \frac{\partial x}{1+x^2}\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}} = R\int_p^q \frac{\partial x}{1+x^2}$$

mit wachsendem $p$ und $q$ das Integral rechts zuletzt ein beliebig kleines Quantum nicht mehr zu überschreiten vermag, dass also für eine unendlich werdende obere Grenze das Integral $\int^\infty \frac{dx}{1+x^2}\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}$ nicht sinnlos wird. Und andererseits erwäge man, dass auch für unendlich klein werdende Grössen $p$ und $q$

$$\int_p^q \frac{\partial x}{1+x^2}\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}} = -R\int_p^q \lg(1-e^{-2a\pi x})\,dx$$

$$= -R\left[x\lg(1-e^{-2a\pi x})\right]_p^q + R\,.\,2a\pi\int_p^q \frac{xe^{-2a\pi x}\,dx}{1-e^{-2a\pi x}}$$

unter jeden angebbaren Werth sinken wird. Alsdann wird offenbar das Resultat aller dieser Betrachtungen in der Gleichung sich aussprechen:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{r\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-2ra\pi x}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}.$$

Mit Benutzung dieser Relation nimmt folglich das Theorem I. nunmehr die Form

$$\text{II.}\quad \lg\Gamma(1+a)=\tfrac{1}{2}\lg(2\pi a)+a(\lg a-1)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}$$

an, welche, wie Limbourg in seiner „Théorie de la fonction Gamma“ bemerkt, von Schaar herrührt*).

## §. 53.

### Stirling'sche Formel.

Gestützt auf die vorhergehenden Betrachtungen kann man mit grosser Leichtigkeit $\lg\Gamma(1+a)$ in die bekannte Stirling'sche Reihe auflösen. Zu dem Behufe bemerke man zunächst, dass

$$\frac{1}{1+x^2} \text{ mit } 1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{m-1}x^{2m-2}+(-1)^m\frac{x^{2m}}{1+x^2}$$

gleichbedeutend und sonach

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2}\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dx\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}\left[1-x^2+\ldots+(-1)^{m-1}x^{2m-2}\right]$$

$$+(-1)^m\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{x^{2m}}{1+x^2}\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}\,dx$$

ist. Ersetzt man nun hierauf wieder in dem ersten Integrale rechts $\lg\frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}$ durch die unendliche Reihe $\sum\limits_1^\infty\frac{e^{-2ra\pi x}}{r}$, so ist jedes Glied desselben ersichtlich in der Form

$$\sum_1^\infty\frac{1}{r}\int\limits_0^\infty e^{-2ra\pi x}x^{2q}\,dx=\frac{\Gamma(2q+1)}{a^{2q+1}}\,\frac{1}{(2\pi)^{2q+1}}\sum_1^\infty\frac{1}{r^{2q+2}}$$

enthalten, wobei natürlich die ganze Zahl $q$ und $ra$ positiv vorausgesetzt sind.

---

*) Mémoires de l'Académie de Bélgique, tome XII.

Definirt man aber die $(q+1)^{ste}$ Bernoulli'sche Zahl durch die Gleichung

$$B_{q+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2(q+1)}{2^{2q+1}\pi^{2q+2}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^{2q+2}},$$

so ist

$$\frac{\Gamma(2q+1)}{a^{2q+1}} \frac{1}{(2\pi)^{2q+1}} \sum_1^\infty \frac{1}{r^{2q+2}} = \frac{\pi}{a^{2q+1}} \frac{B_{q+1}}{(2q+1)(2q+2)}.$$

Und daher wird jetzt, wenn man $q = 0, 1, \ldots, m-1$ schreibt,

$$\text{III.} \quad \lg \Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\lg(2\pi a) + a(\lg a - 1) + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{a^3}$$

$$+ \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{a^5} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1).2m}\frac{1}{a^{2m-1}}$$

$$+ (-1)^m \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2} \lg \frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}\,dx.$$

Mit der grössten Leichtigkeit lässt sich jedoch das hier vorkommende von Schaar*) gegebene Restglied ebenfalls in einer den vorhergehenden Gliedern analogen Form ausdrücken. Ersetzt man nämlich auch hier $\lg \frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}$ durch die unendliche Reihe $\sum_1^\infty \frac{e^{-2ra\pi x}}{r}$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2} \lg \frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}\,dx = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2} e^{-2ra\pi x}\,dx.$$

Nun ist aber dem bekannten Maximum-Minimum-Satze zufolge

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2} e^{-2ra\pi x}\,dx = \vartheta \int_0^\infty e^{-2ra\pi x} x^{2m}\,dx = \vartheta \frac{\Gamma(2m+1)}{(2r\pi a)^{2m+1}},$$

wo $\vartheta$ augenscheinlich zwischen 0 und 1 liegt; mithin wird

*) Auch Bauer (Crelle. Journal, Bd. 57, Seite 272) ist auf diese Restform geführt worden.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2} \lg \frac{1}{1-e^{-2a\pi x}}\, dx = \vartheta \frac{1}{a^{2m+1}} \frac{\Gamma(2m+1)}{2^{2m+1}\,\pi^{2m+2}} \sum_1^\infty \frac{1}{r^{2m+2}}$$

$$= \vartheta \frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \frac{1}{a^{2m+1}}$$

und sonach

$$\text{III}^a.\quad \lg\Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\lg(2\pi a) + a(\lg a - 1) + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{a} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{a^3} + \cdots$$

$$+ (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m-1).2m} \frac{1}{a^{2m-1}} + (-1)^m.\vartheta \frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \frac{1}{a^{2m+1}}.$$

Kaum nöthig ist übrigens wohl die Bemerkung, dass diese letztere Gleichung unmittelbar aus dem Theoreme I. hätte erzielt werden können.

Die Formeln III. und III$^a$. gehen in die nach Stirling benannte Reihe über, wenn man $m$ ins Unendliche wachsen lässt. Sie besitzt die Eigenthümlichkeit, dass sie, obgleich divergent, zur numerischen Berechnung der Function Gamma vorzüglich geeignet ist. Ausführliche Betrachtungen hierüber können in Limbourg's Theorie der Gammafunction eingesehen werden. In dem Folgenden wollen wir, um diese Untersuchungen nicht gänzlich mit Stillschweigen zu behandeln, aus Serret's „Cours de calcul différentiel et intégral, tome II.“ eine hierauf bezügliche Entwicklung entlehnen.*)

---

*) Man vergl. auch Raabe's Untersuchungen im Crelle'schen Journale, Bd. 25, Seite 146 ff.; Bd. 28, Seite 10 ff. — Ferner mögen behufs weiter gehender Studien erwähnt werden die Arbeiten von: Jacobi. Crelle, Journal. Bd. 12, S. 263. Bessel. Astron. Nach. Bd. 16, Nr. 361. Poisson. Mémoires de l'Acad. des sciences, tome 6. Binet. Journal de l'école pol. cah. 27. Cauchy. Journal de l'école poly. cah. 28. Cauchy. Exerc. d'analyse; t. 2, livraison 24, p. 396--398. Stern. Beiträge etc. Malmstèn. Crelle, Journal. Bd. 35, S. 55. Lipschitz. Crelle, Journal. Bd. 56, S. 11. Bauer. Crelle, Journal. Bd. 57, S. 256. Catalan. Comp. rend. 1858, Nr. 14. Schlömilch. Ueber die Bernoulli'sche Function etc. in der Zeitschrift für Math. u. Physik, Jahrgang 1, Nr. XI., S. 193. Gasparis. Giornale di mat. 1868, p. 16. Ossian Bonnet. Sur la formule de Stirling. Compt. rend. L. 862.

## §. 54.

### Näherungsweise Berechnung von lg $\Gamma(1+a)$ mittelst der Stirling'schen Reihe.

Dass, wie oben bemerkt, die Stirling'sche Reihe in der That den divergirenden zuzuzählen ist, ergiebt sich sofort aus nachstehenden Bemerkungen.

Wir haben vorhin die $m^{te}$ Bernoulli'sche Zahl durch die Gleichung definirt:

$$B_m = 2 \cdot \frac{1.2.3 \ldots\ldots (2m-1) 2m}{2\pi . 2\pi . 2\pi \ldots\ldots 2\pi . 2\pi}\left[1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \cdots\right] = \frac{2m!}{2^{2m-1}\,\pi^{2m}} S_{2m},$$

wo $S_{2m}$ der Kürze halber statt der Reihe $1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \ldots$ gesetzt ist. Das Glied $\frac{B_m}{(2m-1)2m}\,\frac{1}{a^{2m-1}}$ der Stirling'schen Reihe wird daher in der Form

$$\frac{1}{2a\pi} \cdot \frac{2}{2a\pi} \cdot \frac{3}{2a\pi} \cdots\cdots \frac{2m-2}{2a\pi} \cdot \frac{1}{2a\pi^2} S_{2m}$$

sich darstellen lassen. In ihr aber nähert sich mit stets wachsendem $m$ der Ausdruck $\frac{1}{2a\pi^2} S_{2m}$ der Grenze $\frac{1}{2a\pi^2}$, während der andere Factor mit $m$ ins Unendliche wächst; mithin muss Stirling's Reihe zu den divergirenden gehören. Ihre genauere Benennung als halbconvergente Reihe werden wir erst weiter unten begründen können.

Der Rest in der Gleichung III$^a$. wird numerisch durch den Ausdruck $\vartheta \frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)}\,\frac{1}{a^{2m+1}}$ vorgestellt. Offenbar muss daher der Fehler, welchen man durch das Abbrechen der Stirling'schen Reihe bei irgend einem Gliede begeht, seiner absoluten Grösse nach kleiner als das erste der vernachlässigten Glieder sein. Vermehrt man folglich den ungenauen Werth von lg $\Gamma(1+a)$ durch das erste der unterdrückten Glieder, so erhält man ersichtlich einen zu grossen Werth für lg $\Gamma(1+a)$. Schreibt man also z. B. statt lg $\Gamma(1+a)$ bloss

$\frac{1}{2}$ lg $(2\pi a) + a\,(\lg a - 1)$; so muss wegen $B_1 = \frac{1}{6}$ die Beziehung Statt finden:

$$\lg \Gamma(1+a) < \frac{1}{2} \lg (2\pi a) + a\,(\lg a - 1) + \frac{1}{12a};$$

andererseits aber ist

$$\lg \Gamma(1+a) > \frac{1}{2} \lg (2\pi a) + a \lg a - a.$$

Und demnach ergiebt sich durch Uebergang von den Logarithmen zu den entsprechenden Zahlen der wichtige Satz

$$1. \quad \sqrt{2\pi}\, a^{a+\frac{1}{2}} e^{-a} < \Gamma(1+a) < \sqrt{2\pi}\, a^{a+\frac{1}{2}} e^{-a+\frac{1}{12a}}.$$

Hierauf aber gestützt, kann man sofort zwei Grenzen bestimmen, zwischen denen die $n^{te}$ Bernoulli'sche Zahl sich befinden muss, und von denen die obere für die nachfolgende Betrachtung von Wichtigkeit ist. Denn setzt man in

$$B_n = \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} S_{2n}$$

für die Grösse $S_{2n}$ die Einheit, so ist

$$B_n > \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n}};$$

und nimmt man in

$$\frac{B_n}{B_1} = \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}} \frac{S_{2n}}{S_2}$$

anstatt des Quotienten $\frac{S_{2n}}{S_2}$ ebenfalls die Zahl 1, so wird

$$B_n < \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}} \cdot \frac{1}{6}.$$

Mit Berücksichtigung der unter 1. dargestellten Ungleichheit wird daher auch

$$2. \quad \frac{1}{12} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{n-\frac{5}{2}}} e^{-2n+\frac{1}{24n}} > B_n > 2 \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{1}{2}}} e^{-2n}$$

sein müssen.

Endlich folgt noch aus

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4n^2} \frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}$$

die Beziehung

$$3. \quad \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{B_n}{4\pi^2}.$$

Bezeichnen wir jetzt mit $u_n$ den absoluten Werth des

allgemeinen Gliedes $(-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n-1)\,2n} \frac{1}{a^{2n-1}}$ der Stirling'schen Reihe, so entspringt aus

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a^2} \frac{(2n-1)\,2n}{(2n+1)(2n+2)} \frac{B_{n+1}}{B_n}$$

mit Rücksicht auf die Ungleichheit 3.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{(2n-1)\,2n}{4a^2\pi^2},$$

und folglich ist um so mehr

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n^2}{a^2\pi^2} \text{ und } \frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{3a}\right)^2.$$

So lange demnach $n < 3a$ ist, so lange wird auch $u_{n+1} < u_n$ sein. Die Stirling'sche Reihe wird folglich für $a > 1$ in ihren ersten Gliedern Convergenz zeigen, und zwar wird diese, wenn $a$ eine ganze Zahl ausdrückt, gewiss bis zu dem Gliede währen, dessen Bernoulli'sche Zahl den Index $3a$ besitzt.

Setzt man z. B. $a = 10$ und $\frac{u_{31}}{u_{30}} = r$, so ist $r < 1$; ferner aber hat man

$$\frac{u_2}{u_1} < \left(\frac{1}{30}\right)^2 < r, \text{ mithin } u_2 < u_1\, r;$$

$$\frac{u_3}{u_2} < \left(\frac{2}{30}\right)^2 < r, \text{ d. g. } u_3 < u_1\, r^2;$$

$$\frac{u_4}{u_3} < \left(\frac{3}{30}\right)^2 < r, \text{ d. i. } u_4 < u_1\, r^3 \text{ u. s. f.}$$

Die Reihe $u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + u_{31}$ ist also gewiss kleiner, als die geometrische

$$u_1(1 + r + r^2 + \ldots + r^{30}) = u_1 \frac{1 - r^{31}}{1 - r}.$$

Um die erwähnte Eigenschaft der Stirling'schen Reihe gleich im Namen anzudeuten, nennt man sie nach Lagrange*), wie überhaupt die Reihen von ähnlichem Charakter, **halbconvergirend**.

Heisst nun $\varepsilon_n$ der Zahlenwerth des begangenen Fehlers,

*) Siehe Enke. Crelle. Journal Bd. 28. S. 214. Vergl. auch Legendre. Traité des fonct. ell. etc. T. II. p. 397, 428.

wenn die Stirling'sche Reihe nur bis zum Gliede

$$(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)\,2n\,a^{2n-1}}$$

fortgesetzt wird: so ist dem Frühern zufolge

$$\varepsilon_n < \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)\,a^{2n+1}},$$

d. h. wegen der Ungleichheit 3.

$$\varepsilon_n < \frac{B_n}{4\pi^2\,a^{2n+1}}.$$

Aber nach 2. ist

$$B_n < \frac{1}{12}\,\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{5}{2}}}\,e^{-2n+\frac{1}{24n}},$$

folglich muss auch

$$\varepsilon_n < \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{n\pi}}{a}\left(\frac{n}{ea\pi}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}}$$

sein. Wählt man also für ein ganzes $a$ die Zahl $n = 3a$, so ist

$$\varepsilon_{3a} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{6a-\frac{1}{2}}\cdot e^{-6a+\frac{1}{72a}}\cdot a^{-\frac{1}{2}},$$

d. h., weil $a$ wenigstens $= 1$ sein wird,

$$\varepsilon_{3a} < \frac{1}{6}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{12}} e^{\frac{1}{72}}\,e^{-6a}\,a^{-\frac{1}{2}}.$$

Man kann diesen Ausdruck für den praktischen Gebrauch bequemer schreiben, wenn man beachtet, dass

$$\frac{1}{6}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{12}} e^{\frac{1}{72}} = 0{,}393409\ldots$$

ist; denn nun wird

$$\varepsilon_{3a} < 0{,}393409\ldots e^{-6a}\,a^{-\frac{1}{2}}.$$

Nimmt man z. B. $a = 10$, so kann man $\lg\Gamma(1+a)$ bis zur 27. Decimale berechnen, wenn man die Stirling'sche Reihe bei dem mit $B_{30}$ multiplicirten Gliede abbricht.

## §. 55.

### Näherungsformeln für $\Gamma(a+n)$, $\Gamma(n+1)$, wenn $n$ sehr gross ist.

Das Theorem 1. des vorhergehenden Paragraphen lässt sich für den Fall eines sehr grossen $a$ in einer Gleichung dar-

stellen, aus der man ohne Mühe die bekannten Näherungsformeln für $\Gamma(a+n)$ und $\Gamma(n+1)$, in denen die ganze Zahl $n$ sehr gross vorausgesetzt ist, wird ablesen können. Vertauschen wir behufs Herleitung dieser Formeln in den Ungleichheiten 1. das Argument $a$ mit $a+n$, wo $n$ also eine ganze Zahl bezeichnen soll; so ist

$$\sqrt{2\pi}\,(a+n)^{a+n+\frac{1}{2}}\,e^{-(a+n)+\frac{1}{12(a+n)}} > \Gamma(a+n+1)$$
$$> \sqrt{2\pi}\,(a+n)^{a+n+\frac{1}{2}}\,e^{-(a+n)}$$

Nun nähert sich mit wachsendem $n$ die Exponentialgrösse $e^{\frac{1}{12(a+n)}}$ der Einheit, und daher wird man offenbar schreiben können:

$$1.\quad \Gamma(a+n+1) = \sqrt{2\pi}\,(a+n)^{a+n+\frac{1}{2}}\,e^{-(a+n)}\,[1+\varepsilon_n],$$

wenn man unter $\varepsilon_n$ eine für $n=\infty$ in Null übergehende Grösse versteht. Beachtet man aber, dass $(a+n)^{a+n+\frac{1}{2}}$ mit $n^{a+n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^{a+\frac{1}{2}}$ identisch ist und dass für $n=\infty$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a,\quad \left(1+\frac{a}{n}\right)^{a+\frac{1}{2}} = 1$$

wird; so kann man auch in folgender Weise Gleichung 1. ausdrücken:

$$2.\quad \Gamma(a+n+1) = \sqrt{2\pi}\;n^{a+n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}\,(1+\varepsilon_n),$$

wo auch hier wie immer unter $\varepsilon_n$ eine mit unendlich werdendem $n$ verschwindende Grösse verstanden wird.

Ganz auf dieselbe Art, einfacher indess durch Vertauschung von $a$ mit $a-1$, findet sich ferner die Beziehung

$$2^a.\qquad \Gamma(a+n) = \sqrt{2\pi}\;n^{a+n-\frac{1}{2}}\,e^{-n}\,(1+\varepsilon_n).$$

Da nun $\Gamma(a+n) = (a+n-1)\,(a+n-2)\,\ldots\,a\,\Gamma(a)$ ist, so hat man für ein sehr grosses $n$ nahezu die Gleichung

$$3.\ a(a+1)\,(a+2)\ldots(a+n-1) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)}\,n^{a+n-\frac{1}{2}}\,e^{-n}.$$

Und setzt man in Gleichung 2. $a = 0$, so wird

$$1 . 2 . 3 \ldots n = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} [1 + \varepsilon_n],$$

also näherungsweise wieder

$$1 . 2 . 3 \ldots n = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

gesetzt werden dürfen. Unmittelbar ist jedoch diese Beziehung aus dem oben in §. 54. entwickelten Theoreme 1. abzulesen.

Wählt man endlich für $a$ den besondern Werth $\frac{1}{2}$, so kommt vermöge der Formel 3. die nahezu richtige Gleichung

$$1 . 3 . 5 \ldots (2n - 1) = \sqrt{2}\, (2n)^n e^{-n}.$$

## §. 56.

### Entwicklung von $\lg \Gamma(1 + a)$ in convergirende Reihen.

Wie schon früher angedeutet wurde, lässt sich $\lg \Gamma(1+a)$ ohne Schwierigkeit in convergirende Reihen entwickeln, und zwar leistet hierzu das oben erwähnte Cauchy'sche Theorem vorzügliche Dienste. Wir verweisen in dieser Beziehung namentlich auf Limbourg's schon angeführte „Théorie de la fonction Gamma". Abgesehen hiervon aber kann man auch in folgender Weise zu convergenten Reihen für $\lg \Gamma(a)$ und $\frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a}$ gelangen.

Differentiiren wir z. B. die Gauss'sche Gleichung

$$1. \qquad \frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} = \int_0^\infty dz \left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-az}}{1 - e^{-z}}\right]$$

nach $a$, so entspringt die andere

$$\frac{\partial^2 \lg \Gamma(a)}{\partial a^2} = \int_0^\infty \frac{z\, e^{-az}}{1 - e^{-z}}\, dz.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{1 - e^{-z}} = 1 + e^{-z} + e^{-2z} + e^{-3z} + \ldots,$$

also

$$2. \qquad \frac{\partial^2 \lg \Gamma(a)}{\partial a^2} = \sum_0^\infty \frac{1}{(a + s)^2}.$$

Es ist dies die für jedes $a$ convergirende Reihe, mit deren Hülfe Legendre das gleichfalls von ihm, jedoch später entdeckte Gauss'sche Fundamentaltheorem ableitet. Wird dieselbe nach $a$ zwischen den Grenzen 1 und $a$ integrirt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf Gleichung 1. die für jedes positive $a$ Statt findende Beziehung

$$3.\ \frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} = -\int_0^\infty \left[\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right] e^{-z}\, dz + \sum_0^\infty \left[\frac{1}{1+s} - \frac{1}{a+s}\right].$$

Augenscheinlich bedeutet in ihr das Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right) e^{-z}\, dz$$

eine numerische Constante, die man ihrem Entdecker zu Ehren die Euler'sche Constante genannt hat. In seiner Differentialrechnung (Thl. 2. §. 143) hat Euler ihren Werth

$$C = 0{,}577215664901 5325$$

gegeben und diesem sind später von Legendre in den auf die 15. Decimale folgenden Stellen noch die Zahlen 8606 hinzugefügt*).

Schreiben wir also statt des Integrales einfach $C$, und integriren wir hierauf Gleichung 3. zwischen den Grenzen 1 und $a$; so bekommen wir eine convergirende Reihe für $\lg \Gamma(a)$, nämlich

$$4.\quad \lg \Gamma(a) = -C(a-1) + \sum_0^\infty \left[\frac{a-1}{1+s} - \lg \frac{a+s}{1+s}\right].$$

Für $a = 2$ ist daher

$$4^a.\qquad 0 = -C + \sum_0^\infty \left[\frac{1}{1+s} - \lg \frac{2+s}{1+s}\right],$$

und folglich wird, wenn man diese letztere Gleichung mit $a - 1$ multiplicirt und das entstandene Resultat von 4. abzieht,

$$5.\ \lg \Gamma(a) = \sum_0^\infty \left[(a-1) \lg \frac{1+1+s}{1+s} - \lg \frac{a-1+1+s}{1+s}\right]$$

oder

*) Kinkelin nennt (Crelle's Journal, Bd. 57, Seite 128) $C$ die Mascheroni'sche Constante.

$$5^a.\ \lg \Gamma(a) = \sum_1^\infty \left[(a-1)\lg\left(1+\frac{1}{s}\right) - \lg\left(1+\frac{a-1}{s}\right)\right].$$

Bemerkenswerth ist diese Reihe vorzüglich desshalb, weil man von ihr sogleich zu der Euler'schen, von Gauss als Definitionsgleichung der Gammafunction benutzten Formel übergehen kann. In der That, schreiben wir $5^a$. in der Gestalt

$$\lg \Gamma(a) = \sum_1^s \lg \frac{\left(\frac{s+1}{s}\right)^{a-1} s}{a+s-1} + \lg(1+\varepsilon_s),$$

wo $\lg(1+\varepsilon_s)$ das Restglied der Reihe bezeichnet und das ihrer Convergenz zufolge für $s=\infty$ verschwinden muss; so ergiebt sich durch den Uebergang von den Logarithmen zu den entsprechenden Zahlen sofort die Beziehung

$$\Gamma(a) = e^{\sum_1^s \lg \frac{\left(\frac{s+1}{s}\right)^{a-1} \cdot s}{a+s-1}} (1+\varepsilon_s) = e^{\lg \prod_1^s \left(\frac{s+1}{s}\right)^{a-1} \frac{s}{a+s-1}} (1+\varepsilon_s)$$

oder

$$\Gamma(a) = \frac{1.2.3\ldots s}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+s-1)} s^{a-1}(1+\varepsilon_s)\left(1+\frac{1}{s}\right)^{a-1}.$$

Beachtet man aber, dass für $s=\infty$ der Factor $\left(1+\frac{1}{s}\right)^{a-1}$ mit der Zahl 1 zusammenfällt, so kann man einfacher

$$\Gamma(a) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,s}{a(a+1)\ldots(a+s-1)} s^{a-1}(1+\delta_s)$$

schreiben, wo also jetzt $\lim \delta_s = 0$ ist.

Endlich mag noch bemerkt werden, dass aus $4^a$. die Beziehung erwächst

$$C = \lim\left[\sum_1^s \frac{1}{s} - \lg s\right], \ \{\lim s = \infty\}$$

und dass folglich für ein hinreichend grosses $s$ näherungsweise mit Euler

$$C = \sum_1^s \frac{1}{s} - \lg s$$

gesetzt werden darf.

## §. 57.

### Fortsetzung.

Bezeichnen wir für den Augenblick $\lg \Gamma(1+a)$ durch das Symbol $\psi(a+1)$, so erhalten wir dem Tayler'schen Theoreme zufolge die Beziehung

$$1.\quad \psi(1+a)=\psi(1)+a\psi'(1)+\frac{a^2}{1.2}\psi''(1)+\ldots+\frac{a^n}{n!}\psi^n(1+a\vartheta),$$

wo $\vartheta$ eine zwischen 0 und 1 befindliche Zahl ausdrückt. Nun folgt aber durch $n-2$malige Differentiation aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \lg \Gamma(1+a)}{\partial a^2} = \sum_0^\infty \frac{1}{(a+1+s)^2}$$

die andere

$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n \lg \Gamma(a+1)}{\partial a^n} = \frac{(-1)^n}{n}\sum_0^\infty \frac{1}{(a+1+s)^n},$$

und diese bleibt, sofern $n > 1$ ist, für jedes zwischen $-1$ und einer beliebigen positiven obern Grenze enthaltene $a$ in Kraft. Mithin muss für $a = 0$

$$\frac{1}{n!}\psi^n(a+1) = \frac{(-1)^n}{n}\sum_1^\infty \frac{1}{s^n}$$

sein, und folglich wird für hinlänglich grosse $n$ der Quotient

$$\frac{\frac{a^{n+1}}{n+1!}\psi^{n+1}(1+a\vartheta)}{\frac{a^n}{n!}\psi^n(1+a\vartheta)}$$

seiner absoluten Grösse nach gewiss unter 1 liegen, wenn $a$ eine zwischen $-1$ und $+1$ befindliche Zahl vorstellt. Daraus aber fliesst einem bekannten Satze*) zufolge sogleich weiter,

*) Bezeichnet $u_1, u, \ldots u_n, \ldots$ eine Reihe endlicher Grössen von der Art, dass für sehr grosse $n$ fortwährend ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

so ist

$$\lim u_n = 0,$$

wo lim auf ein unendlich werdendes $n$ sich bezieht.

dass $\psi(1+a)$ für den angeführten Fall immer in eine convergirende Reihe sich muss entwickeln lassen. Bezeichnen wir also die Summe der reciproken $n^{ten}$ Potenzen der natürlichen Zahlen kurz durch $S_n$, und beachten wir ausserdem noch, dass $\psi(1) = 0$ und $\psi'(1)$ mit $-C$ gleichbedeutend ist: so wird jetzt

$$2. \quad \lg \Gamma(1+a) = -aC + \frac{a^2}{2} S_2 - \frac{a^3}{3} S_3 + \frac{a^4}{4} S_4 - \ldots$$

Zwar ist diese Reihe für die numerische Berechnung der Gammafunction nicht sehr zweckmässig, weil die $S$ nicht rasch genug abnehmen, indess kann man mit ihrer Hülfe sogleich eine stärker convergirende Reihe erzielen, wenn wir die einzelnen Glieder unserer Reihe mit den entsprechenden der folgenden

$$0 = -\lg(1+a) + a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \ldots$$

durch Addition verbinden. Dadurch nämlich entspringt

$$3. \quad \lg \Gamma(1+a) = a(1-C) - \lg(1+a) + \frac{a^2}{2}(S_2 - 1)$$
$$- \frac{a^3}{3}(S_3 - 1) + \frac{a^4}{4}(S_4 - 1) - \ldots,$$

und folglich ist auch

$$4. \quad \lg \Gamma(1-a) = -a(1-C) - \lg(1-a) + \frac{a^2}{2}(S_2 - 1)$$
$$+ \frac{a^3}{3}(S_3 - 1) + \frac{a^4}{4}(S_4 - 1) + \ldots.$$

Erwägt man jetzt weiter, dass

$$a\Gamma(a) = \Gamma(a+1), \quad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1,$$

also

$$\lg \Gamma(1+a) + \lg \Gamma(1-a) = \lg \frac{\pi a}{\sin a\pi}$$

ist, so erhält man durch Verbindung dieses Resultates mit den Gleichungen 3. und 4. die Legendre'sche:

$$5. \quad \lg \Gamma(1+a) = a(1-C) - \frac{1}{2}\lg\frac{1+a}{1-a} + \frac{1}{2}\lg\frac{\pi a}{\sin a\pi}$$
$$- \frac{a^3}{3}(S_3 - 1) - \frac{a^5}{5}(S_5 - 1) - \frac{a^7}{7}(S_7 - 1) - \ldots$$

In ihr braucht man nur $a$ von 0 bis $\frac{1}{2}$ zu wählen, um mit grosser Annäherung sämmtliche Gamma berechnen zu können, indem ja alle übrigen Gamma auf die, deren Argument

zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt, sich zurückführen lassen. Die vorherige Bestimmung der Grössen $S$ ist freilich etwas unbequem, doch kann man diese umgehen, wenn man sich der von Legendre in seinem „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, tome II.“ gegebenen Tafel bedient, welche die $S$ von $n = 2$ bis $n = 35$ bis auf 16 Decimalen in sich begreift.

Auch die Euler'sche Constante hat Legendre mittelst der Gleichung 5 von neuem berechnet, indem er in ihr einerseits $a = 1$, andererseits hingegen $a = \frac{1}{2}$ nimmt. Und endlich hat er sie zur nähern Bestimmung des früher erwähnten Minimums der Gammafunction benutzt. Dasselbe findet für $a = 1{,}4616321451105\ldots$ Statt und wird durch den Werth $\Gamma(a) = 0{,}8856032\ldots$ vorgestellt.

## §. 58.

### Darstellung von $\frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a}$ durch eine endliche Reihe für den Fall eines rationalen Argumentes.

Zu den vielen interessanten Eigenschaften der Gammafunction gehört auch die, dass $\frac{d \lg \Gamma(a)}{da}$ in eine endliche Reihe sich entwickeln lässt, wenn das Argument $a$ eine rationale Zahl ausdrückt. Addirt man nämlich die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} = \int_0^\infty dz \left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-az}}{1 - e^{-z}}\right]$$

und

$$C = -\int_0^\infty dz \left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}}\right],$$

so folgt

$$\frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} + C = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{1 - e^{-z}}\, dz;$$

und hieraus entspringt durch Einführung der neuen Veränderlichen $x = e^{-z}$

$$1. \qquad \frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} + C = \int_0^1 \frac{1 - x^{a-1}}{1 - x}\, dx.$$

Setzt man nun $a$ mit dem Quotienten $\frac{m}{n}$ der beiden ganzen Zahlen $m$ und $n$ als gleichbedeutend voraus, und substituirt man überdies statt $x$ die Grösse $x^n$; so erhält man augenblicklich die Gleichung

$$\frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} + C = n \int_0^1 \frac{x^{n-1} - x^{m-1}}{1 - x^n}\, dx,$$

in der die Function $\frac{x^{n-1} - x^{m-1}}{1 - x^n}$ augenscheinlich einen rationalen Bruch vorstellt. Das Integral ist mithin auf Elementarfunctionen zurückführbar, also beispielsweise für $a = \frac{2}{3}$

$$\frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} + C = 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3}\sqrt{3} - \lg 3 = \frac{\pi}{3} - \lg 3.$$

Bezeichnet endlich in Gleichung 1. $a$ eine ganze Zahl, so wird

$$\frac{\partial \lg \Gamma(a)}{\partial a} + C = \int_0^1 [1 + x + x^2 + \ldots + x^{a-2}]\, dx$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{a-1}.$$

### §. 59.

**Stern's Beweis der Raabe'schen Formel**

$$\int_0^1 \lg \Gamma(x+k+1)\, dx = (k+1) \lg (k+1) - (k+1) + \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

Die früher bewiesene Gleichung

$$\lg \Gamma(x+1) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[ e^{-z} x - \frac{1}{e^z - 1} + \frac{e^{-xz}}{e^z - 1} \right]$$

gestattet eine interessante Folgerung, wenn man statt $x + 1$ das Argument $x + k + 1$ wählt, wo $k$ eine positive Zahl ausdrückt, und hierauf $\lg \Gamma(x + k + 1)$ nach $x$ zwischen den

Grenzen 0 und 1 integrirt. Dadurch nämlich erhält man die Beziehung

$$\int_0^1 \lg \Gamma(x+k+1)dx = \int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[e^{-z}\left(k+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{e^z-1} + \frac{e^{-(k+1)z}}{z}\right].$$

Andererseits aber ist nach §. 49.

$$G_{(k+1)} = \int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[e^{-z}(k+1) - \frac{1}{e^z-1} + \frac{e^{-(k+1)z}}{z} - \frac{e^{-(k+1)z}}{2}\right],$$

mithin ergiebt sich durch Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten

$$\int_0^\infty \lg \Gamma(x+k+1)\,dx = G_{k+1} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-(k+1)z}}{z}\,dz$$

$$= G_{k+1} - \frac{1}{2}\lg(k+1).$$

Weil nun den in §. 50. gepflogenen Betrachtungen zufolge das Integral $G_{k+1}$ mit

$$\frac{1}{2}\lg 2\pi + (k+1)\lg(k+1) - (k+1) + \frac{1}{2}\lg(k+1)$$

äquivalent ist, so muss die Relation bestehen

$$\int_0^1 \lg \Gamma(x+k+1)\,dx = \frac{1}{2}\lg 2\pi + (k+1)\lg(k+1) - (k+1).$$

Gefunden, wenn auch nicht in der Allgemeinheit wie hier, ist dieselbe von Raabe*) und bewiesen in der hier gegebenen eleganten Weise von Stern**).

---

*) Crelle. Journal. Bd. 25, S. 149; Bd. 28, Seite 12.
**) Zur Theorie der Euler'schen Integrale.

## III. Kapitel.

### Integrale, welche auf Gammafunctionen zurückführbar sind.

#### §. 60.

Die Integrale $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx$ und $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+\alpha x^n)^{p+q}} dx$.

Die Gammafunction verdient nicht bloss um ihrer selbst willen das grosse Interesse, welches die Mathematiker ihr zugewandt haben. Sie zeichnet sich auch noch dadurch aus, dass von ihrer Kenntniss in letzter Instanz die Lösung vieler und nicht bloss der Integralrechnung angehöriger Aufgaben abhängig gemacht wird. Namentlich aber giebt es eine ganze Reihe auf Gammafunctionen zurückführbarer Integrale, von denen einige wieder zu den feinsten Betrachtungen Veranlassung geben. Einen der Hauptbelege für diese Behauptung wird hoffentlich die später folgende Darstellung der äusserst sinnreichen Dirichlet'schen Behandlung gewisser von Cauchy zuerst in Betracht gezogener Integrale liefern.

Schon früher haben wir gesehen, in welch' innigem Zusammenhange das Euler'sche Integral der ersten Gattung mit dem der zweiten Art steht. Dieselbe Bewandtniss nun hat es mit dem binomischen Integrale

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx,$$

in welchem $p$ und $q$ positiv und $n$ als ganze Zahl vorausgesetzt sind. Legendre bezeichnet dasselbe mit Euler*) symbolisch durch $\left(\frac{p}{q}\right)$ und betrachtet es eigentlich als das Euler'sche Integral der ersten Gattung. Wie man sieht, ist dies nur eine Verallgemeinerung des Integrales

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

*) Integralrechnung, Kap. 9, S. 237 des ersten Bandes. (2. Ausgabe. Petersburg 1793.)

oder, wie Legendre schreibt, $[p, q]$*). Auch kann jenes mit Leichtigkeit auf dieses zurückgeführt werden, indem man mit dem genannten Forscher nur $y = x^n$ zu setzen braucht. Dadurch nämlich kommt sofort

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 y^{\frac{p}{n}-1} (1-y)^{\frac{q}{n}-1} dy,$$

und demnach ist

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}.$$

Die weitern Eigenschaften des Integrales $\left(\frac{p}{q}\right)$ bedürfen daher auch keiner eingehendern Untersuchung. Nur einer nahe liegenden Folgerung wollen wir gedenken, die sich sofort für $\frac{p+q}{n} = 1$ ergiebt. In diesem Falle nämlich ist

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^n)^{-\frac{p}{n}} dx = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sin \frac{p}{n} \pi}.$$

Allgemeiner noch als das oben betrachtete Integral ist endlich das folgende

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\, dx}{(1+\alpha x^n)^{p+q}},$$

in welchem $\alpha$ eine von Null verschiedene positive Constante bedeutet und das durch die Substitution $\alpha x^n = x_1$ unmittelbar die Gestalt

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\, dx}{(1+\alpha x^n)^{p+q}} = \frac{1}{n\alpha^{\frac{p}{n}}} \int_0^\infty \frac{x_1^{\frac{p}{n}-1}\, dx_1}{(1+x_1)^{\frac{p}{n}+q+\frac{n-1}{n}p}}$$

$$= \frac{1}{n\alpha^{\frac{p}{n}}} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(q+\frac{n-1}{n}p\right)}{\Gamma(p+q)}.$$

annimmt.

*) Traité des fonct. ellip. et des intégr. Eul. T. II., p. 414.

Sollen 0 und 1 die Integrationsgrenzen heissen, so setze man wie in §. 31 $x = \frac{1-y}{y}$; alsdann erhält man nach den einfachsten Reductionen

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+\alpha x^n)^{p+q}} = \int_0^1 \frac{y^{nq+(n-1)p-1}(1-y)^{p-1}\,dy}{[y^n+\alpha(1-y)^n]^{p+q}}.$$

Und schreibt man jetzt $n = 1$, $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$ und $\lambda - \mu = \nu$, so kommt

$$\int_0^1 \frac{y^{q-1}(1-y)^{p-1}dy}{(\mu+\nu y)^{p+q}} = \frac{1}{\mu^p}\,\frac{1}{(\mu+\nu)^q}\,\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ *)$$

## §. 61.

**Die Integrale** $\int_0^1 \frac{(1-x^a)\,(1-x^b)\ldots\ldots}{1-x}\,\frac{dx}{\lg\frac{1}{x}}$ **und**

$$\int_0^1 \frac{x^a\,(1-x^b)\,(1-x^c)\ldots\ldots}{(1-x)\lg\frac{1}{x}}\,dx.$$

Vertauschen wir in der Gleichung

$$\frac{\partial \lg \Gamma(a+1)}{\partial a} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\lg\frac{1}{x}} - \frac{x^a}{1-x}\right) dx$$

das Argument $a$ mit $a+b$, wo $b$ eine positive Constante ausdrücken soll, und subtrahiren wir von der resultirenden Gleichung die vorhergehende, so kommt

$$\frac{\partial}{\partial a} \lg \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)} = \int_0^1 x^a\,\frac{1-x^b}{1-x}\,dx.$$

Hieraus aber entspringt durch Integration nach $a$ zwischen den Grenzen 0 und $a$

$$1.\qquad \lg \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)} = \int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^b)}{(1-x)\lg\frac{1}{x}}\,dx,$$

*) Siehe §. 80, Gl. 7ª. etc.

und sonach müssen auch folgende Gleichungen Statt finden:

$$\lg \frac{\Gamma(a+b+c+1)}{\Gamma(a+c+1)\,\Gamma(b+1)} = \int_0^1 \frac{(1-x^{a+c})(1-x^b)}{(1-x)\lg\frac{1}{x}}\,dx,$$

$$2. \quad \lg \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(a+b+c+1)}{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma(a+c+1)} = \int_0^1 \frac{x^a\,(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x)\lg\frac{1}{x}}\,dx.$$

Wird aber in Gleichung 1. die positive Grösse $c$ statt $a$ gewählt und von dem erzeugten Resultate die Beziehung 2. abgezogen; so folgt

$$3. \quad \lg \frac{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma(a+c+1)\,\Gamma(b+c+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)\Gamma(a+b+c+1)} = \int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x)\lg\frac{1}{x}}\,dx.$$

Und vertauscht man in Gleichung 3. $a$ mit $a+d$ und subtrahirt nun von der erzielten Relation die unter 3. dargestellte, so hat man

$$4. \quad \lg \frac{\Gamma(a+b+c+1)\,\Gamma(a+b+d+1)\,\Gamma(a+c+d+1)\,\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma(a+c+1)\,\Gamma(a+d+1)\,\Gamma(a+b+c+d+1)}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^a(1-x^b)(1-x^c)(1-x^d)}{(1-x)\lg\frac{1}{x}}\,dx.$$

Indem man aber in 3. die Constante $a$ durch das positive $d$ ersetzt und darauf die entstandene Gleichung mit der Beziehung 4. durch Subtraction verbindet, erhält man die Formel

$$5. \lg \frac{\Gamma(a+b+1)\Gamma(a+c+1)\Gamma(a+d+1)\Gamma(b+c+1)\Gamma(b+d+1)\Gamma(c+d+1)\Gamma(a+b+c+d+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)\Gamma(a+b+c+1)\Gamma(a+b+d+1)\Gamma(a+c+d+1)\Gamma(b+c+d+1)}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)(1-x^d)}{(1-x)\lg\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx.$$

Wie man in dieser Weise den Process immer von neuem vollziehen kann, bedarf keiner weitern Erörternng. Zur Entwicklung des allgemeinen von diesen Integralen befolgten Bildungsgesetzes genügen indess schon die vorhergehenden Betrachtungen; man vergleiche nur darüber Stern's „Beiträge zur Theorie der Euler'schen Integrale.“ Auch noch andere

Folgerungen lassen sich aus den vorstehenden Formeln ziehen, worüber man ebenfalls genügende Auskunft in der genannten Abhandlung Stern's finden wird.

In dem Vorliegenden beschränken wir uns auf die Mittheilung zweier Relationen (6 und 7), die wir später in ganz anderer Weise ermitteln werden.

Setzt man nämlich in Gleichung 2. $x^2$ statt $x$, wo das neue $x$ ebenfalls positiv sein soll, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{x^{2a}(1-x^{2b})(1-x^{2c})\,2x\,dx}{(1-x^2)\,2\lg x} = \int_0^1 \frac{x^{2a+1}(1-x^{2b})(1-x^{2c})\,dx}{(1-x^2)\lg x}$$

$$= \lg \frac{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma(a+c+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(a+b+c+1)},$$

und folglich wird für $c = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{x^{2a+1}(1-x^{2b})}{(1+x)\lg x}\,dx = \lg \frac{\Gamma(a+b+1)\,\Gamma\left(a+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)}.$$

Daraus aber fliesst, wenn $2a+1=\alpha-1, 2(a+b)+1=\beta-1$ gewählt wird, die von Kummer gefundene Formel

$$6.\qquad \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}-x^{\beta-1}}{(1+x)\,\mathrm{l}\,x}\,dx = \lg \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}.$$

Endlich lässt sich mit ziemlicher Leichtigkeit aus der Gleichung 4. die andere entwickeln

$$7.\qquad \int_0^1 \frac{x^a(x-1)^n}{\mathrm{l}\,x}\,dx = \lg(n+a+1) - \binom{n}{1}\lg(n+a)$$

$$+\ldots+(-1)^s\binom{n}{s}\lg(n+a+1-s)+\ldots+(-1)^n\lg(a+1)$$

$$= \sum_0^n (-1)^s \binom{n}{s}\lg(n+a+1-s),$$

wenn man die Exponenten $b, c, d, \ldots$ sämmtlich $= 1$ nimmt und die Gammafunctionen nach der Formel $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$ behandelt. Schreibt man nun $\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}\right) = z$ und $a+1 = p$, so hat man zunächst die Beziehung

$$-\int_0^\infty \frac{e^{-pz}(e^{-z}-1)^n\,dz}{z} = \sum_0^n (-1)^s \binom{n}{s} \lg(n+p-s).$$

Dieser Ausdruck aber lässt sich in einer kürzern Form darstellen, wenn man sich einer bekannten Formel aus der endlichen Differenzenrechnung erinnert. Sind nämlich $u$, $u_1$, $u_2$, ... die Werthe der Functionen $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$, ...; so besteht die Relation

$$\Delta^n u = u_n - \binom{n}{1} u_{n-1} + \binom{n}{2} u_{n-2} - \ldots$$

oder symbolisch geschrieben

$$\Delta^n u = (u-1)^{(n)}.$$

Wählt man folglich für $f(x)$ die Transscendente $\lg p$, so hat man

$$\Delta^n \lg p = (\lg p - 1)^{(n)} = \lg(p+n) - \binom{n}{1} \lg(p+n-1) + \ldots$$

$$= \sum_0^n (-1)^s \binom{n}{s} \lg(n+p-s)$$

und sonach

$$\Delta^n \lg p = -\int_0^\infty \frac{e^{-pz}(e^{-z}-1)^n}{z}\,dz.$$

Es ist dies die Gleichung, welche Laplace auf anderm Wege in seiner „Théorie analytique des probabilités, 3. Édition p. 165" abgeleitet hat.

### Anwendung des Imaginären.

### §. 61.

**Bedeutung der Formel $\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a}$ für ein complexes $k$.**

**Verhalten der gewonnenen Gleichungen zu einander.**

Ein weit grösseres Interesse als die vorhergehenden Integralformen bieten gewisse andere, mit deren näherer Untersuchung wir uns nunmehr beschäftigen wollen. Dabei werden wir uns in sehr ausgedehnter Weise des Imaginären be-

dienen, weil durch eine derartige Benutzung, wie sich zeigen wird, bei den Erörterungen ein bedeutender Grad von Eleganz und Einfachheit sich erzielen lässt.

Bezeichnen $k$ und $a$ positive Zahlen, so findet bekanntlich die wichtige Gleichung Statt

$$\int_0^\infty e^{-ky}\, y^{a-1}\, dy = \frac{\Gamma(a)}{k^a}.$$

Gilt aber dieselbe noch, wenn $k$ eine complexe Grösse vorstellt? Nehmen wir einmal an, es sei dies wirklich der Fall, es sei also für die complexe Grösse $k+\vartheta i$, deren reeller Theil natürlich wesentlich positiv sein muss,

$$\text{I.} \qquad \int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k+\vartheta i)^a};$$

so folgt hieraus leicht eine Reduction der beiden Integrale

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cos\vartheta x \,.\, x^{a-1}\, dx \text{ und } \int_0^\infty e^{-kx} \sin\vartheta x\, x^{a-1}\, dx$$

auf einfachere Formen. Bedenkt man nämlich, dass jede complexe Grösse $k+\vartheta i$ in der Form $\varrho\,(\cos\psi + i\sin\psi)$ sich darstellen lässt, wo der Modul $\varrho = \sqrt{k^2+\vartheta^2}$ ist und $\psi$ einen reellen Bogen bedeutet, der hier zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ gewählt werden darf, so ergiebt sich aus I. zunächst

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\,[\cos\vartheta x - i\sin\vartheta x]\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}\,(\cos\psi + i\sin\psi)^a}$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,[\cos a\psi - i\sin a\psi]}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}.$$

Mithin wird

$$1. \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \cos\vartheta x\, dx = \frac{\Gamma(a)\cos a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}} \qquad \text{und}$$

$$2. \qquad \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \sin\vartheta x\, dx = \frac{\Gamma(a)\sin a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$$

So vorzüglich indess dieser von Euler*) herrührende Gedankengang auf den ersten Blick auch erscheinen mag, so lässt er doch begründete Bedenken zu. Der Ausdruck $\frac{1}{(k+\vartheta i)^a}$ nämlich ist, um nur dieses Punktes zu gedenken, durchaus keine bestimmte Grösse**); es bleibt daher auch schon aus diesem Grunde völlig unentschieden, ob in der That gerade die obigen Formen die hier in Betracht kommenden Integrale vorstellen werden. Denn dass die für $x = \infty$ zwischen $\pm 1$ schwankenden Factoren $\cos\vartheta x$ und $\sin\vartheta x$ keine Unbestimmtheit in den Integralen hervorrufen, ergiebt sich sofort aus der Betrachtung der Integrale

$$\int_p^q e^{-kx} x^{a-1} \begin{Bmatrix}\cos\vartheta x\\ \sin\vartheta x\end{Bmatrix} . dx = e^{-k\xi} \begin{Bmatrix}\cos\vartheta\xi\\ \sin\vartheta\xi\end{Bmatrix} . \xi^{a+1} \int_p^q \frac{dx}{x^2},$$

in denen $p$, $q$ und $\xi$ die bekannte Bedeutung haben.

In Wahrheit sind nun freilich die oben gefundenen Ausdrücke die wirklichen Werthe der beiden Integrale

---

*) Integralrechnung, Bd. 4.

**) Obgleich wir wegen der Richtigkeit dieser Behauptung einfach auf die Elemente der Analysis verweisen könnten, wollen wir trotzdem mit einigen Worten des Satzes hier gedenken. Schreibt man nämlich wie vorhin $k+\vartheta i$ in der bekannten Form $\varrho(\cos\psi + \sin\psi) = \varrho e^{\psi i}$, so ist

$$\varrho = \sqrt{k^2+\vartheta^2}, \quad \frac{k}{\varrho} = \cos\psi, \quad \frac{\vartheta}{\varrho} = \sin\psi.$$

Da nun $k$ und $\varrho$ positive Grössen ausdrücken, so können wir für $\psi$ den kleinsten Bogen wählen, dessen Cosinus $= \frac{k}{\varrho}$, dessen Sinus $= \frac{\vartheta}{\varrho}$ ist, also einen zwischen $\pm\frac{\pi}{2}$ befindlichen Bogen. Der allgemeinste Werth entspringt alsdann, wenn wir zu diesem Bogen ein ganz beliebiges Vielfaches von $2\pi$ addiren, d. h. $k+\vartheta i = \varrho e^{(\psi+2s\pi)i}$ und folglich

$$(k+\vartheta i)^{-a} = \varrho^{-a} e^{-(a\psi+2sa\pi)i}$$

setzen. Hieraus aber erkennt man auf den ersten Blick, dass für ein irrationales $a$ der Ausdruck $(k+\vartheta i)^{-a}$ sogar unendlich viele Werthe und nur für ein rationales $a$ eine beschränkte Anzahl derselben darbietet.

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \begin{cases}\cos \vartheta x\\ \sin \vartheta x\end{cases} . \, dx,$$

gleichwohl kann dies nur durch eine von Unbestimmtheiten völlig unberührte Untersuchung ausser allen Zweifel gestellt werden. Zu einer solchen aber eignet sich vorzüglich der von Poisson zuerst betretene Weg, dessen Natur durch das Bestreben charakterisirt wird, aus den vorhergehenden Integralen zwei Differentialgleichungen zu erzielen, deren nachherige Integration unmittelbar zu den verlangten Resultaten führt.*)

Bevor wir aber zur nähern Erläuterung dieses in der Dirichlet'schen Behandlung äusserst eleganten Verfahrens selbst übergehen, wollen wir in Kürze noch der Thatsache gedenken, dass jedes der Integrale 1. und 2. aus dem andern durch Integration nach $\vartheta$ zwischen den Grenzen 0 und $\vartheta$ und folglich auch durch Differentiation nach $\vartheta$ sich ableiten lässt. Nehmen wir beispielsweise das Integral 1. oder lieber dieses $\int_0^\infty e^{-kx}\, x^a \cos \vartheta\, x\, dx = \frac{\Gamma(a+1) \cos (a+1)\, \psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a+1}{2}}}$, so ergiebt sich durch Ausführung der angezeigten Operation zunächst:

$$\Gamma(a+1) \int_0^\vartheta \frac{\cos (a+1) \psi\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a+1}{2}}} = \int_0^\vartheta d\vartheta \int_0^\infty e^{-kx}\, x^a \cos \vartheta x\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-kx}\, x^a\, dx \int_0^\vartheta \cos \vartheta x\, d\vartheta = \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \sin \vartheta x\, dx.$$

Andererseits ist wegen

$$\cos (a+1)\, \psi = \cos a\, \psi \cos \psi - \sin a\, \psi \sin \psi$$
$$= \cos a\, \psi \frac{k}{\sqrt{k^2+\vartheta^2}} - \sin a\, \psi \frac{\vartheta}{\sqrt{k^2+\vartheta^2}}$$

und

$$d \sin a\, \psi = a \cos a\, \psi \frac{k\, d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}:$$

---

*) Journal de l'école polytechnique, cah. 16, pag. 215.

$$\Gamma(a+1)\int_0^\vartheta \frac{\cos(a+1)\psi d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a+1}{2}}} = \Gamma(a+1)\int_0^\vartheta \frac{k\cos a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}\frac{d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}$$

$$-\Gamma(a+1)\int_0^\vartheta \frac{\sin a\psi\,\vartheta\,.\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}.(k^2+\vartheta^2)} = \frac{\Gamma(a+1)}{a}\frac{\sin a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$$

$$+\Gamma(a+1)\int_0^\vartheta \frac{\sin a\psi}{a}\cdot\frac{a}{2}\frac{2\vartheta\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a+2}{2}}} - \Gamma(a+1)\int_0^\vartheta \frac{\sin a\psi\,\vartheta\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a+2}{2}}}$$

$$= \frac{\Gamma(a)\sin a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}};$$

daher die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \sin\vartheta x\, dx = \frac{\Gamma(a)\sin a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}.$$

## §. 63.

### Strenge Begründung der Euler'schen Formeln.

Indem wir nunmehr in der angedeuteten Weise zur tiefern Begründung der Euler'schen Formeln schreiten, setzen wir vorerst der Kürze halber

$$u = \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\cos\vartheta x\, dx,\quad v = \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\sin\vartheta x\, dx \text{ und}$$

$$s = \int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx.$$

Dadurch gewinnen wir die bequemere Form $s = u - vi$ der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x} x^{a-1} dx = \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\cos\vartheta x\, dx - i\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\sin\vartheta x\, dx,$$

welche durch Differentiation nach $\vartheta$ ohne Mühe zu der Beziehung führt

$$\frac{ds}{d\vartheta} = \frac{du}{d\vartheta} - i\frac{dv}{d\vartheta} = i\int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^a\, dx.$$

Andererseits aber folgt ebenso leicht durch partielle Integration des Integrales $s$:

$$\int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \frac{k+\vartheta i}{a} \int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^a\, dx,$$

wenn vorläufig die positive Constante $k > 0$ vorausgesetzt wird.

Werden beide Gleichungen mit einander verglichen, so zeigt sich, dass

$$\frac{du}{d\vartheta} - i\frac{dv}{d\vartheta} = -\frac{ai}{k+\vartheta i}[u - vi]$$

ist.*) Und hieraus entspringt durch Trennung des Reellen und Imaginären

1.
$$\frac{u\frac{du}{d\vartheta} + v\frac{dv}{d\vartheta}}{u^2+v^2} = -\frac{a\vartheta}{k^2+\vartheta^2}$$

und

2.
$$\frac{u\frac{dv}{d\vartheta} - v\frac{du}{d\vartheta}}{u^2+v^2} = \frac{ak}{k^2+\vartheta^2}.$$

Die Derivirten der hier vorkommenden Functionen von $u$ und $v$, d. i. von $\vartheta$, sind also endlich, ja selbst stetig; diese Functionen müssen daher zu den continuirlichen Functionen von $\vartheta$ gehören; ausserdem bezeichnet auch $s$, weil die Integrale $\frac{du}{d\vartheta}$ und $\frac{dv}{d\vartheta}$ dem Obigen zufolge endliche Grössen vorstellen, eine stetige Function von $\vartheta$.

Multiplicirt man jetzt die Gleichung 1. durch die Zahl 2 und schreibt die Nenner der zweiten in den Formen

$$u^2\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right),\ k^2\left(1+\frac{\vartheta^2}{k^2}\right),$$

so zeigt sich sofort, dass

$$\frac{d \lg (u^2+v^2)}{d\vartheta} = -a\frac{d \lg (k^2+\vartheta^2)}{d\vartheta}$$

und

$$\frac{d \operatorname{arc tang} \frac{v}{u}}{d\vartheta} = a\frac{d \operatorname{arc tang} \frac{\vartheta}{k}}{d\vartheta}$$

ist. Und daher gelten die neuen Gleichungen

*) Die directe Integration dieser Differentialgleichung ist §. 107 gegeben.

3. $\lg (u^2 + v^2) = - a \lg (k^2 + \vartheta^2) + \lg \text{const.}$

und

4. $\text{arc tang} \frac{v}{u} = a \text{ arc tang} \frac{\vartheta}{k} + \text{const.}$

Nun bedeuten $u$, $v$, $a$, $k$, $\vartheta$ sämmtlich reelle Grössen, folglich gewinnt man aus der Beziehung 3. die andere

$$u^2 + v^2 = (k^2 + \vartheta^2)^{-a} \cdot c,$$

in der $c$ offenbar die Bedeutung einer positiven Constanten besitzt. Um sie zu bestimmen, setze man in der vorangehenden Gleichung $\vartheta = 0$ und bedenke, dass durch diese Annahme $u = \frac{\Gamma(a)}{k^a}$ wird und $v$ sich auf Null reducirt. Alsdann findet man augenblicklich, dass $c = [\Gamma(a)]^2$ und demnach

$$u^2 + v^2 = [\Gamma(a)]^2 (k^2 + \vartheta^2)^{-a}$$

ist. Hieraus aber erkennt man sofort, dass wegen der bestimmten Grösse $\Gamma(a)$ für endliche Werthe von $\vartheta$ die Functionen $u$ und $v$ nie gleichzeitig zu Null werden können.

Um jetzt die Constante der Gleichung 4. zu bestimmen, wollen wir den Bogen rechts zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ wählen und von $\text{arc tang} \frac{v}{u}$ voraussetzen, dass für $v = 0$ auch $\text{arc tang} \frac{v}{u}$ zu Null wird. Alsdann ist offenbar const. $= 0$, weil für $\vartheta = 0$ Gleichung 4. nunmehr in $0 = 0 + \text{const.}$ übergeht. Da nun $k$ positiv ist und $\vartheta$ endlich bleibt, so kann in $\text{arc tang} \frac{\vartheta}{k}$ die Tangente auch niemals durch das Unendliche gehen, und demnach ist, wenn wir der Kürze wegen $\text{arc tang} \frac{\vartheta}{k} = \psi$ schreiben, dieser Bogen immer zwischen $\pm \frac{\pi}{2}$ befindlich, also

$$\frac{v}{u} = \text{tang}\, a\, \psi.$$

Oben aber fanden wir

$$u^2 + v^2 = [\Gamma(a)]^2 (k^2 + \vartheta^2)^{-a},$$

mithin wird jetzt

$$u = \pm \Gamma(a) (k^2 + \vartheta^2)^{-\frac{a}{2}} \cos a\, \psi$$

und

$$v = \pm\, \Gamma(a)\ (k^2 + \vartheta^2)^{-\frac{a}{2}} \sin a\,\psi.$$

Um über die Vorzeichen der Functionen $u$ und $v$ Kenntniss zu erhalten, bedenken wir, dass eine stetige Function nur ihr Vorzeichen ändern kann, sofern sie durch Null geht. Mithin müssten bei Annahme eines solchen Falles beide Functionen $u$ und $v$ gleichzeitig den Werth Null annehmen, was — wie wir wissen — unmöglich ist. Ein Wechsel im Vorzeichen der Functionen $u$ und $v$ kann demnach nicht eintreten. Erwägt man nun aber, dass für $\vartheta = 0$ auch $\psi = 0$ wird und dass die Grössen $k$ und $\Gamma(a)$ beide positiv sind; so folgt augenblicklich, dass hier das Zeichen plus gilt. Und somit finden in der That die Beziehungen Statt:

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \cos \vartheta x\, dx = \frac{\Gamma(a) \cos a\,\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \sin \vartheta x\, dx = \frac{\Gamma(a) \sin a\,\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}.$$

## §. 64.

### Für ein ganzes $a$ genügt zur Herleitung der Euler'schen Formeln die partielle Integration.

Nicht ohne Interesse dürfte die Bemerkung sein, dass unter Voraussetzung einer ganzen Zahl $a$ die Entwicklung der Integrale $u$ und $v$ nur die theilweise Integration erfordert. Dabei erscheinen freilich nicht unmittelbar die obigen eleganten Ausdrücke, doch kann man dieselben leicht erzielen, wenn man in den Endformen $\frac{k}{\sqrt{k^2+\vartheta^2}} = \cos \psi$, $\frac{\vartheta}{\sqrt{k^2+\vartheta^2}} = \sin \psi$ schreibt und sich der bekannten Beziehungen erinnert:

$$\cos a\,\psi = \cos \psi^a - \binom{a}{2} \cos \psi^{a-2} \sin \psi^2 + \binom{a}{4} \cos \psi^{a-4} \sin \psi^4 - \text{etc.}\ldots,$$

$$\sin a\,\psi = \binom{a}{1} \cos \psi^{a-1} \sin \psi - \binom{a}{3} \cos \psi^{a-3} \sin \psi^3 + \ldots$$

Dem Principe nach bedürfen daher die hier angedeuteten Rechnungen auch keiner Erläuterung, gleichwohl wollen wir einige Augenblicke bei ihnen verweilen, weil sie, in gewöhnlicher Weise vollzogen, höchst langweilig sind, durch Umkehrung des Weges aber sich ziemlich vereinfachen lassen.

Unterwerfen wir beispielsweise das Integral

$$u = \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \cos \vartheta x\, dx$$

einer zweimaligen partiellen Integration, so finden wir nach einigen leichten Reductionen

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \cos \vartheta x\, dx = \frac{2k(a-1)}{k^2+\vartheta^2} \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-2} \cos \vartheta x\, dx$$

$$- \frac{(a-1)(a-2)}{k^2+\vartheta^2} \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-3} \cos \vartheta x\, dx,$$

eine Gleichung, der wir behufs der gleich folgenden Betrachtung die leicht verständliche symbolische Form geben

$$1. \qquad u_n = \frac{1}{k^2+\vartheta^2} \left[ 2k \binom{n}{1} u_{n-1} - 2 \binom{n}{2} u_{n-2} \right].$$

Setzt man nun nach und nach $a = a - 1,\ a - 2, \ldots 3$, d. h. $n = a - 2,\ a - 3, \ldots 3$, so ergiebt sich mit Beachtung der Beziehungen

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cos \vartheta x . x\, dx = \frac{k^2-\vartheta^2}{(k^2+\vartheta^2)^2} \text{ und } \int_0^\infty e^{-kx} \cos \vartheta x\, dx = \frac{k}{k^2+\vartheta^2}$$

schliesslich der Werth des Integrales $u$. Wegen der mühsamen Berechnung dürfte es sich jedoch empfehlen, von unten nach oben, d. i. von $u_0 = \int_0^\infty e^{-kx} \cos \vartheta x\, dx = \frac{k}{k^2+\vartheta^2}$ und $u_1 = \int_0^\infty e^{-kx} \cos \vartheta x . x\, dx$ zu $u_2 = \int_0^\infty e^{-kx} x^2 \cos \vartheta x dx = 1.2 \frac{k^3 - 3k\vartheta^2}{(k^2+\vartheta^2)^3}$ u. s. w. fortzuschreiten, indem man stets die obige Recursionsformel 1. im Auge behält. Auf diese Weise folgt nämlich leicht

$$u_3 = \frac{1.2.3}{(k^2+\vartheta^2)^4}\left[k^4 - \frac{4.3}{1.2}k^2\vartheta^2 + \vartheta^4\right],$$

$$u_4 = \frac{1.2.3.4}{(k^2+\vartheta^2)^5}\left[k^5 - \binom{5}{2}k^3\vartheta^2 + \binom{5}{4}k\vartheta^4\right].$$

Nimmt man jetzt an, dass für die ganze Zahl $n$ $u_{n-1}$ durch folgende Formel dargestellt wird:

$$u_{n-1} = \frac{\Gamma(n)}{(k^2+\vartheta^2)^n}\left[k^n - \binom{n}{2}k^{n-2}\vartheta^2 + \binom{n}{4}n^{n-4}\vartheta^4 - \binom{n}{6}k^{n-6}\vartheta^6 + \ldots\right],$$

in der das allgemeine Glied

$$(-1)^p\binom{n}{2p}k^{n-2p}\vartheta^{2p}$$

heisst, so wird

$$u_n = \frac{1}{k^2+\vartheta^2}\left[2k\binom{n}{1}u_{n-1} - 2\binom{n}{2}u_{n-2}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{(k^2+\vartheta^2)^{n+1}}\Bigg[2k^{n+1} - 2k\binom{n}{2}k^{n-2}\vartheta^2 + \ldots + (-1)^p 2\binom{n}{2p}k^{n-2p+1}\vartheta^{2p}$$

$$+ \ldots - k^{n+1} + \binom{n-1}{2}k^{n-1}\vartheta^2 + \ldots - (-1)^p\binom{n-1}{2p}k^{n+1-2p}\vartheta^{2p} + \ldots$$

$$- k^{n-1}\vartheta^2 \ldots\ldots - (-1)^{p-1}\binom{n-1}{2p-2}k^{n-2p+1}\vartheta^{2p-2+2} - \ldots\Bigg].$$

Nun gelten aber in Bezug auf Binomialcoefficienten folgende Formeln:

$$\binom{m+1}{r+1} = \binom{m}{r} + \binom{m}{r+1}$$

und

$$\binom{m}{r} = \binom{m+1}{r} - \binom{m+1}{r-1} + \binom{m+1}{r-2} + \ldots + (-1)^r\binom{m}{0}.$$

Mithin ist

$$\binom{n-1}{2p} = \binom{n}{2p} - \binom{n}{2p-1} + \binom{n}{2p-2} - \binom{n}{2p-3} + \ldots + \binom{n}{0},$$

$$-\binom{n-1}{2p-2} = \qquad\qquad - \binom{n}{2p-2} + \binom{n}{2p-3} - \ldots - \binom{n}{0},$$

d. g.

$$-\binom{n-1}{2p} + \binom{n-1}{2p-2} = -\binom{n}{2p} + \binom{n}{2p-1}.$$

Folglich wird

$$2\binom{n}{2p} - \binom{n-1}{2p} + \binom{n-1}{2p-2} = \binom{n}{2p} + \binom{n}{2p-1} = \binom{n+1}{2p},$$

$$(-1)^p\left[2\binom{n}{2p} - \binom{n-1}{2p} + \binom{n-1}{2p-2}\right] = (-1)^p \cdot \binom{n+1}{2p},$$

und daher hat man

$$u_n = \frac{\Gamma(n+1)}{(k^2+\vartheta^2)^{n+1}}\left\{k^{n+1} - \binom{n+1}{2}k^{n-1}\vartheta^2 + \ldots + (-1)^p\binom{n+1}{2p}k^{n-2p+1}\vartheta^{2p} + \right.$$

Die Formel gilt mithin allgemein. Daher die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-kx}x^{a-1}\cos\vartheta x\,dx = \frac{\Gamma(a)}{(k^2+\vartheta^2)^a}\left[k^a - \binom{a}{2}k^{a-2}\vartheta^2 + \binom{a}{4}k^{a-4}\vartheta^4\right.$$
$$\left. - \ldots + (-1)^p\binom{a}{2p}k^{a-2p}\vartheta^{2p} + \ldots\right\},$$

die man nun leicht in die frühere Form $\frac{\Gamma(a)\cos a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$ umsetzen kann, wenn man den oben angedeuteten Gedankengang innehält.

In ganz ähnlicher Weise würde man offenbar

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{a-1}\sin\vartheta x\,dx$$

behandeln können, einfacher jedoch wird man den zu suchenden Ausdruck durch Differentiation der vorstehenden Gleichung nach $\vartheta$ erzielen. Man erhält nämlich auf diesem Wege zuvörderst

$$\int_0^\infty e^{-kx}x^a\sin\vartheta x\,dx = \frac{\Gamma(a+1)}{(k^2+\vartheta^2)^{a+1}}\left[\left\{2k^a\vartheta - 2\binom{a}{2}k^{a-2}\vartheta^3 + \ldots\right.\right.$$
$$\left. + 2(-1)^p\binom{a}{2p}k^{a-2p}\vartheta^{2p+1} + \ldots\right\} - \frac{(k^2+\vartheta^2)}{a}\left\{2\vartheta\binom{a}{2}k^{a-2} - \ldots\right.$$
$$\left.\left. - (-1)^p\,2p\,\vartheta^{2p-1}k^{a-2p}\binom{a}{2p} + \ldots\right\}\right].$$

Nun ist allgemein

$$(-1)^p 2\binom{a}{2p}k^{a-2p}\vartheta^{2p+1} - (-1)^{p+1}(2p+2)\frac{1}{a}\binom{n}{2p+2}\vartheta^{2p+1}k^{a-2p}$$
$$- (-1)^p\,2p\,\frac{1}{a}\binom{a}{2p}\vartheta^{2p+1}k^{a-2p} = (-1)^p\left[2\binom{a}{2p} + \binom{a-1}{2p+1}\right.$$
$$\left. - \binom{a-1}{2p-1}\right]k^{a-2p}\vartheta^{2p+1} = (-1)^p\binom{a+1}{2p+1}k^{a-2p}\vartheta^{2p+1},$$

indem

$$(-1)^p\left[2\binom{a}{2p}+\binom{a-1}{2p+1}-\binom{a-1}{2p-1}\right]$$

$$\text{mit}\,(-1)^p\left[\binom{a}{2p}+\binom{a-1}{2p+1}+\binom{a-1}{2p}+\binom{a-1}{2p-1}-\binom{a-1}{2p-1}\right]$$

$$=(-1)^p\left[\binom{a}{2p}+\binom{a}{2p+1}\right]$$

gleichbedeutend ist. Wird sonach wieder $a-1$ statt $a$ geschrieben, so gilt schliesslich die Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{a-1}\sin\vartheta x\,dx$$

$$=\frac{\Gamma(a)}{(k^2+\vartheta^2)^a}\left\{k^{a-1}\vartheta\binom{a}{1}-\binom{a}{3}k^{a-3}\vartheta^3+\ldots+(-1)^p\binom{a}{2p+1}k^{a-2p-1}\vartheta^{2p+1}+\ldots\right\}.$$

### Die Euler'schen Formeln unter der Voraussetzung $k=0$.

§. 65.

#### Bedingungen, unter denen die Integrale $u$, $v$ bestimmte Grössen bezeichnen.

Die vorhergehende Untersuchung setzte als nothwendige Bedingung die Beschränkung voraus, dass $k$ nicht $=0$ wurde. Indess behalten die obigen Integrale noch Gültigkeit, wenn auch $k$ den Werth Null annimmt, nur darf für das Cosinusintegral $\vartheta$ mit $k$ nicht gleichzeitig Null sein. Augenscheinlich gehen nun durch die Substitution $k=0$ die vorhin behandelten Integrale in die folgenden über:

$$\int_0^\infty \cos\vartheta x\,.\,x^{a-1}\,dx \text{ und } \int_0^\infty \sin\vartheta x\,.\,x^{a-1}\,dx,$$

in Betreff deren also vorerst die Frage zu beantworten ist, ob und unter welchen Bedingungen sie einen Sinn besitzen. Wie man sieht, bedürfen nur die Fälle $a \gtrless 1$ einer Erörterung, indem für $a=1$ die beiden Integrale bekanntlich ohne jedwede Bedeutung sind. Zur Untersuchung jener andern Fälle aber empfiehlt sich der schon früher bei dem Integrale $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ befolgte Gedankengang, die Integrale in ihnen

äquivalente unendliche Reihen umzusetzen, deren Convergenz oder Divergenz man leicht zu beurtheilen im Stande ist. Von der Zweckmässigkeit dieses Weges überzeugt man sich — ganz abgesehen von dem frühern speciellen Falle — sogleich, wenn man erwägt, dass innerhalb des Intervalles von 0 bis $\infty$ die goniometrischen Functionen sin und cos unendlich oft das Zeichen wechseln, also durch Zerlegung unserer Integrale in Theilintegrale mit solchen Grenzen, zwischen denen der Sinus oder Cosinus das Zeichen nicht ändert, jedesmal eine unendliche Reihe gewonnen werden kann, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, betrachten wir zuvörderst das Integral $\int\limits_0^\infty \sin \vartheta x \,.\, x^{a-1}\, dx$. Zerfällen wir dasselbe in der angedeuteten Weise, d. h. schieben wir zwischen 0 und $\infty$ Vielfache von $\frac{\pi}{\vartheta}$ ein, so kommt ersichtlich unsere Frage auf die Betrachtung eines Integrales von der Form

$$\int\limits_{\frac{s\pi}{\vartheta}}^{(s+1)\frac{\pi}{\vartheta}} \sin \vartheta x \,.\, x^{a-1}\, dx$$

zurück. Heisst hier der zwischen dem Maximum und Minimum von $x^{a-1}$ innerhalb des Intervalles $\left[\frac{s\pi}{\vartheta}, \frac{(s+1)\pi}{\vartheta}\right]$ liegende Factor von bekannter Bedeutung $M$, so ist

$$\int\limits_{\frac{s\pi}{\vartheta}}^{(s+1)\frac{\pi}{\vartheta}} \sin \vartheta x \,.\, x^{a-1}\, dx = M \int\limits_{\frac{s\pi}{\vartheta}}^{(s+1)\frac{\pi}{\vartheta}} \sin \vartheta x \,.\, dx = M \left[-\frac{\cos \vartheta x}{\vartheta}\right]_{\frac{s\pi}{\vartheta}}^{(s+1)\frac{\pi}{\vartheta}}$$

$$= M \frac{-(-1)^{s+1} + (-1)^s}{\vartheta} = \frac{2M(-1)^s}{\vartheta}.$$

Nun bezeichnet $\frac{s\pi}{\vartheta}$ den Minimalwerth von $x$, der Factor $M$ wird daher grösser, oder kleiner, als $\left(\frac{s\pi}{\vartheta}\right)^{a-1}$ sein, je nachdem $a-1 > 0$, oder $< 0$. Setzt man folglich anstatt $M$ $\left(\frac{s\pi}{\vartheta}\right)^{a-1}$, so liegt das Integral numerisch über, oder unter

der Grösse $\frac{2}{\vartheta}\left(\frac{s\pi}{\vartheta}\right)^{a-1}$, und demnach wird für $a-1>0$ das Integral sinnlos*), für $a-1<0$ dagegen hat es eine Bedeutung. In diesem letztern Falle liegt das folgende Integral unter $\frac{2}{\vartheta}\left[(s+1)\frac{\pi}{\vartheta}\right]^{a-1}$, wie man sofort erkennt, wenn man das erstere Integral zwischen $\frac{(s+1)\pi}{\vartheta}$ und $\frac{(s+2)\pi}{\vartheta}$ nimmt. Für $a-1=0$ endlich würde man eine oscillirende Reihe erhalten, indem je zwei auf einander folgende Integrale nur dem Zeichen nach verschieden sind.

Aus dem Obigen ergiebt sich also unzweifelhaft, dass das Integral $\int_0^\infty x^{a-1}\sin\vartheta x\,dx$ nicht ohne Bedeutung ist, wenn $a-1$ eine negative Zahl bezeichnet.

Um das Integral $\int_0^\infty x^{a-1}\cos\vartheta x\,dx$ in ähnlicher Weise zu behandeln, müsste man offenbar in das Intervall von 0 bis $\infty$ ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2\vartheta}$ einschalten, also schreiben $0, \frac{\pi}{2\vartheta}, \frac{3\pi}{2\vartheta}, \frac{5\pi}{2\vartheta}, \ldots\ldots \frac{(2s+1)\pi}{2\vartheta}, \frac{(2s+3)\pi}{2\vartheta}, \ldots\ldots$ Alsdann kann in einem Intervalle $\left[\frac{(2s+1)\pi}{2\vartheta}, \frac{(2s+3)\pi}{2\vartheta}\right]$ $\cos\vartheta x$ niemals das Zeichen ändern, und man erhält jetzt

$$\int_{\frac{(2s+1)\pi}{2\vartheta}}^{\frac{(2s+3)\pi}{2\vartheta}} x^{a-1}\cos\vartheta x\,dx = M\int_{\frac{(2s+1)\pi}{2\vartheta}}^{\frac{(2s+3)\pi}{2\vartheta}}\cos\vartheta x\,dx = \frac{2M(-1)^{s+1}}{\vartheta}.$$

Ist nun $a-1$ negativ, so nehmen auch hier die einzelnen Theilintegrale beständig ab, und folglich muss, da sie abwechselnd positiv und negativ sind, die entstehende Reihe zu den convergirenden gehören.

## §. 66.

### Verallgemeinerung der vorhergehenden Untersuchungen.

Die vorhin gepflogenen Betrachtungen wollen wir in der Art verallgemeinern, dass wir statt der Potenz $x^{a-1}$ in

*) Für ein über jede Grenze wachsendes $s$ natürlich.

$\int_0^\infty \sin \vartheta x \,.\, x^{a-1}\, dx$ eine Function $f(x)$ substituiren, die stets positiv bleiben soll, übrigens aber entweder zu den wachsenden, oder abnehmenden Functionen gehören kann. Das jetzt in Frage kommende Integral

$$\int_{\frac{s\pi}{\vartheta}}^{\frac{(s+1)\pi}{\vartheta}} f(x) \sin \vartheta x \, dx$$

liegt folglich, abgesehen von dem Factor $\frac{M}{\vartheta}(-1)^s$, zwischen $f\left(\frac{s\pi}{\vartheta}\right)$ und $f\left[\frac{(s+1)\pi}{\vartheta}\right]$. Ist nun die Function eine wachsende, so werden die Theilintegrale nicht der Null sich nähern, und sonach besitzt das Integral $\int_0^\infty f(x) \sin \vartheta x \, \partial x$ keinen Sinn. Nimmt aber $f(x)$ mit wachsendem $x$ ab, so bezeichnet $f\left[\frac{(s+1)\pi}{\vartheta}\right]$ den kleinern Werth für das Intervall von $\frac{s\pi}{\vartheta}$ bis $\frac{(s+1)\pi}{\vartheta}$; und setzen wir voraus, dass die Function mit wachsendem $s$ numerisch immer kleiner wird — wie dies bei einer negativen Potenz eintritt —, so nähert sich mit immer grösser werdendem $s$ jedes Theilintegral der Null. Da nun die einzelnen Theilintegrale abwechselnde Vorzeichen besitzen, so ist die entstehende Reihe eine convergirende, d. h. das Integral $\int_0^\infty f(x) \sin \vartheta x \, dx$ besitzt einen Sinn.

Wie man sofort erkennt, lässt sich eine ähnliche Betrachtung bei dem Integrale $\int_0^\infty f(x) \cos \vartheta x \, dx$ anstellen, nur sind hier natürlich wieder ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2\vartheta}$ zwischen 0 und $\infty$ einzuschalten.

## §. 67.

### Stetigkeit der Integrale $u$ und $v$. Allgemeiner Satz.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen ist ausser allen Zweifel gestellt, dass für $k=0$ die Integrale $\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \begin{Bmatrix} \cos \vartheta x \\ \sin \vartheta x \end{Bmatrix} dx$ ihre Bedeutung nicht verlieren, nur dies geht aus der Untersuchung nicht hervor, ob die Integrale für $k=0$ den Ausdrücken $\frac{\Gamma(a) \begin{Bmatrix} \cos a\psi \\ \sin a\psi \end{Bmatrix}}{(\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$ gleich sind. Denn für das Statthaben dieser Gleichungen ist offenbar die nothwendige Bedingung die, dass für unendlich kleine Werthe von $k$ und folglich geradezu für $k=0$ die Integrale stetige Functionen des Parameters $k$ bleiben. Denkbar ist ja immer, dass ein Integral, obgleich die zu integrirende Function mit einem darin enthaltenen Parameter stetig sich ändert, doch für unendlich kleine Werthe des Parameters, oder wenn man diesen geradezu mit Null identificirt, eine endliche Differenz darbietet. In der That haben wir ja auch ein solches Beispiel schon vorgeführt*), und später werden wir noch andere Fälle dieser Art kennen lernen. Niemals kann dies jedoch eintreten, wenn — wie hier — die fragliche Constante einer Exponentialfunction angehört. Um die Richtigkeit dieser Behauptung nachzuweisen, betrachten wir das Integral

$$\int_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx,$$

in welchem $k$ positiv ist und das nicht nur für $k>0$, sondern auch für $k=0$ einen wirklichen Werth, nämlich

$$a = \int_0^\infty f(x)\, dx$$

darbieten soll. Integriren wir nun zunächst $f(x)$ zwischen den Grenzen 0 und $x$, d. h. bilden wir die Gleichung

$$\int_0^x f(x)\, dx = \varphi(x),$$

so wird $\varphi(\infty) = a$. Mit Benutzung dieser Werthe aber folgt

*) Vergl. S. 82.

aus $\int\limits_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx$ durch theilweise Integration

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx = k \int\limits_0^\infty e^{-kx} \varphi(x)\, dx.$$

Diese Gleichung besteht nach unserer Annahme für jedes endliche, wenn auch noch so kleine positive $k$. Sie wird aber auch für $k = 0$ noch Geltung besitzen, wenn sich zeigen lässt, dass die Grenze von $k \int\limits_0^\infty e^{-kx} \varphi(x)\, dx$ für ein ins Unendliche abnehmendes $k$ durch das Integral $\int\limits_0^\infty f(x)\, dx$ dargestellt wird.

Würden wir, um hierüber nun Aufschluss zu erhalten, unsern bekannten Mittelwerthsatz in Anwendung bringen, so würden wir zu keinem Resultate gelangen. Denn von $\varphi(x)$ wissen wir nur, dass $\varphi(\infty) = a$ ist, die Function $\varphi(x)$ selbst kann abwechselnd positiv, oder negativ sein zwischen 0 und $\infty$. Mithin erhielten wir

$$k \int\limits_p^q e^{-kx} \varphi(x)\, dx = Mk \int\limits_p^q e^{-kx}\, dx = M[e^{-px} - e^{-qx}],$$

also wegen der gänzlichen Unbekanntschaft mit der fernern Natur von $\varphi(x)$ etwas völlig Unbestimmtes, wenn auch nichts Falsches.

Daher müssen wir zur Entscheidung unserer Frage einen andern Weg einschlagen, und hierzu wählen wir den folgenden. Wir zerlegen nämlich unser Integral in eines von 0 bis $\lambda$, wo $\lambda$ natürlich zu den positiven Grössen gehört, und in ein anderes von $\lambda$ bis $\infty$, wir bilden also die Gleichung

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx = k \int\limits_0^\lambda e^{-kx} \varphi(x)\, dx + k \int\limits_\lambda^\infty e^{-kx} \varphi(x)\, dx.$$

Liegt nun $\lambda'$ zwischen 0 und $\lambda$, so wird immer

$$k \int\limits_0^\lambda e^{-kx} \varphi(x)\, dx = \varphi(\lambda') k \int\limits_0^\lambda e^{-kx}\, dx = (1 - e^{-k\lambda})\, \varphi(\lambda')$$

gesetzt werden können, und ebenso wird man die Gleichung bilden dürfen

$$k \int\limits_\lambda^\infty e^{-kx} \varphi(x)\, dx = -\varphi(\lambda'') \int\limits_\lambda^\infty d(e^{-kx}) = e^{-k\lambda}\, \varphi(\lambda'').$$

Sonach gewinnen wir die vorläufig für jedes $k > 0$ geltende Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx = (1 - e^{-k\lambda})\, \varphi(\lambda') + e^{-k\lambda}\, \varphi(\lambda'').$$

Bedenkt man aber, dass $\lambda$ ganz nach Willkür in Bezug auf $k$ gewählt werden kann, also z. B. den Werth $\frac{1}{\sqrt{k}}$ annehmen darf, so lässt sich die Voraussetzung machen, dass mit abnehmendem $k$ die Grösse $\lambda$ zwar wachse, das Product $k\lambda$ aber ins Unendliche abnehme. Unter dieser erlaubten Annahme wird folglich, da mit immer grösser werdendem $\lambda$ nothwendig auch die zwischen $\lambda$ und $\infty$ liegende Zahl $\lambda''$ ins Unbegrenzte wachsen muss und sonach $\varphi(\lambda'')$ dem $a$ sich nähert, der erste Theil der vorstehenden Gleichung die Null, der zweite hingegen die Grösse $a$ zur Grenze haben. Das heisst, wenn das Zeichen lim auf das Abnehmen des positiven $k$ sich bezieht, so ist in der That

$$\lim \int_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx = a,$$

und somit muss das Integral $\int_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx$ eine stetige Function des positiven Parameters $k$ ausdrücken.

Hätten wir $\lambda$ constant gelassen, so würden wir zu keinem Schlusse gekommen sein. Und Unbestimmtes würden wir erzielt haben, wenn mit wachsendem $\lambda$ das Product $k\lambda$ gleichfalls immer grössere Werthe angenommen hätte, oder constant, z. B. $k\lambda = \frac{\alpha \cdot k}{k}$ geblieben wäre; denn weil wir durchaus nicht behaupten können, dass mit wachsendem $\lambda$ nothwendig auch $\lambda'$ zu den ins Unendliche zunehmenden Grössen gehören muss, so können wir auch nicht schliessen, dass $\varphi(\lambda')$ mit $\lim \varphi(\lambda'') = a$ zusammenfällt.

## §. 68.

### Die Integrale $\int_0^\infty x^{a-1} \begin{Bmatrix} \cos \vartheta x \\ \sin \vartheta x \end{Bmatrix} . dx.$

Nachdem wir uns nunmehr überzeugt haben, dass unsere früheren Formeln

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \cos \vartheta x \, dx = \frac{\Gamma(a) \cos a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \sin \vartheta x \, dx = \frac{\Gamma(a) \sin a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}},$$

auch noch für $k = 0$ Gültigkeit besitzen, erhalten wir die neuen, schon von Euler gekannten Integrale

$$\int_0^\infty x^{a-1} \cos \vartheta x \, dx = \frac{\Gamma(a) \cos a\psi}{(\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}} = \frac{\Gamma(a) \cos a \frac{\pi}{2}}{(\pm \vartheta)^a}$$

und

$$\int_0^\infty x^{a-1} \sin \vartheta x \, dx = \frac{\Gamma(a) \sin a\psi}{(\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}} = \pm \frac{\Gamma(a) \sin \frac{a\pi}{2}}{(\pm \vartheta)^a} \; ^{*}).$$

Denn da $\psi = \text{arc tg} \frac{\vartheta}{k}$ ist, so wird für $k = 0$ $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$, je nachdem $\vartheta \gtrless 0$ ist.

In Betreff des Sinusintegrales möge die Bemerkung eine Stelle hier finden, dass es für sehr kleine Werthe von $\vartheta$ vom ausserordentlich grossen Werthe eines Zeichens zum sehr grossen Werthe vom andern Zeichen überspringt, je nachdem man $\vartheta$ das Zeichen plus oder minus beilegt.

Was endlich die Bezeichnung $(\pm \vartheta)^a$ für $(\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}$ anlangt,

---

*) Andere Formen sind:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \vartheta x}{x^n} \, dx = \frac{(\pm \vartheta)^{n-1}}{\Gamma(n)} \frac{\pi}{2 \cos \frac{n\pi}{2}}, \quad 1 > n > 0 \quad \text{und}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{x^n} \, dx = \frac{(\pm \vartheta)^{n-1}}{\Gamma(n)} \frac{\pi}{2 \sin \frac{n\pi}{2}}, \quad 2 > n > 0;$$

man erhält dieselben, wenn man $a - 1 = -n$ setzt und sich der Fo

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1$$

erinnert

so ist wohl als selbstverständlich anzusehen, dass der absolute Werth der Potenz von $\vartheta$ in Betracht zu ziehen ist, da für ein negatives $\vartheta$ und ein $a$ von der Form $\frac{2p+1}{2m}$ die sämmtlichen Elemente jedes der Integrale doch reell bleiben, also das Integral selbst eine reelle Grösse repräsentiren muss. Gleichwohl kann man nicht unmittelbar $\vartheta^a$ schreiben, weil dies $\vartheta$ als positive Grösse voraussetzen würde. Zum Ueberfluss kann man auch von folgender Betrachtung Gebrauch machen. Da nämlich der Ausdruck $(k^2 + \vartheta^2)^{\frac{1}{2}}$ den Modul der complexen Grösse $k + \vartheta i = \varrho\,(\cos\psi + i\sin\psi)$ vorstellt, dieser aber stets absolut zu nehmen ist, so ergiebt sich sofort, dass für $k = 0$ die $a^{te}$ Potenz des Moduls $\vartheta$ als numerische Grösse auftritt.

## §. 69.

### Folgerungen.

Setzt man in den obigen Formeln $a = \frac{1}{2}$, so gewinnt man mit Beachtung der Gleichheit $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ die Gleichungen

$$1.\quad \int_0^\infty \frac{\cos\vartheta x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\cos\frac{\pi}{4}}{(\pm\vartheta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{(\pm\vartheta)^{\frac{1}{2}}},$$

$$2.\quad \int_0^\infty \frac{\sin\vartheta x}{\sqrt{x}}\,dx = \pm\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{(\pm\vartheta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Und diese gehen für $\vartheta = 1$ in die folgenden über

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Wenn man jetzt $\sqrt{x}$ mit $x$ vertauscht, so kommt man zu dem Werthe des früher betrachteten Integrales $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$; wir gewinnen nämlich die Beziehung

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx,$$

welche also einen speciellen Fall der folgenden darstellt:

$$\int_0^\infty \cos(\vartheta x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\vartheta}} = \int_0^\infty \sin(\vartheta x^2)\,dx,\quad \vartheta > 0,$$

und aus der wir, wie sogleich gezeigt werden soll, die Formel

$$\int_0^\infty e^{i\vartheta x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\vartheta}}\,(1+i)$$

erhalten.

Multipliciren wir nämlich die Gleichung $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ mit $i$ und addiren das so gewonnene Resultat zu der ersten $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, so folgt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}\,e^{ix} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[1+i].$$

Schreiben wir aber hierin $x = \lambda y^2$, und beachten wir, dass wegen des positiven $x$ die Constante $\lambda$ nothwendig positiv sein muss; so entspringt sogleich für $y > 0$ die andere Form

$$2\int_0^\infty e^{i\lambda y^2}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\,[1+i],$$

aus welcher unmittelbar wieder

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda y^2}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\,[1+i]$$

fliesst*).

---

*) Gewöhnlich schreibt man diese Formel in der nachstehenden Gestalt:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda y^2}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,e^{\frac{\pi}{4}i},$$

weil $(1+i)\sqrt{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\pi}{4}i}$.

Mittelst dieser Gleichung aber werden wir eine sehr wichtige, von Euler gegebene Formel erzielen, sofern wir $y$ mit $x + \mu$ vertauschen, wo $\mu$ eine positive oder negative Constante bezeichnet. Vollziehen wir nämlich die angedeutete Substitution, so folgt augenblicklich

$$\text{I.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda x^2 + 2\lambda\mu x)i}\, dx = e^{-\mu^2\lambda i} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\,(1 + i) = e^{\left(\frac{\pi}{4} - \mu^2\lambda\right)i} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Und hieraus entsteht wieder, da unserer Voraussetzung zufolge $\lambda\mu$ eine beliebige positive oder negative Constante vorstellen kann, also $\lambda\mu = \nu$ gesetzt werden darf,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda x^2 + 2\nu x)i}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\, e^{-\frac{\nu^2}{\lambda} i}\, [1 + i].$$

Diese Gleichung aber liefert unmittelbar die beiden Formeln

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\,[\lambda x^2 + 2\nu x]\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \left[\cos\frac{\nu^2}{\lambda} + \sin\frac{\nu^2}{\lambda}\right]$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\,[\lambda x^2 + 2\nu x]\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \left[\cos\frac{\nu^2}{\lambda} - \sin\frac{\nu^2}{\lambda}\right],$$

Beziehungen, welche sich indess vereinfachen lassen, wenn man den Cosinus und Sinus der Summe $\lambda x^2 + 2\nu x$ in bekannter Weise auflöst und bedenkt, dass die Ausdrücke $\sin(\lambda x^2) \sin 2\nu x$, $\cos(\lambda x^2) \sin 2\nu x$ zu den ungeraden Functionen von $x$ gehören und um dieser Eigenschaft willen die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda x^2) \sin 2\nu x\, dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x^2) \sin 2\nu x\, dx$ mit Null gleichbedeutend sind. Mithin hat man jetzt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x^2) \cos 2\nu x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \left[\cos\frac{\nu^2}{\lambda} + \sin\frac{\nu^2}{\lambda}\right]$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda x^2) \cos 2\nu x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \left[\cos\frac{\nu^2}{\lambda} - \sin\frac{\nu^2}{\lambda}\right].$$

Und weil nun links nur gerade Functionen zu integriren sind, so folgt weiter

$$\int_0^\infty \cos(\lambda x^2)\cos 2\nu x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left[\cos\frac{\nu^2}{\lambda} + \sin\frac{\nu^2}{\lambda}\right],$$

$$\int_0^\infty \sin(\lambda x^2)\cos 2\nu x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left[\cos\frac{\nu^2}{\lambda} - \sin\frac{\nu^2}{\lambda}\right].$$

Da für das Intervall von 0 bis $\infty$ die Function $\sin 2\nu x$ ein Nullwerden des Integrales $\int_0^\infty \sin(\lambda x^2)\sin 2\nu x\,dx$ z. B. nicht hervorrufen kann, so könnte man statt $\cos 2\nu x$ jetzt $\sin 2\nu x$ setzen und nun das Integral $\int_0^\infty \sin(\lambda x^2)\sin 2\nu x\,dx$ auf einfachere Functionen zurückzuführen suchen; allein ein derartiges Beginnen würde völlig unausführbar bleiben müssen, weil ein solches Integral eine neue Transscendente vorstellt. In dem Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda x^2+2\nu x)i}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\,e^{-\frac{\nu^2}{\lambda}i}\,[1+i]$$

sind folglich, wenn man will, Transscendenten sui generis enthalten, die sich aber annulliren.

## §. 70.

### Die Euler'schen Formeln für $a < 0$.

Da für ein negatives $a$ das Integral $\Gamma(a)$ seine Bedeutung verliert, so setzen die Gleichungen 1. und 2. §. 62. die Constante $a$ nothwendig grösser, als 0 voraus. Sehen wir jedoch von den Ausdrücken $\dfrac{\Gamma(a)\begin{Bmatrix}\cos a\psi\\ \sin a\psi\end{Bmatrix}}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$ ab, und erinnern wir uns, dass für die obere Grenze die Integrale

$$\int_0^\infty \cos\vartheta x\,.\,x^{a-1}\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin\vartheta x\,.\,x^{a-1}\,dx$$

nicht sinnlos werden, sofern überhaupt $a - 1 < 0$ ist, so lässt sich offenbar behaupten, dass um so mehr die allgemeinen

Integrale $\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \begin{cases}\cos \vartheta x \\ \sin \vartheta x\end{cases} dx$ für die obere Grenze ihre Bedeutung nicht verlieren, wenn auch $a$ negative Werthe annehmen sollte. Zweifelhaft bleibt dies jedoch für die untere Grenze 0. Gewissheit darüber werden wir indess erlangen, wenn wir nachsehen, ob für die unendlich klein werdenden positiven Grössen $\delta$ und $\varepsilon$ die Integrale

$$\int_\varepsilon^\delta e^{-kx} \cos \vartheta x\, x^{a-1}\, dx \quad \text{und} \quad \int_\varepsilon^\delta e^{-kx} \sin \vartheta x \,.\, x^{a-1}\, dx$$

unter jeden angebbaren Werth sinken. Da nun das erstere der Integrale bekanntlich $= \varepsilon^{-k\xi} \cos \vartheta \xi \int_\varepsilon^\delta x^{a-1}\, dx$ gesetzt werden kann, und da wegen des endlichen Werthes von $\vartheta$ numerisch $\vartheta > \frac{\sin \vartheta \delta}{\delta}$, $\vartheta > \frac{\sin \vartheta \varepsilon}{\varepsilon}$, also absolut

$$\int_\varepsilon^\delta e^{-kx} \frac{\sin \vartheta x}{x}\, x^a\, dx < \vartheta \int_\varepsilon^\delta x^a\, dx$$

ist; so zeigt sich sofort, dass nur für das letztere Integral die Constante $a$ negative Werthe annehmen kann, aber nur solche, die grösser als $-1$ sind. Denn $\lim e^{-k\xi} \cos \vartheta \xi = 1$, $\lim \int_\varepsilon^\delta x^{a-1}\, dx = \infty - \infty$, $a < 0$ und

$$\lim \int_\varepsilon^\delta x^a\, dx = \lim \frac{\delta^{a+1} - \varepsilon^{a+1}}{a+1} = 0,$$

wenn das negative $a > -1$. Für $a = -1$ und bei dem Cosinusintegrale für $a = 0$ hätte man

$$\int_\varepsilon^\delta \frac{dx}{x} = \lg \frac{\delta}{\varepsilon},$$

d. h. eine völlig unbestimmte Form.

Um nun für ein negatives $a > -1$ die Werthe der Integrale

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \sin \vartheta x\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty x^{a-1} \sin \vartheta x\, dx$$

ohne Mühe zu erzielen, ersetzen wir zuvörderst in dem ersten

$a$ durch $a - 1$, wo jetzt $1 > a > 0$ ist, und berücksichtigen die unmittelbar einleuchtende Formel

$$\int_0^\infty e^{-kx} \sin \vartheta x \, x^{a-2} \, dx = \frac{\frac{\Gamma(a)}{a-1} \sin (a-1)\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a-1}{2}}}, \quad a > 1$$

$$= \frac{\frac{\Gamma(a)}{1-a} \sin (1-a)\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a-1}{2}}}, \quad a < 1 \text{*)}.$$

Daraus folgt alsdann für $k = 0$

$$\int_0^\infty x^{a-2} \sin \vartheta x \, dx = \frac{\Gamma(a)}{1-a} \frac{\sin (1-a)\psi}{(\pm \vartheta)^{a-1}},$$

eine Gleichung, die auch noch für $a = 1$ Geltung besitzt; denn man hat

$$\int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{x} \, dx = \pm \frac{\pi}{2},$$

je nachdem $\vartheta \gtrless 0$**).

---

*) Man beachte, dass

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \sin \vartheta x \, dx = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \frac{\sin a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$$

und setze hierauf $a = n - 1$, wo $1 > n > 0$. Für $k = 0$ hat man $2 > n > 0$ —.

Wendet man übrigens, wie dies später geschehen wird, die Relation $a\,\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ als allgemeingültig an, was ja bei Zugrundelegung der Euler'schen Gleichung für $\Gamma(a)$ wirklich der Fall ist; so folgt wegen

$$\Gamma(a-1) = \frac{\Gamma(a)}{a-1} \text{ aus } \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-2} \sin \vartheta x \, dx = \frac{\Gamma(a-1) \sin (a-1)\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a-1}{2}}}$$

die obige Formel unter allen Umständen sofort.

**) Ganz unabhängig von dem Obigen lässt das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{x} \, dx = \pm \frac{\pi}{2}$$

sich auf folgende Weise ermitteln.

Durch partielle Integration findet man leicht, dass für $k > 0$

## §. 71.

### Das Cauchy'sche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a}$ *).

Unsere vorhergehenden Untersuchungen haben uns gelehrt, dass in der wichtigen Gleichung $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx}\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a}$ die positive Constante eine complexe und selbst eine reine imaginäre Grösse vorstellen kann, nur muss für den Fall eines complexen Werthes von $k$ der reelle Theil wesentlich positiv sein. Durch diese Betrachtungen erhielten wir nämlich vor allem die nähere Bestimmung der vieldeutigen Potenz $(k+\vartheta i)^{-a}$; wir sahen, dass der völlig bestimmte Werth $\frac{e^{-a\psi i}}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$, wo $\psi$ einen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen ausdrückt, statt des unbestimmten Ausdruckes $(k+\vartheta i)^{-a}$

---

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-kx} \cos \vartheta x\, dx = \frac{k}{k^2+\vartheta^2},$$

und hieraus folgt wieder durch Integration nach $\vartheta$ zwischen den Grenzen 0 und $\vartheta$:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin \vartheta x}{x}\, dx = \int\limits_0^{\vartheta} \frac{k\, d\vartheta}{k^2+\vartheta^2} = \left[\operatorname{arctang} \frac{\vartheta}{k}\right]_0^{\vartheta} = \operatorname{arctang} \frac{\vartheta}{k}.$$

Für $k=0$ ist daher

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \vartheta x}{x}\, dx = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta \gtrless 0.$$

*) Man sehe: „Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales definies connues et celle d'un grand nombre d'autres;" par M. A. L. Cauchy in: Gergonne. Annales de mathématiques pures et appliquées, tome XVII., pag. 109. Der specielle Fall $c=1$ findet sich schon bei Poisson. Journal de l'école polytech., cah. 19, p. 480—481 — und Laplace: Théorie analytique des probabilités, page 134 (vergleiche Liouville in Crelle's Journal Bd. 13, S. 231).

gewählt werden musste und erlangten auf diese Weise die Gewissheit von dem Bestehen der so fruchtbaren Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)\, e^{-a\psi i}}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}.$$

Dieser Wahrheit werden wir indess der Bequemlichkeit halber in den nachfolgenden Untersuchungen die ursprüngliche Form

$$\int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k+\vartheta i)^a}$$

geben, dabei aber unter $(k+\vartheta i)^{-a}$ stets den völlig bestimmten Werth $\frac{e^{-a\psi i}}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$ verstehen.

Multipliciren wir nun genannte Gleichung durch $e^{c\vartheta i}$, wo $c$ eine positive oder negative Constante bedeutet, und integriren in Bezug auf $\vartheta$ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$; so erhalten wir unter der Voraussetzung, dass der sich ergebende Ausdruck nicht sinnlos wird, die Beziehung

$$1.\quad \int_{-\infty}^\infty e^{c\vartheta i}\, d\vartheta \int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \Gamma(a) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a}.$$

Und wenn wir links die Ordnung der Integration vertauschen, so kommt

$$2.\quad \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\, dx \int_{-\infty}^\infty e^{(c-x)\vartheta i}\, d\vartheta = \Gamma(a) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a}.$$

Zur Bildung beider Gleichungen sind wir ohne Zweifel berechtigt, wenn wir den Nachweis zu liefern vermögen, dass erstens das Integral $\int \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a}$ nicht ohne Bedeutung ist für unendliche Grenzen und dass zweitens die durch Umkehrung der Integrationsordnung hervorgerufene Unbestimmtheit nur scheinbar ist*).

---

*) $\int_{-\infty}^\infty e^{(c-x)\vartheta i}\, d\vartheta = \int_{-\infty}^\infty d\vartheta\, [\cos(c-x) + i \sin(c-x)]$.

Was zunächst die erste Frage betrifft, so ist für $a > 1$ leicht zu sehen, dass das Integral

$$\int \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a} = \int \frac{e^{c\vartheta i}\, e^{-a\psi i}\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$$

von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt werden darf. Denn ist $a > 1$, so verhält sich für sehr grosse Werthe von $\vartheta$ der Ausdruck $(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}$ wie $(\vartheta^2)^{\frac{a}{2}} = (\pm\,\vartheta)^a$; mithin bleibt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta)^{\frac{a}{2}}}$ eine bestimmte Grösse, weil die Integrale

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin c\vartheta \cdot \vartheta^{-a}\, d\vartheta \quad \text{und} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos c\vartheta\; \vartheta^{-a}\, d\vartheta \quad \text{für } a > 1$$

im Unendlichen nicht sinnlos sind*). Setzen wir daher vorläufig $a > 1$ voraus, so dürfen wir ohne Zweifel Gleichung 1. bilden, die wir auch als eine Combination der beiden folgenden Beziehungen auffassen können:

$$3.\quad \int\limits_0^{\infty} e^{c\vartheta i}\, d\vartheta \int\limits_0^{\infty} e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \Gamma(a) \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a},$$

$$4.\quad \int\limits_{-\infty}^{0} e^{c\vartheta i}\, d\vartheta \int\limits_0^{\infty} e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \Gamma(a) \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a}.$$

Diese aber bezeichnen offenbar für ein der Null sich näherndes positives $\varepsilon$ die Grenzwerthe der Gleichungen

$$3^a.\quad \int\limits_0^{\infty} e^{c\vartheta i} e^{-\varepsilon\vartheta}\, d\vartheta \int\limits_0^{\infty} e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \Gamma(a) \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\, e^{-\varepsilon\vartheta}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a}$$

und

$$4^a.\quad \int\limits_{-\infty}^{0} e^{c\vartheta i}\, e^{\varepsilon\vartheta}\, d\vartheta \int\limits_0^{\infty} e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \Gamma(a) \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{c\vartheta i}\, e^{\varepsilon\vartheta}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a},$$

deren linke Seiten augenscheinlich durch Umkehrung der

---

*) Der Werth $\vartheta = 0$ kommt, weil $k > 0$, hier natürlich nicht in Betracht.

Integrationsordnung zu völlig bestimmten Werthen führen. Und daher stellt Gleichung 1. die Grenze der folgenden vor

$$\Gamma(a)\int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon\vartheta}\, e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a} + \Gamma(a)\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\varepsilon\vartheta}\, e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a}$$

$$= \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\, dx \left[\int_0^\infty e^{-\varepsilon\vartheta+(c-x)\vartheta i}\, d\vartheta + \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon\vartheta+(c-x)\vartheta i}\, d\vartheta\right],$$

d. h.

$$1^a. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \lim \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\, \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+(c-x)^2}\, dx,$$

weil vermöge unserer frühern Betrachtungen oder auch kraft der Gleichung

$$\int e^{-\varepsilon\vartheta+(c-x)\vartheta i}\, d\vartheta = \frac{e^{-\varepsilon\vartheta+(c-x)\vartheta i}}{-\varepsilon+(c-x)i} + \text{const.}$$

die Beziehungen gelten

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon\vartheta+(c-x)\vartheta i}\, d\vartheta = \frac{1}{\varepsilon-(c-x)i}, \quad \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon\vartheta+(c-x)\vartheta i}\, d\vartheta = \frac{1}{\varepsilon+(c-x)i}$$

Die weitere Untersuchung ist somit durch Einführung des Hülfsfactors $e^{\mp\varepsilon\vartheta}$ auf die Ermittlung der Grenze des Integrales rechts in der Gleichung $1^a$. für ein ins Unendliche abnehmendes $\varepsilon$ zurückgeführt.

## §. 72.

**Das Integral $\int_0^\infty dx\, e^{-kx}\, x^{a-1}\, \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+(c-x)^2}$ für den Fall $a>1$.**

Setzen wir in dem Integrale

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\, \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+(c-x)^2}\, dx$$

die Constante $c$ zunächst negativ voraus, so wird offenbar der Zahlenwerth von $c-x$, weil $c$ und $-x$ dasselbe Zeichen führen, niemals kleiner, als $c$ sein können, selbst für $x=0$ nicht. Mithin ist $(c-x)^2$ wenigstens $=c^2$ und demnach der

Bruch $\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (c-x)^2}$ stets kleiner, als $\frac{2\varepsilon}{c^2}$. Daraus folgt, dass das obige Integral immer kleiner, als $\frac{\Gamma(a)}{k^a} \cdot \frac{2\varepsilon}{c^2}$ ist, und folglich wird für ein negatives $c$

$$\lim \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (c-x)^2} dx = 0.$$

Bezeichnet dagegen $c$ eine positive Grösse, so muss $x$ nothwendig einmal $c$ gleich werden; alsdann aber stellt der Bruch $\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (c-x)^2}$ wegen des sehr kleinen $\varepsilon$ einen sehr grossen Werth vor, und dies findet selbst noch in der Nähe von $c$ Statt. Wir scheiden daher behufs der Discussion diese besondere Stelle in dem Intervall von 0 bis $\infty$ von dem übrigbleibenden Theile desselben aus, d. h. wir schieben zwischen 0 und $\infty$ zwei Werthe ein, von denen der eine unter, der andere über $c$ liegt und untersuchen für jedes der hierdurch erzielten Theilintervalle unser obiges Integral. Mit andern Worten, wir zerlegen unser Integral in die folgenden

$$\int_0^{c-\delta} e^{-kx} x^{a-1} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (c-x)^2} dx, \quad \int_{c-\delta}^{c+\delta_1} e^{-kx} x^{a-1} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (c-x)^2} dx,$$

$$\int_{c+\delta_1}^\infty e^{-kx} x^{a-1} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (c-x)^2} dx$$

und sehen nach, was aus denselben wird, falls die positiven Grössen $\varepsilon$, $\delta$ und $\delta_1$ sämmtlich der Null sich nähern.

Da nun die Function $\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + (c-x)^2}$ innerhalb der vorkommenden Intervalle niemals das Zeichen wechselt und da die zwischen 0 und $\infty$ stets positiv bleibende Grösse $e^{-kx} x^{a-1}$ wegen $a > 1$ nie unendlich wird, unzweifelhaft aber einen grössten Werth $M$ erwirbt; so sind offenbar das erste und dritte der vorstehenden Integrale beziehungsweise kleiner, als

$$M \int_0^{c-\delta} \frac{2\varepsilon\, dx}{\varepsilon^2 + (c-x)^2} \quad \text{und} \quad M \int_{c+\delta_1}^\infty \frac{2\varepsilon\, dx}{\varepsilon^2 + (c-x)^2},$$

und das mittlere Integral wird gleich sein dem Producte aus

$\int_{c-\delta}^{c+\delta_1} \frac{2\varepsilon\, dx}{\varepsilon^2 + (c-x)^2}$ in einen zwischen dem Maximum und Minimum von $e^{-kx}\, x^{a-1}$ innerhalb des Intervalles $[c-\delta,\ c+\delta_1]$ befindlichen Factor $R$. Nun ist

$$\int \frac{2\varepsilon\, dx}{\varepsilon^2 + (x-c)^2} = 2 \text{ arc tang } \frac{x-c}{\varepsilon} + \text{const.},$$

und dieser arc tang wird, weil wir den Bogen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu wählen berechtigt sind, beziehlich für

$$x = 0, \quad x = c - \delta, \quad x = c + \delta_1, \quad x = \infty$$

die Werthe annehmen:

$$-\text{arc tang } \frac{c}{\varepsilon}, \quad -\text{arc tg } \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad \text{arc tang } \frac{\delta_1}{\varepsilon}, \quad \frac{\pi}{2}.$$

Da wir aber über die Grössen $\delta$ und $\delta_1$ ganz nach Willkür verfügen können, so dürfen wir ohne Zweifel die auf mannigfache Weise zu verwirklichende Annahme machen, dass mit abnehmendem $\varepsilon$ die Quotienten $\frac{\delta}{\varepsilon}$ und $\frac{\delta_1}{\varepsilon}$ ins Unendliche wachsen. Alsdann aber vereinigen sich augenscheinlich das erste und dritte unserer Integrale zur Null, und das mittlere Integral wird $= 2\pi e^{-kc}\, c^{a-1}$; denn für $\lim \delta = \lim \delta_1 = \lim \varepsilon = 0$ fallen zwischen $c - \delta$ und $c + \delta_1$ das Maximum und Minimum von $e^{-kx}\, x^{a-1}$, sowie $R$ mit $e^{-kc}\, c^{a-1}$ zusammen, und $2\left[\text{arc tg } \frac{\delta_1}{\varepsilon} + \text{arc tg } \frac{\delta}{\varepsilon}\right]$ geht in $2\pi$ über.

Ist $c$ endlich mit Null gleichbedeutend, so nimmt die Function $\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ in der Nähe der Null einen sehr grossen Werth an. Mithin werden wir jetzt unser Integral in die beiden zwischen 0 und $\delta$ und $\delta$ und $\infty$ zerfällen und nun $\delta$ langsamer, als $\varepsilon$ abnehmen lassen, so dass schliesslich das Integral $\int_0^{\delta} e^{-kx}\, x^{a-1} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}\, dx$ über das ganze entscheidet.

Da hier $R$ offenbar den Werth Null bekommt und $\int_0^{\delta} \frac{2\varepsilon\, dx}{\varepsilon^2 + x^2} = \pi$ wird, so hat man jetzt

$$\lim \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} dx = 0;$$

dies aber stellt einen besondern Fall von $2\pi e^{-kc} c^{a-1}$ vor, und folglich ist die Unterscheidung zwischen $c \gtreqless 0$ nunmehr überflüssig.

Aus allem diesem ergiebt sich sonach für $a > 1$ das Schlussresultat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k + \vartheta i)^a} = 0, \quad \text{wenn } c < 0,$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k + \vartheta i)^a} = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} e^{-kc} c^{a-1}, \text{ sofern } c > 0 \text{ ist.}$$

Das Integral erleidet also bloss eine Formänderung, wenn $c$ vom Negativen durch Null zum Positiven sich bewegt; es wird für $c > 0$ nur eine Function von $c$, während es vorher eine Constante, nämlich die Null ausdrückte.

## §. 73.

### Der Fall $0 < a \overline{\gtrless} 1$.

Bei den vorhergehenden Betrachtungen haben wir $a > 1$ angenommen. Wie aber gestalten sich die in Betracht kommenden Fälle, wenn das positive $a$ gleich oder kleiner, als 1 ist? Soll unter dieser Voraussetzung das Integral $\Gamma(a)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a}$ nicht bedeutungslos werden, so darf, wie ohne Mühe erhellt, $c$ den Werth Null höchstens nur für $a = 1$ annehmen. Denn

$$\int \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a} = \frac{1}{i(1-a)} \left[k+\vartheta i\right]^{-a+1} + \text{const.} = \frac{1}{i(1-a)} \frac{e^{-(a-1)\psi i}}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a-1}{2}}} + \text{const.};$$

ist folglich $a < 1$, so wird dieser Ausdruck für unendlich werdende Integrationsgrenzen völlig unbestimmt. Für $a = 1$ hingegen verwandelt sich $\int \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a}$ in $\int \frac{d\vartheta}{k+\vartheta i}$ und hieraus folgt wegen

$$\int \frac{d\vartheta}{k+\vartheta i} = \int \frac{k\,d\vartheta}{k^2+\vartheta^2} - i \int \frac{\vartheta\,d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}:$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{k+\vartheta i} = \pi - \frac{i}{2} \Big[\lg(k^2+\vartheta^2)\Big]_{-\infty}^{\infty}.$$

Da nun $\lg(k^2+\vartheta^2)$ für die unendlichen Grenzen unbestimmt ist, so hat man, falls dem Integrale jetzt noch eine Bedeutung beigelegt werden soll, für $a = 1$ unter $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{k+\vartheta i}$ nur den reellen Theil desselben zu verstehen; dieser aber ist der Zahl $\pi$ gleich.

Besitzt aber $c$ einen von Null verschiedenen Werth, so entspringt sogleich durch theilweise Integration

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\,d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a} = \frac{a}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\,d\vartheta}{(k+\vartheta i)^{a+1}},$$

das giebt, weil $a + 1 > 1$ und demnach

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\,d\vartheta}{(k+\vartheta i)^{a+1}} = \begin{cases} 0, & c < 0 \\ \frac{2\pi}{\Gamma(a+1)}\, e^{-kc}\, c^a, & c > 0 \end{cases}$$

ist,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\,d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a} = \begin{cases} 0, & c < 0 \\ \frac{2\pi}{\Gamma(a)}\, e^{-kc}\, c^{a-1}, & c > 0. \end{cases}$$

Lässt man hier $c$ continuirlich vom Positiven zum Negativen übergehen; so wird, wenn $a < 1$ ist, das Integral in der Nähe der Null ausserordentlich grosse Werthe annehmen, alsdann unendlich werden und schliesslich für $c < 0$ den Werth Null besitzen, für $a = 1$ dagegen von $\pi$ zu Null überspringen. In beiden Fällen findet also Unstetigkeit Statt.

## §. 74.

**Laplace'sche Integrale als specielle Fälle von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i} d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a}$ dargestellt.**

Wählen wir jetzt $a = 1$, so gewinnen wir die Beziehungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{k+\vartheta i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k-\vartheta i)\, e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{k^2+\vartheta^2} = \begin{cases} 0, & c < 0 \\ 2\pi\, e^{-kc}, & c > 0. \end{cases}$$

Hieraus aber folgt, weil das Integral einen reellen Ausdruck darbietet, dass der imaginäre Theil der Null gleich sein muss. Mithin entspringen die Gleichungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \sin c\vartheta - \vartheta \cos c\vartheta}{k^2 + \vartheta^2}\, d\vartheta = 0$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \cos c\vartheta + \vartheta \sin c\vartheta}{k^2 + \vartheta^2}\, d\vartheta = \begin{cases} 0, & c < 0 \\ 2\pi\, e^{-kc}, & c > 0. \end{cases} \;{}^{*})$$

Um in beiden Fällen $c > 0$ schreiben zu können, stellen wir uns das negative $c$ in der Form $-c$ vor, wo jetzt $c$ eine positive Grösse bezeichnet; alsdann gewinnen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \cos c\vartheta - \vartheta \sin c\vartheta}{k^2 + \vartheta^2}\, d\vartheta = 0, \quad c > 0.$$

Und diese Formel giebt nun in Verbindung mit der andern für $c > 0$ geltenden Beziehung die beiden zuerst von Laplace bestimmten Integrale

$$1. \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}\, d\vartheta = \frac{\pi}{k}\, e^{-kc},$$

---

*) Für $c = 0$ stellt dies Integral das arithmetische Mittel zwischen 0 und $2\pi$ vor, es ist also $= \pi$. Vergl. §. 73. — Die erste Formel liefert die evidenten Gleichungen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}\, d\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta \cos c\vartheta}{k^2 + \vartheta^2}\, d\vartheta = 0$; denn die einzelnen Elemente sind immer paarweise einander gleich, aber mit verschiedenem Vorzeichen behaftet.

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta \sin c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}\, d\vartheta = \pi\, e^{-kc},$$

aus denen wieder die einfacheren Gleichungen

1^a. $$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos c\,\vartheta}{k^2+\vartheta^2}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2k}\, e^{-kc},$$

2^a. $$\int_{0}^{\infty} \frac{\vartheta \sin c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\, e^{-kc}$$

fliessen.*) Augenscheinlich sind die beiden ersten (1. und 1^a.) continuirliche, die Integrale 2. und 2^a. dagegen unstetige Functionen des Parameters $c$. Denn für ein der Null unendlich nahe liegendes positives $c$ weichen jene nur unendlich wenig von ihren für $c=0$ erscheinenden Grenzwerthen $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{2k}$ ab, während bei den Integralen 2. und 2^a. endliche Differenzen sich ergeben. Für ein der Null ins Unendliche sich näherndes positives $c$ würden jetzt nämlich $\pi$ und $\frac{\pi}{2}$ die bezüglichen Grenzen der Integrale vorstellen, für $c=0$ sind auch sie $=0$, und für ein unendlich kleines negatives $c$ unterscheiden sich die Integrale unendlich wenig von $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$. Denkt man sich also $c$ als Abscisse und den jedesmaligen Werth der Integrale als die zugehörige rechtwinklige Ordinate, so würden die den Integralen 1. und 1^a. entsprechenden Curven zu den stetigen gehören, die geometrischen Bilder der Integrale 2. und 2^a. aber von $\pi$, $\frac{\pi}{2}$ zu $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$ überspringen. Die genannten Integrale bieten folglich ganz dieselben Eigenthümlichkeiten dar wie die trigonometrischen Reihen, und dies hann nicht befremden, weil, wie wir später sehen werden, sie besondere Fälle der Fourier'schen Integrale ausdrücken.

Die vorstehenden Betrachtungen setzen die Constanten $c$ und $k$ wesentlich positiv voraus. Tritt aber eine Aenderung

*) Nouveau Bulletin de la société philomatique Nr. 43 et 49; siehe Poisson: Journal de l'éc. pol. cah. 16, p. 233. Laplace. Théorie anal. des probabilités.

hierin ein, wäre z. B. $c$ negativ, so würde man aus den vorhergehenden Gleichungen sofort die jetzt geltenden erzielen können, indem man das positive $c$ durch — (— $c$) ersetzt und in dem Schlussresultat für — $c$ einfach $c$ schreibt; man würde also beispielsweise finden

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos c\vartheta\, d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}=\frac{\pi}{k}e^{kc},\ c<0 \text{ und} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vartheta \sin c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta=-\pi e^{kc},\ c<0.$$

In ganz ähnlicher Weise hätte man offenbar zu verfahren, wenn das positive $k$ negativ werden soll.

## §. 75.

**Die Integrale** $\int_0^{\infty}\frac{\cos c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n}d\vartheta$ **und** $\int_0^{\infty}\frac{\vartheta\sin c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n}d\vartheta$.*)

Bevor wir andern Untersuchungen uns zuwenden, mögen in Betreff der Laplace'schen Integrale noch einige nahe liegenden Bemerkungen nicht unterdrückt werden.

Differentiirt man nämlich die Gleichungen 1. und 1[a]. zunächst nach $c$, so bekommt man ersichtlich die Beziehungen 2., 2[a]. Eine nochmalige Derivation aber würde jetzt zu sinnlosen Resultaten führen.*) Die Anwendung des Leibnitz'schen Satzes erfordert also nicht bloss die Continuität der zu differentiirenden Function, sondern sie verlangt auch, dass ein nicht bedeutungsloses Integral das Ergebniss der Differentiation bildet.

Bezeichnet hingegen $k$ den Parameter, nach welchem derivirt wird, so darf nun ohne Zweifel eine beliebige Wiederholung der Operation eintreten. Beschränken wir uns für den jetzt vorliegenden Fall auf die Integrale

*) Vergl. Liouville's Journal Bd. 5, 8 und Serret. Cours de cal. diff. et int. t. II.; Schlömilch. Beiträge zur Theorie der best. Integrale.

**) Die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vartheta^2\cos c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta \text{ und} \int_0^{\infty}\frac{\vartheta^2\cos c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta$$

sind ohne Bedeutung, weil $\int\cos c\vartheta\, d\vartheta$ im Unendlichen unbestimmt ist.

$$\int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta\, d\vartheta}{k^2+\vartheta^2} = \frac{\pi}{2k}\, e^{-kc} \text{ und } \int_0^\infty \frac{\vartheta \sin c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\, e^{-kc},$$

so erhalten wir nach und nach die Relationen:

$$\int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^2} = \frac{\pi}{1\,.\,2^2}\, e^{-kc}\left[\frac{c}{k^2}+\frac{1}{k^3}\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^3} = \frac{\pi}{1\,.\,2\,.\,2^3}\, e^{-kc}\left[\frac{c^2}{k^3}+\frac{3c}{k^4}+\frac{3}{k^5}\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^4} = \frac{\pi}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2^4}\, e^{-kc}\left[\frac{c^3}{k^4}+\frac{6c^2}{k^5}+\frac{15c}{k^6}+\frac{15}{k^7}\right],$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n} = \frac{\pi}{\Gamma(n)}\,\frac{e^{-kc}}{2^n}\left[\frac{c^{n-1}}{k^n}+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{c^{n-2}}{k^{n+1}}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\,.\,4}\,\frac{c^{n-3}}{k^{n+2}}+\dots\right]$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\vartheta \sin c\vartheta\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^2} = \frac{\pi}{1.2^2}\, e^{-kc}\cdot\frac{c}{k},\quad \int_0^\infty \frac{\vartheta \sin c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^3}\, d\vartheta = \frac{\pi}{1.2.2^3}\, e^{-kc}\left[\frac{c^2}{k^2}+\frac{c}{k^3}\right],$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int_0^\infty \frac{\vartheta \sin c\vartheta\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n} = \frac{\pi}{\Gamma(n)}\,\frac{e^{-kc}}{2^n}\left[\frac{c^{n-1}}{k^{n-1}}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\,\frac{c^{n-2}}{k^n}+\dots\right].$$

Das Gesetz, nach dem hier die Coefficienten der einzelnen Glieder in den eingeklammerten Ausdrücken rechts fortschreiten, ist ersichtlich folgendes. Der Coefficient des ersten Gliedes heisst stets 1, der irgend eines andern, des $x^{\text{ten}}$, Gliedes dagegen wird gefunden, indem zu dem Coefficienten $a_x$ des ihm entsprechenden Gliedes im vorigen Ausdrucke das Product hinzuzufügen ist, dessen Factoren der Exponent $y$ von $k$ und der Coefficient $a_{x-1}$ des diesem letztern Gliede vorhergehenden Bruches sind. Mit andern Worten heisst dies, der zu bildende Coefficient $c_x$ wird definirt durch die Gleichung

$$c_x = y \, . \, a_{x-1} + a_x.$$

Selbstverständlich ist dabei für das letzte Glied $a_x = 0$.

Demnach muss z. B. der zweite Coefficient im allgemeinen Integral mit $1 + 2 + 3 + \ldots . + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$, der des dritten Gliedes hingegen mit

$$\frac{1.2.3}{2} + \frac{2.3.4}{2} + \ldots . + \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4}$$

gleichbedeutend sein. Die Zahl $n$ drückt hierbei für das Cosinusintegral die Anzahl der Differentiationen, für das Sinusintegral aber die um 1 vermehrte Anzahl derselben aus. Gestützt auf das vorhin entwickelte Gesetz lässt sich übrigens mittelst vollständiger Induction sofort die Richtigkeit der Gleichung

$$c_m = \frac{(n+m)\,(n+m-1)\ldots(n-m+1)}{2.4.6\ldots 2m}$$

nachweisen, wenn $m = 0, 1, 2, \ldots n$ und $c_0 = 1$ genommen wird. Denn nehmen wir an, dass bis zur $n-1^{sten}$ Differentiation inclusive die Coefficienten der einzelnen Glieder dieser Formel gemäss gebildet sind, dass also z. B.

$$a_{m-1} = \frac{(n+m-2)(n+m-3)\ldots(n-m+1)}{2.4.6\ldots(2m-2)}, a_m = \frac{(n-1+m)(n+m-2)\ldots(n-m)}{2.4.6\ldots 2m};$$

so ist

$$c_m = \frac{(n+m-1)(n+m-2)(n+m-3)\ldots(n-m+1)}{2.4.6\ldots(2m-2)} + \frac{(n+m-1)\ldots(n-m)}{2.4.6\ldots 2m}$$

$$= \frac{(n+m-1)\ldots(n-m+1)}{2.4.6\ldots(2m-2)}\left[1 + \frac{n-m}{2m}\right] = \frac{(n+m)\,(n+m-1)\ldots(n-m+1)}{2.4.6\ldots 2m}.$$

Ihrer Ableitung gemäss gelten die vorhergehenden Formeln nur für ein ganzes absolutes $n$. Ohne grosse Mühe können wir dieselben jedoch von einem Integrale abhängig machen, in welchem $n$ irgend eine positive Zahl bedeutet und das für den Fall eines ganzen $n$ unmittelbar in die vorstehenden Ausdrücke übergeht.

Multipliciren wir nämlich die Euler'sche Gleichung

$$\frac{1}{(k+\vartheta i)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{n-1}\, dx$$

mit $e^{(c+y)\vartheta i}\, \vartheta^{p-1}\, d\vartheta$, wo $c$ und $y$ beide grösser, als Null sein

sollen, und integriren wir dieselbe zwischen 0 und $\infty$, so erhalten wir die Beziehung

$$1.\ \int_0^\infty \frac{e^{(c+y)\vartheta i}\,\vartheta^{p-1}\,d\vartheta}{(k+\vartheta i)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-kx}\,x^{n-1}\,dx \int_0^\infty e^{(c+y-x)\vartheta i}\,\vartheta^{p-1}\,d\vartheta.$$

Zu ihrer Bildung sind wir offenbar berechtigt, wenn wir die positive Constante $p$ als echten Bruch voraussetzen; denn nun wird das rechts befindliche Integral $\int_0^\infty e^{(c+y-x)\vartheta i}\,\vartheta^{p-1}\,d\vartheta$ durch die bekannten Ausdrücke vorgestellt, und folglich bleibt das Doppelintegral eine völlig bestimmte Grösse, die wir der Kürze halber durch $G + Hi$ bezeichnen wollen.

Multipliciren wir anderseits die Gleichung

$$\frac{1}{(k-\vartheta i)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-(k-\vartheta i)y}\,y^{n-1}\,dy$$

mit $\dfrac{e^{c\vartheta i}\,\vartheta^{p-1}\,d\vartheta}{(k+\vartheta i)^n}$, und integriren wir auch hier von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \infty$, so bekommen wir die Formel

$$\int_0^\infty \frac{e^{c\vartheta i}\,\vartheta^{p-1}\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-ky}\,y^{n-1}\,dy \int_0^\infty \frac{e^{(c+y)\vartheta i}\,\vartheta^{p-1}}{(k+\vartheta i)^n}\,d\vartheta,$$

das heisst

$$\int_0^\infty \frac{e^{c\vartheta i}\,\vartheta^{p-1}\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n} = \frac{1}{(\Gamma(n))^2} \int_0^\infty e^{-ky}\,y^{n-1}\,(G + Hi)\,dy.$$

Hieraus aber entspringt durch Trennung des Reellen und Imaginären die specielle Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\sin(c\vartheta)\,\vartheta^{p-1}\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n} = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty e^{-ky}\,y^{n-1}\,H\,dy;$$

und da diese, wie aus dem Frühern leicht erhellt, selbst für $p = 0$ noch Geltung besitzt, so hat man auch die folgende Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{\frac{\sin c\,\vartheta}{\vartheta}}{(k^2+\vartheta^2)^n}\,d\vartheta = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty e^{-ky}\,y^{n-1}\,H\,dy.$$

Wird dieselbe nach $c$ derivirt, so entsteht

$$2. \quad \int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n}\, d\vartheta = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty \frac{\partial H}{\partial c}\, e^{-ky}\, y^{n-1}\, dy.$$

Nun folgt aber aus Gleichung 1. für $p = 0$

$$H = \int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} dx \int_0^\infty \frac{\sin(c+y-x)\vartheta\, d\vartheta}{\vartheta} = \int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} dx . \left(\pm\frac{\pi}{2}\right),$$

je nachdem $c + y - x \gtrless 0$. Mit andern Worten heisst dies:

$$H = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{c+y} e^{-kx}\, x^{n-1}\, dx - \int_{c+y}^\infty e^{-kx}\, x^{n-1}\, dx\right],$$

und sonach wird

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{\pi}{2}\left[e^{-k(c+y)}(c+y)^{n-1} + e^{-k(c+y)}(c+y)^{n-1}\right] = \pi e^{-k(c+y)}\,(c+y)^{n-1}.$$

Substituiren wir aber diesen Werth in den oben gefundenen Ausdruck 2., so ergiebt sich die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n}\, d\vartheta = \frac{\pi e^{-kc}}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-2ky}\,(c+y)^{n-1}\, y^{n-1}\, dy,$$

ie wir auch so schreiben können

$$\int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n}\, d\vartheta = \frac{\pi e^{-kc}}{[\Gamma(n)]^2\, 2^{2n-1}}\int_0^\infty e^{-ky}\,(2c+y)^{n-1}\, y^{n-1}\, dy.\text{*)}$$

Für ein ganzes $n$ lässt sich das Integral rechts mit Leichtigkeit in Gammafunctionen umsetzen; denn jetzt hat man mit Benutzung des Binomialtheoremes und der Formel

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-r)} = (n-1)\,(n-2)\ldots(n-r),\; n > r:$$

$$3. \quad \int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n}\, d\vartheta = \frac{\pi e^{-kc}}{2^{2n-1}\,\Gamma(n)}\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{\Gamma(2n-r-1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r)}\,\frac{(2c)^r}{k^{2n-r-1}}.\text{**)}$$

---

*) Einen andern Beweis dieser Formel sehe man bei A. Enneper in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik. Jahrg. 6. S. 289.

**) $\int_0^\infty \binom{n-1}{r} e^{-ky}\, y^{2n-r-1-1}\,(2c)^r dy = \binom{n-1}{r}(2c)^r\,\frac{\Gamma(2n-r-1)}{k^{2n-r-1}}.$

Und hieraus entspringt wieder durch Differentiation nach $c$:

$$4.\quad \int_0^\infty \frac{\vartheta \sin c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n}\, d\vartheta = \frac{\pi e^{-kc}}{2^{2n-1}\,\Gamma(n)} \sum_0^{n-1} \frac{\Gamma(2n-r-1)}{\Gamma(r+1)\ \Gamma(n-r)} \frac{(2c)^r}{k^{2n-r-1}} \left[k - \frac{r}{c}\right].$$

Dass diese Formeln aber von den oben gegebenen nur in der Schreibweise verschieden sind, bedarf keines Beweises.

Setzt man endlich noch $y = \frac{c}{2}(x-1)$, so wird

$$\int_0^\infty e^{-2ky}(c+y)^{n-1} y^{n-1}\, dy$$

mit dem Integrale

$$\left(\frac{c}{2}\right)^{2n-1} e^{kc} \int_1^x e^{-kcx}(x^2-1)^{n-1}\, dx$$

identisch, und demnach gilt auch diese Relation:

$$\int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n}\, d\vartheta = \frac{\pi c^{2n-1}}{2^{2n-1}\,[\Gamma(n)]^2} \int_1^\infty e^{-kcx}(x^2-1)^{n-1}\, dx.\text{*)}$$

Wenn man will, so kann man ferner noch folgende Gleichung bemerken:

$$\int_0^\infty \frac{\sin c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{-\pi e^{-kc}}{2^{2n-1} k\Gamma(n)} \sum_0^{n-1} \frac{2^r}{k^{2n-r-1}} \frac{\Gamma(2n-r-1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r)} \left[c^r + \frac{r}{k} c^{r-1} + \ldots + \frac{r!}{k^r}\right]$$

$$+ \frac{\pi}{2^{2n-1}\,\Gamma(n)} \sum_0^{n-1} \frac{2^r}{k^{r+1}} \frac{\Gamma(2n-r+1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r)} \frac{1}{k^{2n-r-1}}$$

oder besser geschrieben

$$\int_0^\infty \frac{\sin c\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{\pi}{2^{2n-1} k\Gamma(n)} \sum_0^{n-1} \frac{2^r\Gamma(2n-r-1)}{\Gamma(n-r)\Gamma(r+1)} \frac{1}{k^{2n-r-1}} \times$$

$$\left[\frac{1}{k^r} - e^{-kc}\left(c^r + \frac{r}{k} c^{r-1} + \ldots + \frac{r!}{k^r}\right)\right].$$

Sie ergiebt sich, wie auf den ersten Blick erhellt, aus Gleichung $3^a$. durch Integration nach $c$ zwischen den Grenzen 0 und $c$.

*) Man vergleiche hierüber die oben genannten Abhandlungen von Catalan und Serret in Liouville's Journal t. V, VIII; ausserdem Serret: Cours de calcul diff. et intégral, tome II.

## §. 76.

**Das Cauchy'sche Integral** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a\,(1\pm\vartheta i)^b}$ **für** $a+b>1$ **und positive** $a$ **und** $b$.*)

Die in den Paragraphen 71.—73. geführten Untersuchungen setzen uns in den Stand, aus unserer frühern Gleichung

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-(k+\vartheta i)x}\,x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{(k+\vartheta i)^a}$$

neue Folgerungen zu ziehen, wenn wir sie mit $\frac{d\vartheta}{(1\pm\vartheta i)^b}$ multipliciren und zwischen den Grenzen $-\infty$ und $\infty$ integriren. Dabei setzen wir die Grösse $k$ als eine positive Constante voraus und machen auch vorläufig die Annahme, dass die Constante $b$ ebenfalls zu den positiven Grössen gehört.

Die wichtige Frage nun, ob und, falls es möglich sein sollte, unter welchen Bedingungen dem Integrale

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a\,(1\pm\vartheta i)^b}$$

eine Bedeutung zukommen wird, entscheidet sich hier augenblicklich dahin, dass zu diesem Behufe nur die Summe der Exponenten $a$ und $b$ einen die Einheit überschreitenden Werth besitzen muss. Denn nach der Bedeutung der hier in Betracht kommenden Potenzen leuchtet unmittelbar ein, dass im Unendlichen der Nenner des Bruches $\frac{1}{(k+\vartheta i)^a\,(1\pm\vartheta i)^b}$ wie der Ausdruck $(\pm\,\vartheta)^{a+b}$ sich verhält.

Nehmen wir nun vorerst in dem Ausdrucke $\frac{1}{(1\pm\vartheta i)^b}$ das obere Zeichen von $\vartheta$, so folgt augenblicklich

$$\Gamma(a)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a\,(1+\vartheta i)^b} = \int\limits_0^{\infty} e^{-kx}\,x^{a-1}\,dx\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\vartheta\,\frac{e^{-x\vartheta i}}{(1+\vartheta i)^b}.$$

---

*) Gergonne's Annalen, Bd. 17, S. 109.

Dem Vorhergehenden zufolge aber gilt die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x\vartheta i}}{(1+\vartheta i)^b}\, d\vartheta = 0,$$

weil $x$ positiv und folglich $-x$ mit dem frühern $c <$ zusammenfällt. Daher hat man

$$1. \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a (1+\vartheta i)^b} = 0, \; a + b > 1.$$

In ebenso einfacher Weise werden wir zu dem Werthe d Integrales $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a (1-\vartheta i)^b}$ gelangen, wenn wir bedenke dass durch die Substitution von $-\vartheta$ an die Stelle von unsere frühere Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a} = \begin{cases} 0, & c < 0 \\ \frac{2\pi}{\Gamma(a)} e^{-kc} c^{a-1}, & c > 0 \end{cases}$$

in die folgende

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k-\vartheta i)^a} = \begin{cases} 0, & c < 0 \\ \frac{2\pi}{\Gamma(a)} e^{-kc} c^{a-1}, & c > 0 \end{cases}$$

übergeht. Mit Benutzung dieser Beziehung gewinnen w nämlich sofort die Gleichung

$$\Gamma(a) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a (1-\vartheta i)^b} = \frac{2\pi}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} e^{-(k+1)x} x^{a+b-2}\, dx,$$

das heisst

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a (1-\vartheta i)^b} = \frac{2\pi}{(k+1)^{a+b-1}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}, \; a + b > 1.$$

Wie man sieht, ist der Ausdruck rechts völlig symmetrisc links aber ist nur insofern Symmetrie vorhanden, dass ma in Folge der Bedeutung der vorkommenden Potenzen d Grössen $\vartheta$ und $-\vartheta$ mit einander vertauschen darf, weil d imaginäre Theil des Integrales nicht in Betracht kommt.

## §. 77.

**Allgemeingültigkeit der Gleichung 2. für $a+b>1$.**

Wie wir gesehen, ist die Bildung des Integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a (1-\vartheta i)^b}$$

bloss an die Bedingung $a+b>1$ geknüpft. Daraus folgt offenbar, dass eine der Constanten $a$ und $b$ negative Werthe annehmen darf, wenn nur die Forderung $a+b>1$ befriedigt wird. Zweifelhaft aber bleibt es, ob auch in einem derartigen Falle das Integral noch auf Gammafunctionen zurückführbar ist; denn dass die Form der Gleichung 2. ihre Anwendbarkeit verliert, wenn die bis jetzt festgehaltene Bedeutung der Gammafunction als bestimmtes Integral nicht in irgend einer Weise modificirt wird, leuchtet unmittelbar ein. Um zu einer Beantwortung unserer Frage zu gelangen, müssen wir also einen andern Weg aufsuchen, und hierzu wählen wir die partielle Integration. Diese, auf das Integral

$$\int \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a (1-\vartheta i)^b}$$

angewendet, zeigt nun sogleich, dass wegen $a+b>1$ die Beziehung gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (k+\vartheta i)^{-a} (1-\vartheta i)^{-b}\, d\vartheta = \frac{b}{a-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^{a-1} (1-\vartheta i)^{b+1}},$$

das giebt, wenn wir den Ausdruck links als bekannt voraussetzen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^{a-1} (1-\vartheta i)^{b+1}} = \frac{a-1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a (1-\vartheta i)^b}.$$

Bezeichnen demnach auch bloss $a$ und $b$ positive Grössen, so hat man noch immer die folgende Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^{a-1} (1-\vartheta i)^{b+1}} = \frac{a-1}{b} \cdot \frac{2\pi}{(k+1)^{a+b-1}} \cdot \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,.\,\Gamma(b)}.$$

Diese Beziehung aber würde sich vereinfachen, wenn wir die Annahme machen, dass die Reductionsformel $a\Gamma(a)=\Gamma(a+1)$

jetzt überall gilt, also auch $(a-1)\Gamma(a-1) = \Gamma(a)$ ist. Denn alsdann wäre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(k+\vartheta i)^{a-1}(1-\vartheta i)^{b+1}} = \frac{2\pi\,\Gamma(a+b-1)}{(k+l)^{a+b-1}\,\Gamma(a-1)\,\Gamma(b+1)}.$$

Der Ausdruck hätte somit ganz die frühere Form, nur hiessen hier die Argumente $a-1$ und $b+1$. Daraus aber würde weiter folgen, dass er für irgend ein $a$ und $b$ in Kraft bliebe, wenn nur der Bedingung $a+b>1$ Genüge geleistet wird. Wäre also $b$ negativ, so würde man vermöge der Formel von der Combination $a\,b$ allmählich zu einer Combination $a-n$, $b+n$ übergehen können, in der beide Elemente zu den positiven Grössen gehören. Dazu ist offenbar erforderlich, dass $n$ die kleinste ganze Zahl ausdrückt, welche zu $b$ hinzugefügt ein positives Resultat liefert; denn hat $n$ die angegebene Bedeutung, so bezeichnet die Verbindung $b+n$ entweder die Null, oder sie ist ein positiver echter Bruch, und folglich muss $a-n$ einen unechten positiven Bruch vorstellen.

Aus allem diesem ergiebt sich mithin der Satz, dass beim Bestehen der Bedingung $a+b>1$ Gleichung 2. selbst dann noch Geltung besitzt, wenn auch eine der Constanten negativ sein sollte, sofern wir nur unter der Function Gamma eine Grösse verstehen, für welche die Relation $a\Gamma(a)=\Gamma(a+1)$ allgemeingültig ist. Hierzu aber sind wir in der That berechtigt, weil, wenn wir mit Gauss die Gammafunction durch die Euler'sche Gleichung

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1.2.3\ldots n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\,n^a,\ n=\infty$$

definiren, die genannte Beziehung immer eine unmittelbare Folge dieser Definitionsgleichung ist.

## §. 78.

### Folgerungen.

Die Gleichung 2. des Paragraphen 76. vereinfacht sich, wenn man $l=k$ voraussetzt; alsdann nämlich erhält man sogleich die Relation

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(b-a)\psi i}\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a+b}{2}}} = \frac{2\pi}{(2k)^{a+b-1}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},\quad a+b>1,$$

und diese führt zu den andern beiden

$$1.\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(b-a)\psi\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a+b}{2}}} = \frac{2\pi}{(2k)^{a+b-1}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

$$2.\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(b-a)\psi\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a+b}{2}}} = 0,$$

von denen die erste sofort die einfachere Gleichung

$$3.\qquad \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos(b-a)\psi\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a+b}{2}}} = \frac{\pi}{(2k)^{a+b-1}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(a)}$$

liefert.

Eine andere Gestalt aber nehmen diese Integrale an durch die Substitution $\vartheta = k \operatorname{tang} \psi$ oder einfacher $\vartheta = \operatorname{tang} \psi$, wenn in denselben zuvor $k = 1$ geschrieben wird. So nämlich bekommt man von $k$ befreite Formen, in denen an die Stelle des Unendlichen $\frac{\pi}{2}$ tritt und in denen $\cos \psi^{a+b-2}\, d\psi$ anstatt des Ausdruckes $\frac{d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a+b}{2}}}$ erscheint. Und da nun die Constanten $a$ und $b$ nur an die Bedingung $a+b>1$ geknüpft sind, so dürfen wir auch $a+b-1$ der positiven Grösse $p$ gleichsetzen, für $b-a$ dagegen die beliebige Grösse $q$ substituiren.

Das Ergebniss aller dieser Rechnungen wird alsdann in den Gleichungen sich aussprechen:

$$1^a.\quad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi^{p-1} \cos q\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2^{p-1}} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)},$$

$$3^a. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi^{p-1} \cos q\,\psi\, d\,\psi = \frac{\pi}{2^p}\, \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)},$$

$$2^a. \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi^{p-1} \sin q\,\psi\, d\,\psi = 0,$$

von denen die ersteren ersichtlich jedesmal der Null gleich sind, so oft $\frac{p-q+1}{2}$ eine ganze negative Zahl vorstellt, oder mit Null zusammenfällt.

Setzt man $p = 1$ voraus, so erhält man die Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos q\,\psi\, d\,\psi = \frac{\pi}{2}\, \frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{q}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{q\pi}{2}}{q},$$

d. g.

$$\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{q}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{q\pi}{2}},$$

und folglich kann für positive Argumente, d. h. für $0 < \frac{q}{2} < 1$ in der hier angegebenen Weise das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi},\ 0 < a < 1$$

ermittelt werden.*)

Drei andere besonderen Fälle liefern die von Poisson**) gefundenen Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi^p \cos(p-2n)\,\psi\, d\,\psi = \frac{\pi}{2^{p+1}}\, \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!},\ n < p + [illegible]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi^p \cos(p+2n)\,\psi\, d\,\psi = 0,\ n \gtreqless 1$$

*) Vergl. Binet in Journal de l'éc. polyt., cah. 27, page 166.

**) Journal de l'école polyt., cah. 19, page 490.

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi^p \cos p\,\psi\, d\,\psi = \frac{\pi}{2^{p+1}},$$

in deren ersten beiden $n$ eine ganze, den angezeigten Bedingungen unterworfene ganze Zahl ausdrückt.*)

Schreibt man ferner die Gleichungen $1^a$. und $2^a$. in der nachstehenden Form

$$1^b. \quad \int_0^{\pi} \sin\psi^{p-1} \cos q\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) d\psi = \frac{\pi}{2^{p-1}} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)},$$

$$2^b. \quad \int_0^{\pi} \sin\psi^{p-1} \sin q\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) d\,\psi = 0$$

und multiplicirt nun das erstere Integral einerseits mit $\cos q\frac{\pi}{2}$, andererseits mit $\sin q\frac{\pi}{2}$, während man bei dem zweiten Integrale diesen Fällen entsprechend umgekehrt verfährt; so gelangt man durch Combination der erzielten, in der genannten Weise einander entsprechenden Resultate ohne Mühe zu den Beziehungen

$$4. \quad \int_0^{\pi} \sin\psi^{p-1} \cos q\psi\, d\psi = \frac{\pi\cos q\frac{\pi}{2}}{2^{p-1}} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)},$$

$$5. \quad \int_0^{\pi} \sin\psi^{p-1} \sin q\psi\, d\psi = \frac{\pi\sin q\frac{\pi}{2}}{2^{p-1}} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)}.$$

Zu andern interessanten Folgerungen werden wir noch geführt, wenn wir die Gleichungen 1. und 2. §. 76., also

*) Bei dem ersten dieser Integrale bemerke man, dass es sich in nebenstehender Gestalt schreiben lässt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi^p \cos(p - 2n)\,\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2^{p+1}} \frac{\Gamma(p - n + 1 + n)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(p - n + 1)}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(b\psi_1+a\psi)i}\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}\,(l^2+\vartheta^2)^{\frac{b}{2}}} = 0$$

nd

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(b\psi_1-a\psi)i}\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}\,(l^2+\vartheta^2)^{\frac{b}{2}}} = \frac{2\pi}{(k+l)^{a+b-1}}\,\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}$$

$, a+b$

mit einander verbinden. Aus ihnen nämlich folgt leich

6. $$\int_0^{\infty} \frac{\cos(b\psi_1+a\psi)\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}\,(l^2+\vartheta^2)^{\frac{b}{2}}} = 0,$$

7. $$\int_0^{\infty} \frac{\cos(b\psi_1-a\psi)\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}\,(l^2+\vartheta^2)^{\frac{b}{2}}} = \frac{\pi}{(k+l)^{a+b-1}}\,\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

und diese beiden Integrale liefern auf dem Wege der  
tion und Subtraction die neuen Beziehungen

8. $$\int_0^{\infty} \frac{\cos a\psi \cos b\psi_1\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}\,(l^2+\vartheta^2)^{\frac{b}{2}}} = \frac{\pi}{2(k+l)^{a+b-1}}\,\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

9. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin a\psi \sin b\psi_1\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}\,(l^2+\vartheta^2)^{\frac{b}{2}}} = \frac{\pi}{2(k+l)^{a+b-1}}\,\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

welche noch besonders einfach für $b = 1$ z. B. werden  
man hat jetzt

8ᵃ. $$\int_0^{\infty} \frac{\cos a\psi\,d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}\,(l^2+\vartheta^2)} = \frac{\pi}{2l(k+l)^a}\;{}^{*)}$$

und

*) Einen besondern Fall dieses Integrales bildet das  
gebene:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\vartheta}{1+\vartheta^2}\,\frac{\cos\left(n \operatorname{arctg}\frac{\alpha\vartheta}{x}\right)}{(x^2+\alpha^2\vartheta^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(x+\alpha}$$

Oeuvres complètes de N. H. Abel, t. II., p. 87.

$$9^a. \quad \int_0^\infty \frac{\sin a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}} \frac{\vartheta\, d\vartheta}{l^2+\vartheta^2} = \frac{\pi}{2(k+l)^a}.$$

Setzen wir aber $l = 0$, so entspringen die Integrale

$$8^b. \quad \int_0^\infty \frac{\cos a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}} \frac{d\vartheta}{\vartheta^b} = \frac{\pi}{2\,k^{a+b-1}\cos\frac{b\pi}{2}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

$$9^b. \quad \int_0^\infty \frac{\sin a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}} \frac{d\vartheta}{\vartheta^b} = \frac{\pi}{2\,k^{a+b-1}\sin\frac{b\pi}{2}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

in Betreff deren jedoch Folgendes nicht zu übersehen ist.

Bekanntlich stützen sich die Integrale 6. und 7. auf die Formeln

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x\vartheta i}d\vartheta}{(l+\vartheta i)^b} = 0 \text{ und} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x\vartheta i}d\vartheta}{(l-\vartheta i)^b} = \frac{2\pi}{\Gamma(b)}\, e^{-lx}\, x^{b-1},$$

und diese waren wiederum eine Folge der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-(l+\vartheta i)x}\, x^{b-1}\, dx = \frac{\Gamma(b)}{(l+\vartheta i)^b}.$$

Von ihr aber wurde früher gezeigt, dass für $l = 0$ die Constante $b$ numerisch den Werth 1 nicht erreichen darf; ja, für das Cosinusintegral muss selbst $b$ einen positiven echten Bruch ausdrücken, und nur für das Sinusintegral kann $b < 0$ werden. Im Hinblick auf diesen letztern Fall aber kann das Integral $\int_0^\infty \sin\vartheta x\, x^{b-1}\, dx$ leicht in der zweckmässigen Form

$$\int_0^\infty \frac{\sin\vartheta x\, dx}{x^b} = \frac{\vartheta^{b-1}}{\Gamma(b)} \frac{\pi}{2\sin\frac{b\pi}{2}}$$

dargestellt werden, wo das jetzige $b$ zwischen 0 und 2 liegt. Und daher ergiebt sich nun der Satz, dass ausser der den beiden Integralen $8^b$. und $9^b$. gemeinsamen Bedingung $a+b>1$ in dem Cosinusintegrale die Constante $b$ einen zwischen 0 und 1 liegenden Werth besitzen muss, während sie in dem Integrale $9^b$. alle zwischen 0 und 2 befindlichen Zahlen durchlaufen kann.

In anderer Form zeigen sich übrigens diese Integrale, wenn man auch hier $k = 1$ und $\vartheta = \operatorname{tang} \psi$ schreibt; man gewinnt so die nachstehenden Formeln

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi^{a-2} \cos a\psi \operatorname{cotg} \psi^b \, d\psi = \frac{\pi}{2 \cos \frac{b\pi}{2}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi^{a-2} \sin a\psi \operatorname{cotg} \psi^b \, d\psi = \frac{\pi}{2 \sin \frac{b\pi}{2}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)},$$

aus denen durch die besondere Wahl der Constanten einige nicht uninteressanten Beziehungen erwachsen. So ist z. B. für $b = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin a\psi \cos \psi^{a-1}}{\sin \psi} \, d\psi = \frac{\pi}{2},$$

was Liouville zuerst gefunden hat.*) Nimmt man dagegen $a = 2$, so kommt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\psi \operatorname{cotg} \psi^b \, d\psi = \frac{\pi b}{2 \cos \frac{b\pi}{2}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\psi \operatorname{cotg} \psi^b \, d\psi = \frac{\pi b}{2 \sin \frac{b\pi}{2}}.$$

Und setzt man $a$ als ganze Zahl voraus, so hat man wegen

$$\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)} = \frac{(a+b-2)(a+b-3)\dots b\,\Gamma(b)}{1.2.3\dots(a-1)}:$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi^{a-2} \cos a\psi \operatorname{cotg} \psi^b \, d\psi = \frac{b(b+1)\dots(a+b-2)}{(a-1)!} \frac{\pi}{2 \sin \frac{1}{2} b\pi},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi^{a-2} \sin a\psi \operatorname{cotg} \psi^b \, d\psi = \frac{b.(b+1)\dots(a+b-2)}{(a-1)!} \frac{\pi}{2 \sin \frac{1}{2} b\pi}.$$

*) Crelle. Journal Bd. 13, S. 232. Berlin. 1835. Vor Liouville ist vielleicht schon Abel im Besitz dieses Integrales gewesen; es findet sich im 2. Bande seiner 1839 herausgegebenen Werke, S. 88.

Behufs einer naheliegenden Folgerung möge die letztere Gleichung mit $r^a$ multiplicirt werden, wo $r$ eine zwischen $\pm 1$ befindliche Grösse vorstellt. Alsdann bezeichnet auch $r \cos \psi$ eine zwischen $\pm 1$ liegende Grösse, und folglich erhält man, wenn $a = 1, 2, 3, \ldots$ *in inf.* gesetzt wird, durch Summation der einzelnen Integrale mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$r \cos \psi \sin \psi + (r \cos \psi)^2 \sin 2 \psi + \ldots = \frac{r \cos \psi \sin \psi}{1-(2r-r^2) \cos \psi^2} \text{*)},$$

$$1 + \frac{b}{1} r + \frac{b(b+1)}{1 \, . \, 2} r^2 + \ldots = (1-r)^{-b}$$

schliesslich

$$10. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotg} \psi^{b-1} \, d\psi}{1-(2r-r^2) \cos \psi^2} = \frac{1}{(1-r)^b} \frac{\pi}{2 \sin \frac{1}{2} b \pi}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 > r > -1 \\ 2 > b > 0 \end{matrix} \right. .$$

**Benutzung unendlicher Reihen.**

## §. 79.

### Ableitung eines Hülfssatzes aus der Reihenlehre.

Schon in dem allgemeinen Theile der vorliegenden Darstellung der Theorie der bestimmten Integrale deuteten wir die Wichtigkeit an, welche dem Theoreme von der Vertauschung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen mit constanten Grenzen in Bezug auf die Ermittelung und Transformation einfacher Integrale zugeschrieben werden muss. Und in der That, gerade die vorhergehenden Untersuchungen dürften an einer Reihe von Beispielen diese weitgreifende Bedeutung des genannten Lehrsatzes recht anschaulich gemacht haben. Aber auch dies schon dürfte aus den obigen Entwicklungen erhellen, dass die Differentiation eines bestimmten Integrales nach einem Parameter gleichfalls für die Ermittelung einfacher Integrale nicht ohne grosse Bedeutung ist. Reicht auch der Einfluss dieser Operation nicht so weit als der des oben erwähnten Theoremes; so werden wir doch

*) Cauchy. Algebraische Analysis, Kap. 9, S. 197.

in später folgenden Erörterungen noch Gelegenheit haben, uns von der mehr als gewöhnlichen Brauchbarkeit des Leibnitz'schen Satzes in der Theorie der bestimmten Integrale hinlänglich zu überzeugen. Eines Hülfsmittels ist indess bei den vorhergehenden Betrachtungen fast gar nicht gedacht worden, obwohl auch diesem ohne Zweifel eine grosse Bedeutung hier zukommt. Wir meinen die Benutzung unendlicher Reihen zur Herleitung bestimmter Integrale und zwar in der Weise, dass wir convergirende Reihen, deren Summen im Voraus bekannt sind, in bestimmte Integrale umzusetzen versuchen.

Die hierauf bezüglichen Untersuchungen nun werden sich auf ein Lemma stützen, dessen Inhalt und Richtigkeit wir mit wenigen Worten berühren müssen. Sei nämlich in dem Integrale $\int_a^b X f(x, k)\, dx$ $X$ eine stetige Function von $x$, $f(x, k)$ eine Function von $x$ und der ganzen Zahl $k$, ferner bestehe die Gleichung

$$1. \qquad \int_a^b X f(x, k)\, dx = B_k \int_a^b X f(x, 0)\, dx,$$

in der $B_k$ eine bekannte Function von $k$ ausdrückt. Convergirt alsdann die unendliche Reihe

$$2. \quad A_0 f(x, 0) + A_1 f(x, 1) + A_2 f(x, 2) + \ldots = \varphi(x)$$

für alle Werthe von $x$ innerhalb der Grenzen $a$ und $b$; so folgt augenblicklich

$$\int_a^b X \varphi(x)\, dx = A_0 \int_a^b X f(x, 0)\, dx + A_1 \int_a^b X f(x, 1)\, dx + \text{etc.*}),$$

das giebt mit Benutzung der Gleichung 1.

$$\int_a^b X \varphi(x)\, dx = \int_a^b X f(x, 0)\, dx\, [A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots].$$

Und daher ist, so lange die in der Klammer befindliche Reihe convergirt,

$$\text{I.} \qquad A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots = \frac{\int_a^b X \varphi(x)\, dx}{\int_a^b X f(x, 0)\, dx}.$$

Diese Gleichung bleibt in Kraft selbst dann, wenn die

*) Vergl. die in §. 51 angestellten Betrachtungen.

Reihe 2. für $x = a$, oder $x = b$, oder auch für beide Werthe in eine divergirende übergeben sollte, sofern nur die Reihe I. zu den convergenten gehört und $\int_a^b X\varphi(x)\,dx$ eine völlig bestimmte, endliche Grösse bedeutet.

In der That, nehmen wir an, dass für die Grenzwerthe $a$ und $b$, die wir vorerst beide endlich voraussetzen, die Convergenz der Reihe 2. unterbrochen wird; so folgt, wenn wir 2. durch $X\,dx$ multipliciren und darauf zwischen den Grenzen $a - \varepsilon$, $b - \varepsilon$ integriren, ganz wie vorhin

$$\int_{a-\varepsilon}^{b-\varepsilon} X\varphi(x)\,dx = \int_{a-\varepsilon}^{b-\varepsilon} X f(x,0)\,dx\,[A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots].$$

Bleibt nun $A_0\,B_0 + A_1\,B_1 + \ldots$ convergent und stellt $\int_a^b X\varphi(x)\,dx$ eine endliche, bestimmte Grösse vor, so muss nothwendig

$$\lim\int_{a-\varepsilon}^{b-\varepsilon} X\varphi(x)dx = \int_a^b X\varphi(x)dx = [A_0B_0 + A_1B_1 + \ldots]\lim\int_{a-\varepsilon}^{b-\varepsilon} Xf(x,0)\,dx$$

sein.

Wird endlich eine der Grenzen, z. B. $b$, unendlich, so ist, immer Gleichung 1. als bestehend vorausgesetzt, die Bedingung unerlässlich, dass $\int_a^\infty X\varphi(x)\,dx$ nicht sinnlos wird; ausserdem aber muss natürlich $A_0\,B_0 + A_1\,B_1 + \ldots$ zu den convergenten Reihen gehören. U. s. w.

## §. 80.

### Kummer'sche Theoreme*).

Die Gleichung 1. wird offenbar erfüllt, wenn wir nach Kummer's Vorgange unter dem Integrale $\int_a^b Xf(x,k)\,dx$ die Function $\Gamma(a + k) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{a+k-1}\,dx$ verstehen; alsdann nämlich ist

*) Kummer. De integralibus definitis et seriebus infinitis. Crelle. Journal Bd. 17. S. 210 etc. Ausserdem vergleiche man: Limbourg. Théorie de la fonction Gamma. Gand 1859.

$X = e^{-x} x^{a-1}$, $f(x,k) = x^k$ und $B_k = (a+k-1)(a+k-2)\ldots a$. Besitzt folglich die Reihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

eine Summe $\varphi(x)$, so hat man nun vermöge der Gleichung I. die Beziehung

$$\text{I}^a. \quad A_0 + aA_1 + a(a+1)A_2 + a(a+1)(a+2)A_3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \varphi(x)\, dx.$$

Wird beispielsweise hier $\varphi(x) = \cos(x \operatorname{tang} u)$ gesetzt, so lässt sich bekanntlich $\cos(x \operatorname{tang} u)$ durch die unendliche Reihe

$$1 - \frac{x^2 \operatorname{tang} u^2}{1.2} + \frac{x^4 \operatorname{tang} u^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

darstellen, und folglich ist

$$A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ A_2 = -\frac{\operatorname{tang} u^2}{1.2},\ A_3 = 0,\ A_4 = \frac{\operatorname{tg} u^4}{4!} \text{ u. s. f.}$$

Da nun die Reihe

$$1 - \frac{a(a+1)}{1.2} \operatorname{tg} u^2 + \frac{a.(a+1)(a+2)(a+3)}{1.2.3.4} \operatorname{tg} u^4 - \ldots\ldots$$

stets convergirt, so lange der Zahlenwerth von $u < \frac{\pi}{4}$ bleibt und unter dieser Bedingung die Grösse $(\cos u)^a \cos au$ vorstellt*), so entspringt sogleich die Formel

$$4. \quad \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \cos(x \operatorname{tang} u)\, dx = (\cos u)^a \cos au\, \Gamma(a).$$

Wählen wir hingegen für $\varphi(x)$ den Ausdruck $\sin(x \operatorname{tg} u)$, so folgt jetzt

$$a \operatorname{tang} u - \frac{a(a+1)(a+2)}{1.2.3} \operatorname{tang} u^3 + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \sin(x \operatorname{tang} u)\, dx,$$

d. g., weil diese Reihe für $-\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{4}$ der Function $(\cos u)^a \sin au$ gleich ist*),

*) Man vergleiche hierüber Cauchy's Analysis, Seite 210 und Note 8 (in Huzler's Uebersetzung).

5. $\int\limits_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \sin (x \operatorname{tang} u)\, dx = (\cos u)^a \sin au\, \Gamma(a).$

Dass übrigens beide Integrale unmittelbar aus den Euler'schen Gleichungen

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \begin{Bmatrix} \cos \vartheta x \\ \sin \vartheta x \end{Bmatrix} dx = \frac{\Gamma(a) \begin{Bmatrix} \cos a\psi \\ \sin a\psi \end{Bmatrix}}{(k^2 + \vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$$

abgelesen werden können, bedarf keines Beweises; doch dürfte dieser Weg dem obigen vorzuziehen sein, weil er den Integralen eine grössere Ausdehnung zuschreibt.

Ein anderes interessantes Beispiel der Entdeckung eines bestimmten Integrales mittelst des Theoremes $I^a$. liefert der Fall $\varphi(x) = \cos 2\sqrt{x\vartheta}$. Führt man die Rechnung aus und wählt speciell $a = \frac{1}{2}$, so erhält man

$$1 - \frac{\vartheta}{1} + \frac{\vartheta^2}{1.2} - \frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \ldots = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty e^{-x} \frac{\cos 2\sqrt{x\vartheta}}{\sqrt{x}} dx,$$

d. h.

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} \frac{\cos 2\sqrt{x\vartheta}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}\, e^{-\vartheta}.$$

Gewöhnlich stellt man dieses von Laplace*) gefundene Integral unter einer Form dar, die man sogleich erzielt, wenn man $x$ mit $x^2$ und $\sqrt{\vartheta}$ mit $\vartheta$ vertauscht; man bekommt so die Gleichung

6. $$\int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\vartheta x\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\vartheta^2},$$

folglich

$$\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos 2\vartheta x\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-\vartheta^2}.$$

Dieses Integral werden wir später auf anderm Wege wiederfinden und daraus alsdann noch einige andere Formeln

*) Vergl. Théorie analytique des probabilités.

ableiten. Für unsern jetzigen Zweck begnügen wir uns damit, nach Kummer ein zweites, schon von Euler gekanntes Theorem aus der Gleichung I. zu entwickeln, das uns sehr interessante Resultate darbieten wird*).

Aus den frühern Erörterungen nämlich ist bekannt, dass für $b > a > 0$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}$$

und

$$\int_0^1 x^{a+k-1}(1-x)^{b-a-1}\,dx = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+k+1)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-a}$$

ist. Mithin gelten die Beziehungen:

$$X = x^{a-1}(1-x)^{b-a-1}, \quad f(x,k) = x^k,$$

$$B_k = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+k-1)},$$

und daher hat man, wenn die Summe der convergirenden Reihe $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$ wieder $\varphi(x)$ genannt wird,

$$\text{I}^b.\quad A_0 + \frac{a}{b}A_1 + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}A_2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}A_3 + \dots$$

$$= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-a-1}\varphi(x)\,dx.$$

Behufs einer ersten Anwendung dieses fruchtbaren Theoremes wollen wir $\varphi(x)$ mit dem Binome $(1-ux)^{-c}$ identificiren, wo $u^2 < 1$, $c$ aber jede beliebige Zahl bezeichnen möge. Unter dieser Voraussetzung ist bekanntlich $(1-ux)^{-c}$, weil $x$ zwischen 0 und 1 liegt, durch die convergirende Reihe

$$1 + \frac{c}{1}ux + \frac{c(c+1)}{1\,.\,2}u^2x^2 + \frac{c(c+1)(c+2)}{1\,.\,2\,.\,3}u^3x^3 + \dots$$

darstellbar, und folglich hat man die Beziehungen

$$A_0 = 1,\quad A_1 = \frac{c}{1}u,\quad A_2 = \frac{c(c+1)}{1\,.\,2}u^2,\ \dots$$

Mithin geht jetzt die Gleichung $\text{I}^b$. in die folgende über

*) Euler's Integralrechnung, Bd. 1; vergl. Binet: Mémoire sur les intégrales Eulériennes etc. in Journal de l'école polyt. cah. 27, p. 313.

$$\left\{\begin{array}{l}1+\frac{a}{b}\frac{c}{1}u+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{c(c+1)}{1.2}u^2+\ldots+\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}\frac{c(c+1)\ldots(c+n-1)}{1.2.3\ldots n}u^n\\ +\ldots=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-a-1}(1-ux)^{-c}\,dx.\end{array}\right.$$

Specialisirt man dieselbe in der Weise, dass man $c = b$ nimmt, so erhält man das für $u^2 < 1$ geltende Integral

$$7^a.\quad \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-a-1}(1-ux)^{-b}\,dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\,(1-u)^a}.$$

Und hieraus folgt wieder ohne Mühe die von Abel gegebene Formel

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,\frac{1}{(1+a)^\alpha}\,\frac{1}{a^\beta}\ {}^{*)}.$$

---

*) Oeuvres complètes, Tome I. p. 95. Die vorstehenden Integrale lassen sich übrigens als Consequenzen der hübschen und für manche Untersuchungen sehr brauchbaren Transformationsformel

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(\lambda+\mu x)^n dx = \lambda^{p+n}(\lambda+\mu)^{q+n}\int\limits_0^1 \frac{y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy}{(\lambda+\mu-\mu y)^{p+q+n}}$$

darstellen, die Schlömilch im 6. Jahrgange seiner Zeitschrift, S. 207 gegeben hat; die Grössen $p$, $q$, $\lambda$, $\mu$, $n$ sollen dabei beliebige Constanten bezeichnen. Schlömilch gelangt zu dieser Transformation des links vorkommenden Integrales, indem er $\frac{(\lambda+\mu)x}{\lambda+\mu x} = y$ setzt.

Wählt man nun $n = -(p+q)$, so hat man sogleich

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(\lambda+\mu x)^{p+q}}\,\partial x = \frac{1}{\lambda^q}\cdot\frac{1}{(\lambda+\mu)^p}\,\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Nach meinem Dafürhalten ist die vorhin genannte Transformationsformel Schlömilch's jedoch nur unter folgenden Bedingungen zulässig.

Die Constanten $p$ und $q$ müssen mit Ausnahme der Fälle, in denen das gegebene Integral eine Betafunction ($B$), oder ein Integral von der Form $\int\limits_0^1 x^{k-1}\,dx$ darstellt, in welchen also — bei positivem $n$ natürlich — die eine oder die andere der Grössen $p$ und $q$ auch gewisse negative Werthe erwerben kann, immer positiv sein. Denn da innerhalb der Grenzen 0 und 1 der Factor $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ niemals das Zeichen wech-

[illegible] ...mmende Reihe stellt be-
[illegible] hypergeometrische Reihe vor; diese aber convergirt stets, wenn $x < 1$. Für $x = 1$ dagegen gehört sie nur dann zu den convergirenden Reihen, wenn das positive $\gamma > \alpha - \beta$ [illegible] haben übrigens jede endliche Grösse [illegible]*). Setzen wir daher diesen Fall auch hier voraus, und [illegible] wir, dass nunmehr unser Integral mit [illegible] gleichbedeutend wird, so gewinnen wir die [illegible] von Gauss gefundene Formel**)

[illegible] für positive $\lambda$ und $\mu$ nach dem Maximum-Minimum-Satze, dass

$$\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}(\lambda-\mu x)^n\,dx = (\lambda-\mu\xi)^n\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx;$$

müssen, wenn das Integral nicht sinnlos werden soll, die Constanten $p$ und $q$ die angeführte Eigenschaft besitzen. — Sind ferner die beiden Grössen $\lambda$ und $\mu$ negativ, so gebe man $(\lambda-\mu x)^n$ die Gestalt $\lambda^n\left(1-\frac{\mu}{\lambda}x\right)^n$, wodurch der Fall auf den ersten zurückkommt; alsdann darf $n$ ebenfalls keine Bruchzahl mit geradem Nenner vorstellen.

Besitzt endlich das Binom $(\lambda-\mu x)^n$ die Form

$$(\lambda-\mu x)^n = \lambda^n\left(1-\frac{\mu}{\lambda}x\right)^n,\quad \mu > 0,$$

so wird für ein beliebiges $n$ und $\lambda > 0$ dem vorgelegten Integrale im Allgemeinen nur dann eine Bedeutung zukommen, wenn $\frac{\mu}{\lambda}x < 1$. In speciellen Fällen könnte freilich auch $\frac{\mu}{\lambda}x$, d. h. $\frac{\mu}{\lambda} > 1$ sein, so z. B. wenn $n$ eine positive ganze Zahl ausdrückt; wäre dagegen $n$ negativ, so müsste, weil nun für $x = \frac{\lambda}{\mu}$ die Grösse $\left(1-\frac{\mu}{\lambda}x\right)^n$ eine unendliche Discontinuität erleidet, $n$ numerisch kleiner als 1 sein, wie die Anwendung unseres Mittelwerthsatzes sogleich zeigt. Ausserdem aber darf für $\lambda < 0$ und $\mu < 0$ der Bruch $n$ keinen geraden Nenner besitzen. In allen diesen Fällen aber müssen, wenn das gegebene Integral weder an der untern, noch obern Grenze sinnlos werden soll, die Constanten $p$ und $q$ zu den positiven Grössen gehören. — Man vergl. auch §. 60.

*) Vergl. z. B. Stern's Analysis, Seite 462.

**) Gauss a. a. O. Nr. 24. Werke Bd. 3. S. 147.

8. $1+\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}+\frac{a(a+1)\,c(c+1)}{1\,.\,2\,.\,b(b+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)c(c+1)(c+2)}{1\,.\,2\,.\,3.b(b+1)(b+2)}+\cdots$

$$=\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(b-a-c)}{\Gamma(b-a)\,\Gamma(b-c)}.$$

Wir können diese Wahrheit kurz so schreiben:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)},$$

wenn wir unter dem Symbol $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ die hypergeometrische Reihe

$$1+\frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}\,x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2.\,\gamma(\gamma+1)}\,x^2+\text{etc.}$$

verstehen. Sie wird uns sogleich das Mittel bieten, auf sehr einfache Weise zwei Integrale aus dem Theoreme I$^b$. abzuleiten, die eine gewisse Aehnlichkeit mit den in §. 78. dargestellten Integralen besitzen. Zu dem Behufe aber haben wir das in I$^b$. vorkommende Integral in eine trigonometrische Form umzusetzen, was ohne Mühe mittelst der Substitution $x=\sin v^2$ geschieht. So nämlich erhalten wir augenblicklich

$$A_0+\frac{a}{b}\,A_1+\frac{a(a+1)}{b\,(b+1)}\,A_2+\ldots$$

$$=\frac{2\,\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v^{2a-1}\cos v^{2(b-a)-1}\,\varphi(\sin v^2)\,dv.$$

Nehmen wir nun für $\varphi(\sin v^2)$ die Function $\cos(2bv)$ und erinnern uns, dass

$$\cos(2\,bv)=1-\frac{b^2}{\frac{1}{2}\cdot 1}\sin v^2+\frac{b\,(b+1)\,b(b-1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2}\sin v^4$$

$$-\frac{b(b+1)\,(b+2)\,b(b-1)\,(b-2)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\sin v^6+\ldots,$$

sonach

$$A_0=1,\;A_1=-\frac{bb}{\frac{1}{2}\cdot 1},\;A_3=\frac{b(b+1)\,b(b-1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2},\;\ldots$$

ist: so ergiebt sich

$$1-\frac{a.b}{\frac{1}{2}\cdot 1}+\frac{a(a+1)\,b\,(b-1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2}-\ldots$$

$$=\frac{2\,\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v^{2a-1}\cos v^{2(b-a)-1}\cos 2bv\;dv.$$

Vermöge des oben erwähnten Gauss'schen Satzes aber hat man, wenn wir das dortige $b$ mit $\frac{1}{2}$ und $c$ mit $-b$ identificiren,

$$1-\frac{a.b}{\frac{1}{2}\cdot 1}+\frac{a(a+1).b(b-1)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2}-\frac{a(a+1)(a+2).b(b-1)(b-2)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}-a+b)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)\,\Gamma(\frac{1}{2}+b)},$$

wo also $a<\frac{1}{2}$ sein muss. Und demnach gilt nun die Beziehung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v^{2a-1}\cos v^{2(b-a)-1}\cos 2bv\,dv=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)\,.\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}-a+b)}{\Gamma(b)\,.\,\Gamma(\frac{1}{2}-a)\,.\,\Gamma(\frac{1}{2}+b)},$$

welche sich indess bedeutend vereinfachen lässt, sofern man die Fundamentaltheoreme II. und III. von den Gammafunctionen berücksichtigt. Zufolge derselben bestehen nämlich die Gleichungen:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}-a)=\frac{\pi}{\cos a\pi\;\Gamma(a+\frac{1}{2})};\;\Gamma(b)\,\Gamma(b+\tfrac{1}{2})=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{-2b+\frac{1}{2}}\,\Gamma(2b);$$

$$\Gamma(a)\,\Gamma(a+\tfrac{1}{2})=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{-2a+\frac{1}{2}}\,\Gamma(2a);$$

$$\Gamma(b-a)\,\Gamma(b-a+\tfrac{1}{2})=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{-2b+2a+\frac{1}{2}}\,\Gamma[2(b-a)],$$

und somit verwandelt sich der Ausdruck rechts in den folgenden $\frac{\Gamma(2a)\,\Gamma[2(b-a)]}{\Gamma(2b)}\cos a\pi$. Mithin hat jetzt die Relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v^{2a-1}\cos v^{2b-2a-1}\cos 2bv\,dv=\frac{\Gamma(2a)\,\Gamma[2(b-a)]}{\Gamma(2b)}\cos a\pi$$

Statt, welche wieder durch Vertauschung von $a$ mit $\frac{1}{2}\,a$ und $b$ mit $\frac{a+b}{2}$ die bequemere Form

$$9.\;\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v^{a-1}\cos v^{b-1}\cos(a+b)v\,dv=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\cos\tfrac{1}{2}a\pi,\;\left[\begin{array}{r}1>a>0\\ b>0\end{array}\right]$$

annimmt.

Um in ganz ähnlicher Weise das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{a-1} \cos v^{b-1} \sin (a+b)\, v\, dv$$

herzuleiten, hätte man in der ursprünglichen Gleichung $\varphi(\sin v^2) = \frac{\sin(2b-1)v}{(2b-1)\sin v}$ zu setzen und $\sin(2b-1)v$ durch die bekannte, nach ungeraden Potenzen von $\sin v$ fortschreitende Reihe auszudrücken*). Wird alsdann zugleich das ursprüngliche $a$ mit $a+\frac{1}{2}$ vertauscht, so ergiebt sich sofort diese Beziehung**):

$$1 - \frac{(a+\frac{1}{2})(b-1)}{1\cdot\frac{3}{2}} + \frac{(a+\frac{1}{2})(a+\frac{3}{2})(b-1)(b-2)}{1\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}$$

$$- \frac{(a+\frac{1}{2})(a+\frac{3}{2})(a+\frac{5}{2})(b-1)(b-2)(b-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}} + \ldots = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(1-a)\,\Gamma(b+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{2\,\Gamma(b)}{(2b-1)\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b-a-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{2a-1} \cos v^{(2b-2a-1)-1} \sin(2b-1)v\, dv,$$

d. h.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{2a-1} \cos v^{(2a-2b-1)-1} \sin(2b-1)\, v\, .\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{(2b-1)\,\Gamma(a+\frac{1}{2})\,\Gamma(b-a-\frac{1}{2})\,\Gamma(b-a)}{2\,\Gamma(b)\,\Gamma(1-a)\,\Gamma(b+\frac{1}{2})}.$$

Der Ausdruck rechts aber ist, weil $a < 1$ sein muss, mit $\frac{(2b-1)\,\Gamma(2a)\,\Gamma(2b-2a-1)}{\Gamma(2b)}$ identisch, und daher entspringt jetzt, wenn statt $2a$ wieder $a$ und anstatt $2b-2a-1$ einfach $b$ geschrieben wird, das Integral

---

*) $$\sin(2b-1)v = (2b-1)\sin v - \frac{2b(2b-1)(2b-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin v^3$$
$$+ \frac{(2b+2)\,2b(2b-1)(2b-2)(2b-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\sin v^5 - \text{etc.}$$

**) Man hat zunächst wegen

$$A_0 = 1,\ A_1 = -\frac{b(b-1)}{1\cdot\frac{3}{2}},\ A_2 = \frac{b\,.\,(b+1)(b-1)(b-2)}{1\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}},\ \ldots$$

$$F(a,\ -(b-1),\ \tfrac{3}{2},\ 1) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2}-a+b-1)}{\Gamma(\frac{3}{2}-a)\,\Gamma(\frac{3}{2}+b-1)}.$$

$$10. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{a-1} \cos v^{b-1} \sin (a+b) v \, dv = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \sin \frac{a\pi}{2}.$$

Der Ableitung gemäss gilt dasselbe für $b > 0$ und $2 > a > 0$, während in dem Cosinusintegrale das $a$ nicht einmal den Werth 1 erreichen durfte. Die Beschränkungen des $a$ sind jedoch nicht nothwendig, wie wir leicht zeigen können, wenn wir abwechselnd in jedem der Integrale 9. und 10. die Summe $(a+b)v$ durch $(a+b+1-1)v$ ersetzen und die goniometrischen Functionen derselben in bekannter Weise entwickeln*). Beginnen wir zu dem Behufe mit dem letzten Integrale, so ergiebt sich augenblicklich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v^{a} \cos v^{b-1} \cos (a+b+1) v \, dv$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \sin \frac{a\pi}{2} \left[\frac{b}{a+b} - 1\right] = \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} \cos \frac{(a+1)\pi}{2},$$

woraus erhellt, dass Gleichung 9. für $a < 2$ ebenfalls noch Geltung besitzt. Wird folglich jetzt mit dem so erweiterten Integrale dieselbe Umformung vorgenommen, so zeigt sich, dass nun Gleichung 10. auch noch für $a < 3$ besteht. Wie aber in dieser Art der Process nach Belieben fortgesetzt werden kann, leuchtet unmittelbar ein.

Gerade dieses einfachen Beweises wegen haben wir das Integral 10. auf dem obigen Wege ermittelt; wäre es bloss unsere Absicht gewesen, das genannte Integral herzuleiten, so hätten wir dies Ziel bei weitem schneller in folgender Weise erreicht. Schreibt man nämlich $\frac{\pi}{2} - v$ anstatt $v$ und verwechselt gleichzeitig $a$ mit $b$, so kommt zuvörderst

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v^{b-1} \sin v^{a-1} \cos \left[\left(a+b\right)\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right] dv$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \cos \frac{b\pi}{2}, \quad \begin{cases} 1 > b > 0 \\ a > 0 \end{cases}.$$

---

*) Théorie de la fonc. Gamma.

Nun ist aber .

$$\cos\left[\frac{a+b}{2}\pi - \overline{a+b}\,.\,v\right] = \cos\frac{a+b}{2}\pi\cos(a+b)v$$

$$+\sin\frac{a+b}{2}\pi\sin(a+b)v,$$

folglich hat man mit Berücksichtigung der Gleichung 9.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v^{a-1}\cos v^{b-1}\sin(a+b)v\,dv$$

$$=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,\frac{\cos\frac{a\pi}{2}\cos\frac{a+b}{2}\pi - \cos\frac{b\pi}{2}}{-\sin\frac{a+b}{2}\pi},$$

und dies giebt wegen

$$\frac{\cos\frac{a\pi}{2}\cos\frac{a+b}{2}\pi - \cos\frac{b\pi}{2}}{-\sin\frac{a+b}{2}\pi} = \sin\frac{a\pi}{2}$$

das Integral 10.

Dieselbe Art der Behandlung könnten wir jetzt bei den früher gefundenen Integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos v^{\beta}\cos\gamma v\,dv = \frac{\pi}{2^{\beta+1}}\,\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\gamma+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-\gamma+2}{2}\right)},$$

$$\int_0^{\pi}(\sin v)^{\beta}\begin{Bmatrix}\cos\gamma v\\ \sin\gamma v\end{Bmatrix}.dv = \frac{\Gamma(\beta+1)\,.\,\pi}{2^{\beta}\,\Gamma\left(\frac{\beta+\gamma+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-\gamma+2}{2}\right)}\begin{Bmatrix}\cos\frac{\gamma\pi}{2}\\ \sin\frac{\gamma\pi}{2}\end{Bmatrix}$$

in Anwendung bringen; wir begnügen uns jedoch damit, zum Schlusse dieser Betrachtungen aus dem Integrale

$$\int_0^1\frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{\lg u}\,du = \lg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{*)},$$

*) Setzt man den vorläufig unbekannten Werth dieses Integrales $= z$, so folgt sogleich durch Differentiation nach $\alpha$

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha} = \int_0^1 u^{\alpha-1}\,du.$$

wo $\alpha$ und $\beta$ positiv sind, das zusammengesetztere, freilich schon auf anderm Wege entwickelte Integral

$$11. \quad \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{(1+u)\lg u}\,du = \lg \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}$$

zu folgern.

In der That, multipliciren wir zunächst die Reihe

$$\varphi(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots$$

mit $\frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{\lg u}\,du$, und integriren wir alsdann von $u=0$ bis $u=1$, so ergiebt sich sofort die Gleichung

$$\text{II.} \quad A_0 \lg\frac{\alpha}{\beta} + A_1 \lg\frac{\alpha+1}{\beta+1} + \dots = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{\lg u}\,\varphi(u)\,du.$$

Diese aber liefert für $\varphi(u) = \frac{1+u^{2n+1}}{1+u}$ die andere Beziehung

$$\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{(1+u)\lg u}(1+u^{2n})\,du = \lg\frac{\alpha}{\beta} - \lg\frac{\alpha+1}{\beta+1} + \lg\frac{\alpha+2}{\beta+2} - \dots + \lg\frac{\alpha+2n}{\beta+2n}$$

$$= \lg \frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)\dots(\alpha+2n)}{\beta(\beta+2)(\beta+4)\dots(\beta+2n)} \cdot \frac{(\beta+1)(\beta+3)\dots(\beta+2n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2n-1)},$$

der man leicht eine kurze Form geben kann, wenn man nach Gauss das Product $\frac{1.2.3\dots n}{(b+1)(b+2)\dots(b+n)}\,n^b$ durch das Symbol $\Pi(n, b)$ bezeichnet. So nämlich erhält man

$$12. \quad \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{\lg u}\,\frac{1+u^{2n}}{1+u}\,du$$

$$= \lg \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \frac{\Pi\left(n+1, \frac{\beta}{2}-1\right)\Pi\left(n, \frac{\alpha-1}{2}\right)}{\Pi\left(n+1, \frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(n, \frac{\beta-1}{2}\right)}\right].$$

---

Mithin ist

$$z = \lg\alpha + \text{const.},$$

und dies giebt, weil für $\alpha=\beta$ $z=0$ wird,

$$\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{\lg u}\,du = \lg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Bedenken wir nun, dass für ein unendlich werdendes $n$ das Product $\Pi(n, b)$ mit der Function $\Pi(b) = \Gamma(b+1)$ gleichbedeutend ist, so bekommen wir augenscheinlich den oben erwähnten Ausdruck 11. für $n = \infty$.

Setzt man in demselben $\alpha$ und $\beta$ als echte Brüche voraus und nimmt $\beta = 1 - \alpha$, so entspringt

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{-\alpha}}{(1+x)\lg x}\,dx = \lg \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = \lg \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}.$$

## IV. Kapitel.

## Die Fourier'schen Reihen und Integrale*).

### §. 81.

### Die Sinusreihe.

Die Ableitung des Integrales 11. aus dem Integrale 12. der vorigen Nummer geschah mittelst des Ueberganges vom Endlichen zum Unendlichen. Diese Methode, so vorzüglich sie auch zur Entdeckung neuer Wahrheiten sich eignet, kann gleichwohl nur dann als ein strenges Beweisverfahren gelten, wenn die Deduction in sich selbst die Mittel zur Widerlegung etwaiger Zweifel besitzt. Nicht immer ist dies der Fall. Wenn z. B. eine von 0 bis $\pi$ beliebig gegebene, stetige Function $f(x)$ einer endlichen Reihe von der Form

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots + a_{n-1} \sin (n-1)x$$

gleichgesetzt wird, so kann man wirklich nach Lagrange**) ·

*) Von Dirichlet'schen Abhandlungen sind hier besonders zu nennen:
1) Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. Crelle. Journal Bd. 4, S. 157—169.
2) Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen. Repertorium der Physik von Dove und Moser Bd. 1.

**) Miscellanea Taurinensia, tomus I. Recherches sur la nature et la propagation du son.
Misc. Taur. Tom. III. Des vibrations d'une corde tendue et chargée d'un nombre quelconque de poids; p. 247. Vergl. Riemann's Vorles. über part. Difftialgl. S. 45.

die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ so bestimmen, dass für die $n-1$ auf einander folgenden Werthe $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots \frac{(n-1)\pi}{n}$ von $x$ die Gleichheit der Function $f(x)$ mit jener Reihe Statt findet. Um nämlich irgend einen Coefficienten $a_m$ zu berechnen, wo $m = 1, 2, \ldots n-1$ ist, braucht man nur die durch Substitution von $x = \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots$ entstehenden $n-1$ linearen Gleichungen der Reihe nach mit

$$2 \sin m \frac{\pi}{n},\ 2 \sin m \frac{2\pi}{n},\ 2 \sin m \frac{3\pi}{n}, \ldots 2 \sin m \frac{(n-1)\pi}{n}$$

zu multipliciren, die Resultate zu vereinigen und die Sinusproducte in Cosinusdifferenzen umzusetzen. In der That ergiebt sich dann mit Berücksichtigung der bekannten Beziehung

$$\sum_{s=1}^{s=n-1} \cos s\vartheta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin (2n-1)\frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \text{*)}$$

*) Man beweist diese Formel leicht wie folgt:
Sei

$$z = \cos \vartheta + \cos 2\vartheta + \cos 3\vartheta + \ldots + \cos n\vartheta,$$

so ergiebt sich durch Multiplication mit $2 \sin \frac{\vartheta}{2}$ und nacherige Zerlegung der entstehenden Producte in Sinusdifferenzen

$$2z \sin \frac{\vartheta}{2} = \sin \frac{3\vartheta}{2} + \sin \frac{5\vartheta}{2} + \ldots + \sin \frac{(2n+1)\vartheta}{2}$$
$$- \sin \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{3\vartheta}{2} - \sin \frac{5\vartheta}{2} - \ldots - \sin \frac{(2n-1)\vartheta}{2},$$

d. h.
$$z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin (2n+1)\frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}}.$$

Ganz in ähnlicher Weise überzeugt man sich von den später zu benutzenden Gleichungen

$$\sum_1^n \sin s\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos (2n+1)\frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}},$$

$$\sum_0^{2n} (-1)^s \sin (2s+1)\vartheta = \frac{\sin 2(2n+1)\vartheta}{2 \cos \vartheta},$$

$$\sum_1^n (-1)^{s-1} \sin s\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} \pm \frac{\sin \frac{(2n+1)\vartheta}{2}}{2 \cos \frac{\vartheta}{2}}, \text{ je nachdem } \sin n\vartheta = \pm -$$

nach einigen leichten Betrachtungen die Gleichung

$$a_m = \frac{2}{n} \sum_{s=1}^{s=n-1} \sin s \frac{m\pi}{n} f\left(\frac{s\pi}{n}\right) *)$$

---

*) Ist in der Gleichung für $\sum_1^{n-1} \cos s\vartheta \left(\vartheta = \frac{h\pi}{n}\right.$, wo $h$ eine ganze Zahl ausdrückt$\left.\right)$, also in

$$\sum_1^{n-1} \cos \frac{sh\pi}{n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin (2n-1)\frac{h\pi}{2n}}{\sin \frac{h\pi}{2n}} = z$$

$h \equiv 0 \pmod{2n}$, so wird $z = n - 1$, weil $h$ eine gerade Zahl jetzt bezeichnet, also die Cosinus sämmtlich $= 1$ werden.

Geht aber $h$ nicht durch $2n$ auf, so hat man

$$\frac{\sin (2n-1)\frac{h\pi}{2n}}{\sin \frac{h\pi}{2n}} = \frac{\sin \left(h\pi - \frac{h\pi}{2n}\right)}{\sin \frac{h\pi}{2n}} = -(-1)^h \frac{\sin \frac{h\pi}{2n}}{\sin \frac{h\pi}{2n}} = (-1)^{h+1}.$$

Dieser Ausdruck wird folglich $\pm 1$, je nachdem $h$ ungerade, oder gerade ist. Den beiden Fällen entsprechend wird daher

$$\sum_1^{n-1} \cos s \frac{h\pi}{n} = 0, \ -1.$$

Wählt man nun irgend einen von $a_m$ verschiedenen Coefficienten $a_r$, so erhält man durch Befolgung der oben erwähnten Rechnung auf der einen Seite des Gleichheitszeichens den Ausdruck

$$a_r \sum_{s=1}^{s=n-1} 2 \sin m \frac{s\pi}{n} \sin r \frac{s\pi}{n} = a_r \sum_1^{n-1} \left[\cos \frac{s(m-r)\pi}{n} - \cos \frac{s(m+r)\pi}{n}\right]$$

$$= a_r \left[\sum_1^{n-1} \cos \frac{s(m-r)\pi}{n} - \sum_1^{n-1} \cos \frac{s(m+r)\pi}{n}\right].$$

Die beiden Zahlen $(m-r)$ und $(m+r)$ aber sind gleichartig, weil ihre Summe eine gerade Zahl vorstellt; ferner können $m - r$ und $m + r$ nicht durch $n$ aufgehen, wenn $m$ und $r$ verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots n-1$ bedeuten; mithin ist der vorstehende Ausdruck mit Null gleichgeltend.

Fällt dagegen $r$ mit $m$ zusammen, so ist $m - r \equiv 0 \pmod{2n}$ und

$$\sum_1^{n-1} \cos s(m-r)\frac{\pi}{n} = n - 1, \quad \sum_1^{n-1} \cos s \frac{2m\pi}{n} = -1.$$

Giebt man nun derselben die Gestalt

$$a_m = \frac{2}{\pi} \sum_0^{n-1} \frac{\pi}{n} \sin s \frac{m\pi}{n} f\left(\frac{s\pi}{n}\right)$$

und lässt hierauf die ganze Zahl $n$ unendlich gross werden, so geht die endliche Summe in das bestimmte Integral

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mx\, f(x)\, dx$$

über. Mithin entspringt der Satz, dass für das Intervall von 0 bis $\pi$ eine ganz willkürlich gegebene Function $f(x)$ durch eine unendliche Reihe von der Form

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$$

dargestellt werden kann, wenn jeder Coefficient in ihr der Gleichung

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx\, dx$$

gemäss bestimmt wird.

Dieses schöne Resultat würde offenbar frei von jedem Zweifel sein, wenn aus der Herleitung desselben auch die Convergenz der Sinusreihe und $f(x)$ als ihre Summe sich erkennen liessen, was beides jedoch keineswegs der Fall ist. Solange daher diese Gewissheit nicht dargethan wird, solange kann der obige Satz höchstens als glückliche Induction bezeichnet werden. In diesem Sinne nun wollen wir uns auch vorläufig des Theoremes bedienen, um eine Reihe zu bilden, deren Convergenz wir nachweisen und als deren Summe wir $f(x)$ finden werden, woraus dann zugleich die Zulässigkeit des vorhin befolgten Gedankenganges geschlossen werden darf.

## §. 82.

### Bildung der Sinus-Cosinusreihe

$$\frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots$$

Nehmen wir statt der Function $f(x)$ jetzt diese $2 \sin x . f(x)$, so ist jeder Coefficient $a_m$ durch die Gleichung

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2 \sin x\, f(x) \sin m\, x\, d\, x$$

definirt. Aber

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2 \sin x \sin m\, x\; f(x)\, d\, x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\,(m-1)\, x\, f(x)\, d\, x - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\,(m+1) x\, f(x)\, d\, x,$$

und folglich wird, wenn wir der Kürze halber

$$b_h = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\, h\, x\, f(x)\, d\, x$$

schreiben, wo selbstverständlich $h$ eine ganze Zahl ausdrückt,

$$2 \sin x\, f(x) = b_0 \sin x + b_1 \sin 2x + b_2 (\sin 3x - \sin x) + \ldots$$
$$+ b_h\, [\sin\,(h+1)\, x - \sin\,(h-1)\, x] + \ldots,$$

d. g. mit Beachtung der Formel

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\, b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2\, x + \ldots + b_h \cos h\, x + \ldots$$

Diese Repräsentation einer beliebigen Function $f(x)$ durch eine Cosinusreihe innerhalb des Intervalles von 0 bis $\pi$ unterscheidet sich übrigens von der Darstellung der Function durch die Sinusreihe darin, dass sie bei dieser im Allgemeinen für die extremen Werthe 0 und $\pi$ von $x$ ihre Geltung verliert, während sie bei jener fortbesteht.

Setzt man die Function $f(x)$ von 0 bis $-\pi$ so fort, dass entweder $f(-x) = f(x)$, oder $f(-x) = -f(x)$ ist, so lässt sich offenbar für den ersten Fall $f(x)$ von $-\pi$ bis $+\pi$ durch die Cosinusreihe, für den zweiten hingegen durch die Sinusreihe darstellen. Da nun aber irgend eine Function $f(x)$ stets als Summe einer geraden und ungeraden Function aufgefasst, also immer in die Form

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

gebracht werden kann; so ist sogleich klar, dass $f(x)$ von $-\pi$ bis $+\pi$ stets durch die allgemeinere Reihe

$$\frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_m \cos mx + \ldots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_m \sin mx + \ldots$$

darstellbar sein wird, wenn dieselbe wirklich zu den convergirenden Reihen gehören und $f(x)$ eben ihre Summe ausdrücken sollte. Dies ist in der That der Fall, wie wir sogleich nach der Erläuterung des Vorstehenden durch einige Beispiele zu zeigen versuchen wollen. Dabei werden wir folgenden Gedankengang innehalten: wir betrachten zunächst die Reihe als eine endliche, als aus $2n + 1$ Gliedern bestehend, drücken ihre Summe $S$ durch ein bestimmtes Integral aus und lassen nun die Anzahl der Glieder, also $n$ ins Unendliche wachsen.

Zum Schlusse dieser Betrachtungen wollen wir endlich noch bemerken, dass die Coefficienten

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x) + f(-x)}{2} \cos mx\, dx$$

und

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x) - f(-x)}{2} \sin mx\, dx$$

leicht in der elegantern Gestalt

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx\, dx, \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx$$

erscheinen, wenn man die Integrationen auf die einzelnen Summanden ausdehnt, das Argument $-x$ in $f(-x)$ durch $+x$ ersetzt und schliesslich die Grenzen des entsprechenden Integrales mit einander vertauscht.

## §. 83.

### Darstellung einiger besondern Functionen $f(x)$ durch trigonometrische Reihen.

1. Sei $f(x) = \text{const.} = 1$; alsdann folgt bei einer Darstellung von 1 durch die Sinusreihe wegen

$$\int_0^{\pi} \sin mx\, dx = \frac{1 - \cos m\pi}{m} = \begin{matrix} 0,\ m \equiv 0 \ (\text{mod. } 2) \\ \frac{2}{m},\ m \equiv 1 \ (\text{mod. } 2) \end{matrix} :$$

$$1=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right],$$

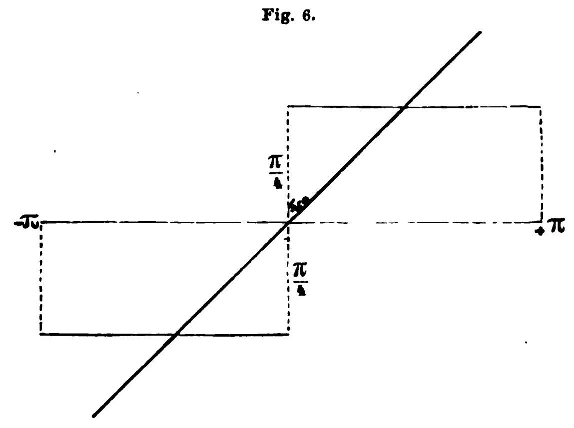
d. g.

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots,\ \pi > x > 0.$$

Geometrisch genommen wird also hierdurch eine in dem Abstande $\frac{\pi}{4}$ von der Abscissenachse mit ihr parallele Gerade von 0 bis $\pi$ repräsentirt. (Fig. 6.) Setzt man noch $x=\frac{\pi}{2}$, so bekommt man die Leibnitz'sche Reihe

$$\frac{\pi}{4}=1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\ldots$$

Fig. 6.




2. Stellt $f(x)$ jetzt wirklich eine Function von $x$ vor, also z. B. $f(x)=x$, so wird in Folge der Beziehung

$$\int_0^\pi x\sin mx\,dx=\left[-\frac{x\cos mx}{m}+\frac{\sin mx}{m^2}\right]_0^\pi=\frac{(-1)^{m+1}\pi}{m}$$

die $x$ repräsentirende Sinusreihe so aussehen:

$$x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right],$$

und diese Reihe gilt, wie auf den ersten Blick erhellt, für alle Werthe von $x$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$, d. h. solange $x$ numerisch $< \pi$ ist. Räumlich aufgefasst stellt bekanntlich $f(x)=x$ eine durch den Mittelpunkt des Cordinatensystemes gehende, unter einem Winkel von 45° gegen die positive Seite der Abscissenachse geneigte Gerade vor.

man sieht noch, dass für $x =$ ... $\frac{\pi}{2}$
um Vorschein kommt.

3. Wird $f(x) = x$ durch eine Cosinusreihe **dargestellt,** so hat man wegen

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos hx\,dx = \left[\frac{x\sin hx}{h}+\frac{1}{h^2}\cos hx\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{h^2}(-1)^{h+1}+\frac{1}{h^2}\right] = \begin{cases}0\\ -\frac{4}{\pi h^2}\end{cases},$$

je nachdem $h$ gerade oder ungerade ist; $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi = b_0$:

$$x = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right],\quad \pi \gtreqless x \gtreqless 0.$$

Für $x = 0, = \pi$ folgt hieraus

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots$$

4. Sei jetzt $f(x) = x\sin x$; in diesem Falle ergiebt sich ...
wegen

$$\int x\sin x\cos hx\,dx = \frac{1}{2}\int x\sin(h+1)x\,dx - \frac{1}{2}\int x\sin(h-1)x\,dx \dots$$

$$\int x\sin(h\pm 1)x\,dx = \frac{-x\cos(h\pm 1)x}{h\pm 1}+\frac{\sin(h\pm 1)x}{(h\pm 1)^2} + \text{const.},\ \text{als} \dots$$

$$\int_0^\pi x\sin x\cos hx\,dx = -\frac{\pi}{2}(-1)^{h-1}\left[\frac{1}{h+1}-\frac{1}{h-1}\right] = \frac{\pi}{2}(-1)^{h+1}\frac{2}{h^2 \dots 1}$$

und

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}:$$

$$\frac{x}{2}\sin x = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4} - \frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 3x}{2.4} - \frac{\cos 4x}{3.5} + \dots,\ \pi \gtreqless x \gtreqless 0.$$

Doch gilt diese Formel auch für negative $x$, weil $\frac{x\sin x}{2}$ eine gerade Function ausdrückt. Nimmt man speciell $x = \frac{\pi}{2}$, so hat man

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\dots$$

5. Nunmehr sei $f(x) = \cos\alpha x$, wo $\alpha$ eine positive oder negative Bruchzahl bezeichnet.

Da hier

$$\int_0^\pi 2\cos\alpha x\cos h x\,dx = \int_0^\pi [\cos(\alpha+h)x + \cos(\alpha-h)x]\,dx$$

$$= \frac{\sin(\alpha+h)\pi}{\alpha+h} + \frac{\sin(\alpha-h)\pi}{\alpha-h} = \sin\alpha\pi\,(-1)^h\left[\frac{1}{\alpha+h} - \frac{1}{\alpha-h}\right]$$

ist, so wird

$$\cos\alpha x = \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos x}{\alpha^2-1} + \frac{\cos 2x}{\alpha^2-2^2} - \frac{\cos 3x}{\alpha^2-3^2} + \ldots\right]$$

oder

$$\frac{\pi\cos\alpha x}{2\alpha\sin\alpha\pi} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos x}{\alpha^2-1^2} + \frac{\cos 2x}{\alpha^2-2^2} - \ldots,\ \pi \geqq x \geqq 0 \text{ numerisch.}$$

Einen besondern Fall dieser Reihe stellt die Euler'sche Formel*)

$$\frac{\pi}{2\alpha}\cot\!g\,\alpha\pi = \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2-1^2} + \frac{1}{\alpha^2-2^2} + \ldots,\ (x = \pi) \text{ vor;}$$

ähnliche einfache Reihen ergeben sich für $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Nicht ohne Interesse ist hier noch folgende Bemerkung. Schreibt man die letztere Gleichung in dieser Gestalt

$$\pi\cot\!g\,\alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2},$$

so folgt durch Integration nach $\alpha$ zwischen den Grenzen $t$ und $\alpha$ ($t, \alpha > 0$):

$$\int_t^\alpha \pi\cot\!g\,\alpha\pi\,d\alpha = \int_t^\alpha\frac{d\alpha}{\alpha} + \sum_1^\infty\int_t^\alpha\frac{2\alpha\,d\alpha}{\alpha^2-n^2},$$

d. h.

$$\lg\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha}\cdot\frac{t}{\sin t\pi}\right) = \sum_1^\infty \lg\frac{\alpha^2-n^2}{t^2-n^2}.$$

Mithin wird

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha}\,\frac{t}{\sin t\pi} = \prod_1^\infty\frac{n^2-\alpha^2}{n^2-t^2}$$

und folglich für $\lim t = 0$:

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha} = \prod_1^\infty\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(-\alpha)\pi}{(-\alpha)\pi}\text{**)}.$$

---

*) Introductio in analysin infinitorum, cap. X. §. 181.

**) Vergl. Moigno Leçons de calcul diff. et de cal. int. Tome II., page 326 und Riemann's partielle Differentialgleichungen S. 82.

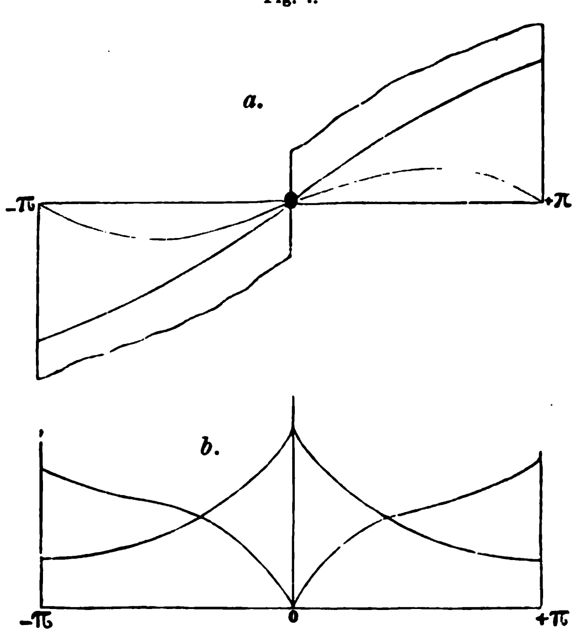
6. Wählt man endlich $f(x) = e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}$ und beach die Beziehungen:

$$\int^{x} e^{\alpha x} \cos hx\, dx = \frac{h \sin hx + \alpha \cos hx}{h^2 + \alpha^2} e^{\alpha x},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\alpha x} \cos hx\, dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{h^2+\alpha^2}\left[\alpha(-1)^h e^{\alpha\pi} - \alpha\right],$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\alpha x} \cos hx\, dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{h^2+\alpha^2}\left[(-\alpha)(-1)^h e^{-\alpha\pi} + \alpha\right]$$

Fig. 7.




folglich

$$b_h = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) \cos hx\, dx = \frac{2\alpha(-1)^h}{\pi(h^2+\alpha^2)}\left[e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right]$$

so entspringt

$$\frac{\pi}{2\alpha}\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\cos x}{\alpha^2+1} + \frac{\cos 2x}{\alpha^2+2^2} - \cdots,$$

eine Formel, die von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$ gilt.

Von Darstellungen beliebiger Functionen durch die Sinus-Cosinusreihe werden wir später ein Beispiel geben. Erwähnt aber möge hier noch werden, dass bei einer Repräsentation von $f(x)$ innerhalb des Intervalles $(-\pi, +\pi)$ durch die Sinus- oder Cosinusreihe die entsprechenden Bilder beziehlich durch die nebenstehenden Figuren $a$ und $b$ dargestellt werden können.

## §. 84.

**Darstellung der Sinus-Cosinusreihe $\frac{1}{2} b_0 + \sum_1^n (b_s \cos sx + a_s \sin sx)$ durch das bestimmte Integral $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\vartheta\, f(\vartheta)\, \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\vartheta - x}{2}\right]}{\sin\frac{\vartheta - x}{2}}$.**

Die Reihe $S = \frac{1}{2} b_0 + \sum_1^n [b_s \cos s x + a_s \sin s x]$ lässt sich ersichtlich in der Form

$$S = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \cos\vartheta\cos x + \cos 2\vartheta\cos 2x + \ldots + \cos n\vartheta\cos nx \\ + \sin\vartheta\sin x + \sin 2\vartheta\sin 2x + \ldots + \sin n\vartheta\sin nx \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta \left[\tfrac{1}{2} + \cos(\vartheta - x) + \cos 2(\vartheta - x) + \ldots + \cos n(\vartheta - x)\right]$$

schreiben, wenn wir, um Irrthümern vorzubeugen, den Integrationsbuchstaben $\vartheta$ nennen. Beachtet man nun, dass

$\sum_1^n \cos s(\vartheta - x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta - x}{2}}{\sin\frac{\vartheta - x}{2}}$ ist, so hat man augenblicklich die Relation

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta\, \frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta - x}{2}}{\sin\frac{\vartheta - x}{2}}.$$

Lässt sich folglich jetzt nachweisen, dass mit unendlich werdendem $n$ diesem Integrale eine Bedeutung zukommt, so ist die Convergenz der unendlichen Reihe

$$\tfrac{1}{2} b_0 + \sum_1^\infty (b_s \cos s x + a_s \sin s x)$$

ausser allen Zweifel gesetzt, und zugleich ist ihre Summe durch den Grenzwerth des Integrales gegeben. Die ganze Schwierigkeit der Untersuchung ist demnach auf die Discussion eines Integrales zurückgeführt, in welchem ein darin enthaltener Parameter über jede Grenze hinaus wächst.

Nennen wir nun der Kürze halber die ungerade Zahl $2n+1$ $h$, und setzen wir $\frac{\vartheta-x}{2}=\vartheta'$, so geht das obige Integral über in

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\vartheta)\,\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta,$$

und dieses kann wiederum in die beiden Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} d\vartheta\, f(x+2\vartheta)\,\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \text{ und } \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2\vartheta)\,\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

zerlegt werden. Erwägt man aber ausserdem noch, dass der Voraussetzung zufolge $x$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ sich befindet, so werden die Grenzen der Integrale niemals den Werth $\frac{\pi}{2}$ überschreiten können, und daher wird nunmehr die Lösung unserer Aufgabe augenscheinlich von der Beantwortung der Frage abhängig gemacht, was aus einem Integrale von der Form $\int_0^c \varphi(\vartheta)\,\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta$, in welchem die Constante $c$ zwischen 0 und $\pi$ liegt, wird, wenn der Parameter $h$ ohne Aufhören wächst.

## §. 85.

**Zerlegung des Integrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta$ in Theilintegrale; Eigenschaften derselben.**

In ihrer völligen Allgemeinheit würde die Behandlung des so eben erwähnten Problemes mit grossen Schwierigkeiten verknüpft sein. Diese aber vermindern sich nicht wenig

wenn man schrittweis zu Werke geht. Desswegen untersuchen wir zuvörderst das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta$, in welchem $h$ die angegebene Bedeutung besitzt.

Da nun $\frac{1}{2}\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}$ mit $\frac{1}{2} + \cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta + \ldots + \cos 2n\vartheta$ identisch ist, so folgt durch Integration zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ sofort, dass

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}.\text{*)}$$

Dieses Integral wollen wir in $n+1$ andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{h}$, $\frac{\pi}{h}$ und $\frac{2\pi}{h}$, $\frac{2\pi}{h}$ und $\frac{3\pi}{h}$, ..., $\frac{n\pi}{h}$ und $\frac{\pi}{2}$ zerlegen. Alsdann wird für das erste Intervall $\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}$ positiv, für das zweite dagegen negativ sein, und dieses Verhältniss im Zeichenwechsel von $\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}$ wird sich ersichtlich wiederholen bis zu dem Intervalle von $\frac{n\pi}{h}$ bis $\frac{\pi}{2}$, in welchem $\frac{\sin h\pi}{\sin\vartheta}$ das Zeichen plus oder minus führt, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist. Einem bekannten Satze zufolge aber kommt die gleiche Eigenschaft den entsprechenden Integralen zu, und demnach wird das Integral vom Range $\nu$, nämlich

---

*) Bringt man $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta$ in die Form $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}\cdot h} \frac{\sin\vartheta}{h\sin\left(\frac{\vartheta}{h}\right)}\, d\vartheta$ und lässt hierauf $n$ ohne Aufhören wachsen, so erkennt man auf den ersten Blick, dass auch noch für $h = \infty$ die obige Gleichung besteht, weil

$$\lim \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}h} \frac{\sin\vartheta}{h\sin\frac{\vartheta}{h}}\, d\vartheta = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

ist.

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{h}}^{\frac{\nu\pi}{h}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta,$$

dessen absoluten Werth wir $\varrho_\nu$ nennen wollen, $= \pm\, \varrho_\nu$ sein, je nachdem $\nu$ zu den ungeraden oder geraden Zahlen gehört.

In zwei auf einander folgenden Intervallen $\left[(\nu-1)\frac{\pi}{h}, \frac{\nu\pi}{h}\right]$ und $\left[\frac{\nu\pi}{h}, \frac{\nu+1}{h}\pi\right]$ erwirbt ferner die Function $\sin h\vartheta$ numerisch stets dieselben Werthe, die Function $\sin\vartheta$ dagegen wird in dem folgenden Intervalle grösser, als in dem vorhergehenden. Daraus fliesst, dass $\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}$ zwischen den Grenzen $(\nu-1)\frac{\pi}{h}$ und $\frac{\nu\pi}{h}$ absolut genommen einen grössern Werth besitzt, als in dem Intervalle von $\frac{\nu\pi}{h}$ bis $\frac{(\nu+1)\pi}{h}$, ja selbst für die beiden letzten Integrale

$$\int_{(n-1)\frac{\pi}{h}}^{\frac{n\pi}{h}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta \text{ und } \int_{\frac{n\pi}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta$$

leidet dies keine Ausnahme. Die $\varrho$ müssen daher eine fallende Reihe bilden.

In mehr analytischer Weise wird man das Gesagte durch folgendes Verfahren bestätigen. Das Integral

$$\pm \int_{(\nu-1)\frac{\pi}{h}}^{\frac{\nu\pi}{h}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta$$

liegt zwischen dem grössten und kleinsten Werthe von $\frac{1}{\sin\vartheta}$ innerhalb des Intervalls $\left(\frac{(\nu-1)\pi}{h}, \frac{\nu\pi}{h}\right)$, diese multiplicirt mit dem Integrale $\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{h}}^{\frac{\nu\pi}{h}} (\pm \sin h\vartheta)\, d\vartheta = \frac{2}{h}$. In Zeichen aber heisst dies

$$\varrho_\nu < \frac{1}{\sin(\nu-1)\frac{\pi}{h}} \cdot \frac{2}{h} \text{ und } \varrho_\nu > \frac{1}{\sin\frac{\nu\pi}{h}} \cdot \frac{2}{h},$$

und wenn $\frac{n\pi}{h}$ und $\frac{\pi}{2}$ die Grenzen des Integrales bezeichnen, so ist

$$\varrho_{n+1} > \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} \text{ und } \varrho_{n+1} < \frac{1}{h} \frac{1}{\sin\frac{n\pi}{h}}.$$

Mithin hat man das nebenstehende System von Ungleich heiten:

$$\varrho_1 > \frac{2}{h} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{h}}, \varrho_2 > \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{h}}, \ldots \varrho_{n+1} > \frac{1}{h}$$

und

$$\varrho_2 < \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{h}}, \varrho_3 < \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{h}}, \ldots \varrho_{n+1} < \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sin\frac{n\pi}{h}},$$

aus dem

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \ldots > \varrho_{n+1}$$

folgt.

Da nun

$$\frac{\pi}{2} = \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \ldots \pm \varrho_{n+1}$$

ist, wo in dem letzten Gliede das Zeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem $n$ eine gerade oder ungerade Zahl ausdrückt; so muss für $2m < n$

$$\frac{\pi}{2} > \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \ldots - \varrho_{2m} \text{ und } \frac{\pi}{2} < \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \ldots - \varrho_{2m} + \varrho_{2m+1}$$

sein. Denn im ersten Falle sind die Differenzen $\varrho_{2m+1} - \varrho_{2m+2}, \ldots$ positiv, im zweiten dagegen führen die Ausdrücke

$$-\varrho_{2m+2} + \varrho_{2m+3}, -\varrho_{2m+4} + \varrho_{2m+5}, \ldots$$

das Zeichen minus.

## §. 86.

**Grenzwerth des Integrales $T = \int_0^c \varphi(\vartheta) \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta$ für $n = \infty$, wenn $0 < c \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$ und $\varphi(\vartheta)$ stetig ist.**

### 1. Fall. Die Function $\varphi(\vartheta)$ nimmt nie zu und bleibt stets positiv.

Wir betrachten jetzt das Integral

$$T = \int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

und setzen darin vorerst $0 < c \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$ und $\varphi(\vartheta)$ als stetige Function von $\vartheta$ voraus. Ausserdem aber fügen wir noch die Beschränkung hinzu, dass die Function $\varphi(\vartheta)$, während $\vartheta$ von 0 bis $c$ wächst, immer positiv bleibt und nie zunimmt, wohl aber stellenweis oder für das ganze Intervall denselben Werth behalten darf.

Auch hier denken wir uns zwischen 0 und $c$ Vielfache von $\frac{\pi}{h}$ und zwar $s$ derselben eingeschoben, nämlich $\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}, \ldots \frac{s\pi}{h}$, wobei wir $\frac{s\pi}{h}$ noch kleiner, als $c$, $\frac{(s+1)\pi}{h}$ aber gleich oder schon grösser, als $c$ annehmen. Dies hat offenbar zur Folge, dass $s + 1 \overline{\overline{>}} \frac{hc}{\pi} > s$, also $s$ die grösste in $\frac{hc}{\pi}$ enthaltene ganze Zahl ausdrückt und somit höchstens $= n$ sein kann. Zerlegen wir nun das Integral $T$ in $s + 1$ andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{h}$, $\frac{\pi}{h}$ und $\frac{2\pi}{h}, \ldots \frac{s\pi}{h}$ und $c$, so ersehen wir sofort, dass auch hier die einzelnen Theilintegrale abwechselnd positiv und negativ sind, indem über das Zeichen derselben nur der Factor $\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}$ entscheidet. Und ebenso leicht kann man sich überzeugen, weil $\varphi(\vartheta)$ nie zunimmt, dass jedes folgende Theilintegral numerisch kleiner ist, als das vorhergehende. Wünscht man einen förmlichen Beweis, so sei wieder der Kürze wegen der absolute Werth des Integrals vom Range $\nu$ durch ein einfaches Zeichen, $R_\nu$, dargestellt, so dass

$$\pm R_\nu = \int\limits_{\frac{(\nu-1)\pi}{h}}^{\frac{\nu\pi}{h}} \varphi(\vartheta) \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta.$$

In dem Intervalle von $\frac{(\nu-1)\pi}{h}$ bis $\frac{\nu\pi}{h}$ ändern $\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}$ und $\varphi(\vartheta)$ ihr Vorzeichen nicht, und zwar ist $\sin h\vartheta$ negativ oder positiv, je nachdem $\nu$ zu den geraden oder ungeraden Zahlen gehört. Nun ist $\varphi(\vartheta)$, sowie $\sin\vartheta$ stets positiv und dasselbe gilt von der Differenz $\frac{\nu\pi}{h} - \frac{(\nu-1)\pi}{h}$; sonach findet in $\pm R_\nu$ das obere oder untere Zeichen Statt, je nachdem $\nu$ ungerade oder gerade ist.

Ferner erhellt, dass in dem Intervalle $\left[\frac{(\nu-1)\pi}{h}, \frac{\nu\pi}{h}\right]$ das Maximum und Minimum der Function $\varphi(\vartheta)$ beziehlich $\varphi\left[\frac{(\nu-1)\pi}{h}\right]$ und $\varphi\left[\frac{\nu\pi}{h}\right]$ heissen; nur wenn $\varphi(\vartheta)$ constant bleibt, fallen diese Werthe zusammen. Nach einem bekannten Satze liegt daher $\pm R_\nu$ zwischen

$$\varphi\left[\frac{(\nu-1)\pi}{h}\right] \int\limits_{\frac{(\nu-1)\pi}{h}}^{\frac{\nu\pi}{h}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta \text{ und } \varphi\left(\frac{\nu\pi}{h}\right) \int\limits_{\frac{(\nu-1)\pi}{h}}^{\frac{\nu\pi}{h}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta,$$

das giebt mit Zuziehung der im vorigen Paragraphen angewandten Bezeichnung

$$R_\nu \overline{\gtrless} \varrho_\nu \varphi\left[\frac{(\nu-1)\pi}{h}\right] \text{ und } R_\nu \overline{>} \varrho_\nu \varphi\left(\frac{\nu\pi}{h}\right),$$

folglich

$$R_{\nu+1} \overline{\gtrless} \varrho_{\nu+1} \varphi\left(\frac{\nu\pi}{h}\right) \text{ und } R_{\nu+1} \overline{>} \varrho_{\nu+1} \varphi\left[\frac{(\nu+1)\pi}{h}\right].$$

Da nun $\varrho_\nu > \varrho_{\nu+1}$, also auch $\varrho_\nu \varphi\left(\frac{\nu\pi}{h}\right) > \varrho_{\nu+1} \varphi\left(\frac{\nu\pi}{h}\right)$ ist, so muss nothwendig $R_\nu > R_{\nu+1}$ sein.

Statt des Integrales $T$ erhalten wir mithin die Reihe

$$T = R_1 - R_2 + R_3 - \ldots \pm R_{s+1},$$

in der jedes vorhergehende Glied grösser, als das nachfolgende ist. Brechen wir daher wieder bei dem $2m^{ten}$ oder $2m + 1^{sten}$ Gliede ab, wo $2m < s$, so gewinnen wir die Beziehungen

$$T > R_1 - R_2 + R_3 - \ldots - R_{2m},$$
$$T < R_1 - R_2 + R_3 - \ldots - R_{2m} + R_{2m+1}.$$

Und ersetzen wir in der ersten Ungleichheit $R_1, R_3, R_5, \ldots R_{2m-1}$ durch ihre untern, $R_2, R_4, \ldots R_{2m}$ aber durch ihre obern Grenzen, so kommt

$$T > (\varrho_1 - \varrho_2)\varphi\left(\frac{\pi}{h}\right) + (\varrho_3 - \varrho_4)\varphi\left(\frac{3\pi}{h}\right) + \ldots + (\varrho_{2m-1} - \varrho_{2m})\varphi\left[\frac{(2m-1)\pi}{h}\right].$$

In ganz ähnlicher Weise werden wir aus der zweiten Ungleichheit die folgende erzielen:

$$T < \varrho_1\varphi(0) - (\varrho_2 - \varrho_3)\varphi\left(\frac{2\pi}{h}\right) - (\varrho_4 - \varrho_5)\varphi\left(\frac{4\pi}{h}\right) - \ldots - (\varrho_{2m} - \varrho_{2m+1})\varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right)$$

Diese Grenzen des $T$ aber können wir noch bedeutend enger ziehen, wenn wir erwägen, dass die Functionalwerthe $\varphi(0)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{h}\right), \ldots$, falls sie nicht dieselbe Grösse beibehalten, eine abnehmende Reihe bilden, also anstatt $\varphi\left(\frac{\pi}{h}\right), \varphi\left(\frac{2\pi}{h}\right), \ldots$ in allen Fällen $\varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right)$ substituirt werden darf, und dass die Differenzen $\varrho_1 - \varrho_2, \varrho_3 - \varrho_4, \ldots; \varrho_2 - \varrho_3, \varrho_4 - \varrho_5, \ldots$ stets positiv sind. Vermöge dieser Beziehungen dürfen wir nämlich diese Ungleichheiten bilden:

$$T > [\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \ldots + \varrho_{2m-1} - \varrho_{2m}]\,\varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right)$$

und

$$T < [\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \ldots - \varrho_{2m} + \varrho_{2m+1}]\varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right) + \varrho_1\left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right)\right]$$

Nun gelten aber, weil $2m < s \leq n$, nach dem vorigen Paragraphen die Relationen

$$\frac{\pi}{2} + \varrho_{2m+1} > \varrho_1 - \varrho_2 + \ldots - \varrho_{2m} + \varrho_{2m+1},$$
$$\frac{\pi}{2} - \varrho_{2m+1} < \varrho_1 - \varrho_2 + \ldots - \varrho_{2m},$$

und demnach wird einerseits

$$T > \left(\frac{\pi}{2} - \varrho_{2m+1}\right)\varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right),$$

andererseits dagegen

$$T < \left(\frac{\pi}{2} + \varrho_{2m+1}\right)\varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right) + \varrho_1\left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right)\right]$$

sein müssen.

Lassen wir jetzt $n$ ins Unendliche wachsen, so muss auch $s$ seiner Bedeutung zufolge über jede Grenze hinaus zunehmen, und folglich kann auch $2m$ jeden beliebig grossen Werth überschreiten. Weil aber $2m$ bloss die einzige Bedingung $2m < n$ zu erfüllen braucht, so dürfen wir offenbar $2m$ in der Weise zunehmen lassen, dass $\lim \frac{2m}{h} = 0$ wird. Indem wir aber diesen Fall hier voraussetzen, bekommen wir augenscheinlich die engsten Grenzen für $T$. Denn nun muss $\lim \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right) = \varphi(0)$, also

$$\lim\left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right)\right] = 0$$

sein, und weil ausserdem wegen

$$\frac{1}{m\pi}\,\frac{\frac{2m\pi}{h}}{\sin\frac{2m\pi}{h}} > \varrho_{2m+1} > \frac{2}{(2m+1)\pi}\,\frac{(2m+1)\frac{\pi}{h}}{\sin(2m+1)\frac{\pi}{h}}$$

für ein unendlich werdendes $n$ $\varrho_{2m+1}$ mit Null zusammenfällt und demnach

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varrho_{2m+1}\right)\varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right) \text{ und } \left(\frac{\pi}{2} + \varrho_{2m+1}\right)\varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right)$$

beide in $\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$ übergehen: so muss nothwendig die Beziehung

$$\lim T = \frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$$

Statt haben, sofern $\varrho_1$ nur endlich bleibt. Dies aber ist wirklich der Fall, wie man sogleich aus der Bemerkung schliesst, dass

$$\varrho_1 = \int_0^{\frac{\pi}{h}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta < \text{Max.}\left[\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\right]\int_0^{\frac{\pi}{h}} d\vartheta,$$

dieser grösste Werth von

$$\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} = 1 + 2(\cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta + \ldots + \cos 2n\vartheta)$$

aber für $\vartheta = 0$ erscheint und $2n+1$ heisst und dass somit $\varrho_1$

niemals die Grösse $\pi$ erreichen oder gar überschreiten kann.*)

2. Fall. Die nie zunehmende Function $\varphi(\vartheta)$ kann auch negativ sein.

Die in 1. gepflogene Untersuchung setzte voraus, dass die zwischen 0 und $c$ stetige Function $\varphi(\vartheta)$ nie zunahm und stets positiv blieb, wenn $\vartheta$ von 0 bis $c$ wuchs. War mithin $0 \overline{\gtrless} \vartheta' < \vartheta'' \overline{\gtrless} c$, so musste in Folge dieser Annahme $\varphi(\vartheta') \overline{>} \varphi(\vartheta'')$ sein, und beide Functionalwerthe mussten positive Grössen bedeuten. Die Bedingung $\varphi(\vartheta') \overline{>} \varphi(\vartheta'')$ wollen wir auch jetzt noch beibehalten, die andere aber dahin erweitern, dass die Function $\varphi(\vartheta)$ auch negativ sein darf. Alsdann lässt sich immer eine so grosse positive Constante $\alpha$ bestimmen, dass in dem Intervalle $(0, c)$ $\varphi(\vartheta) + \alpha$ stets positiv ist. Mithin können wir jetzt unsern in 1. gefundenen Satz auf die Function $\varphi(\vartheta) + \alpha$ anwenden und erhalten daher die Beziehung

$$\lim \int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \left[\varphi(\vartheta) + \alpha\right] d\vartheta = \frac{\pi}{2} \left[\varphi(0) + \alpha\right].$$

Dieses Integral aber bildet die Summe der beiden Integrale

$$\int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta \text{ und } \int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \alpha\, d\vartheta,$$

von denen das letztere mit unendlich wachsendem $n$ der Grenze $\frac{\alpha\pi}{2}$ sich nähert, weil in 1. die Function $\varphi(\vartheta)$ für den ganzen

*) Die Endlichkeit von $\varrho_1$ lässt sich auch so nachweisen:

$$\varrho_1 < \frac{\pi}{2} + \varrho_2, \quad \varrho_2 < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{h}},$$

also

$$\varrho_1 < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\pi}{h}}{\sin\frac{\pi}{h}},$$

die aber giebt

$$\lim \varrho_1 < \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}.$$

Umfang des Intervalles eine Constante bezeichnen darf. Sonach ist auch jetzt noch

$$\lim \int_0^c \varphi(\vartheta) \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

3. Fall. Die positive oder negative Function $\varphi(\vartheta)$ kann eine wachsende Function von $\vartheta$ bezeichnen.

Nimmt die Function $\varphi(\vartheta)$ in dem Intervalle $(0, c)$ algebraisch nie ab, so kann die Function $-\varphi(\vartheta)$ nie zunehmen. Wächst nun $n$ über jede Grenze hinaus, so muss dem Obigen zufolge die Grenze des Integrales

$$\int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \Big[-\varphi(\vartheta)\Big] d\vartheta$$

$\frac{\pi}{2} \Big[-\varphi(0)\Big]$ heissen. Es ist aber

$$\int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \Big[-\varphi(\vartheta)\Big] d\vartheta = -\int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta,$$

also

$$\lim \int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \Big[-\varphi(\vartheta)\Big] d\vartheta = -\frac{\pi}{2}\varphi(0) = -\lim \int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

und demnach

$$\lim \int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

Fassen wir mithin sämmtliche Einzelfälle zusammen, so haben wir den Satz: Bezeichnet $c$ eine positive Constante, welche $\overline{\gtrless} \frac{\pi}{2}$ ist, und $\varphi(\vartheta)$ eine solche stetige Function von $\vartheta$, die, während $\vartheta$ von 0 bis $c$ wächst, nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht: so muss das Integral

$$\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta,$$

wenn man darin der positiven ganzen Zahl $n$ immer

grössere Werthe beilegt, von der Grösse $\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$ immerfort um weniger als ein beliebig Kleines verschieden sein.

## §. 87.

**Grenzwerth des Integrales $\int\limits_b^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$ für $n=\infty$, wenn $0<b<c<\frac{\pi}{2}$ und die Function $\varphi(\vartheta)$ keine Maxima und Minima besitzt.**

Der im Vorhergehenden gefundene Lehrsatz liefert uns das Mittel zur Beantwortung der Frage, was aus dem Integrale

$$\int\limits_c^b \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$$

wird, wenn in $h=2n+1$ die ganze Zahl $n$ unendlich grosse Werthe erwirbt und die Constanten $b$ und $c$ der Bedingung $0<b<c<\frac{\pi}{2}$ genügen und $\varphi(\vartheta)$ eine solche stetige Function von $\vartheta$ bezeichnet, die, während $\vartheta$ von 0 bis $c$ wächst, nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht.

Da nämlich die Function $\varphi(\vartheta)$ nur für das Intervall von $b$ bis $c$ gegeben ist, so bleibt die Art ihrer Fortsetzung ausserhalb des genannten Intervalles ganz der Willkür anheimgestellt. Setzen wir daher die Function von $b$ bis 0 so fort, dass sie stets denselben Werth $\varphi(b)=\varphi(0)$ beibehält: so haben wir offenbar jetzt eine Function $\varphi(\vartheta)$, die für das Intervall von 0 bis $c$ ganz den Bedingungen des vorstehenden Theoremes Genüge leistet. Und daher ist

$$\lim \int\limits_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta=\frac{\pi}{2}\,\varphi(0).$$

Zerlegt man aber das Integral in die folgenden beiden

$$\int\limits_0^b \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta,\quad \int\limits_b^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$$

und bedenkt, dass das erstere für ein unendlich grosses

$n = \frac{\pi}{2}\,\varphi(b) = \frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$ wird; so muss augenscheinlich die Beziehung Statt finden

$$\lim \int_b^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta = 0.$$

Mithin folgt Dirichlet's zweiter Satz:

Gelten für die Constanten $b$ und $c$ die Bedingungen $0 < b < c \overline{\gtrless} \frac{\pi}{2}$, und bezeichnet $\varphi(\vartheta)$ eine solche stetige Function von $\vartheta$, die, während $\vartheta$ von 0 bis $c$ wächst, nie vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht; so muss für ein unendlich grosses $n$ der Werth des Integrales

$$\int_b^c \frac{\sin(2n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$$

die Null sein.

## §. 88.

### Gültigkeit der Dirichlet'schen Lehrsätze für eine alternirend ab- und zunehmende Function $\varphi(\vartheta)$. Fall der Discontinuität.

Nimmt die vorläufig zwischen 0 und $c$ noch stetig bleibende Function $\varphi(\vartheta)$ an einzelnen Stellen $e, e_1, e_2 \ldots$ abwechselnd zu und ab, so wird wegen der Gleichheit

$$\int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta = \int_0^e \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta + \int_e^{e_1} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$+ \int_{e_1}^{e_2} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta + \ldots$$

für ein unendlich grosses $n$ das erste der Integrale rechts $\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$ zur Grenze haben; die übrigen Integrale hingegen sind sämmtlich mit Null gleichbedeutend. Denn während $\vartheta$ von 0 bis $c$ wächst, ist für den ganzen Umfang eines jeden der Theilintervalle $(0, e)$, $(e, e_1) \ldots$ die jedesmalige Natur der Function $\varphi(\vartheta)$ keiner Aenderung unterworfen. Die obigen

Lehrsätze gelten somit auch für eine alternirend ab- und zunehmende Function $\varphi(\vartheta)$.

Die Function $\varphi(\vartheta)$ ist bis jetzt immer als stetig vorausgesetzt. Auch diese Beschränkung kann dahin erweitert werden, dass innerhalb der Grenzen 0 und $c$ oder $b$ und $c$ die Function $\varphi(\vartheta)$ an einzelnen Stellen den Charakter der Continuität verlieren darf, ohne indess jemals unendlich zu werden. Die Richtigkeit dieser Behauptung erhellt wiedrum sofort, wenn man auch in Bezug auf diese besondern Stellen die Zerfällung des ursprünglichen Integrales in Theilintegrale vornimmt und nun wie vorhin schliesst.

Ist z. B. $\varphi(\vartheta)$ eine solche Function von $\vartheta$, die, während $\vartheta$ von 0 bis $c \gtreqless \frac{\pi}{2}$ sich bewegt, an den Stellen $e_1, e_2, \ldots e_r$ endliche Sprünge macht, ausserdem aber zwischen $e_3$ und $e_4$, $e_{r-1}$ und $e_r$ an den Punkten $\varepsilon$ und $\eta$ vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht; so wird man das Integral

$\int_0^c \varphi(\vartheta) \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta$ in $r+3$ zwischen den Grenzen 0 und $e_1$, $e_1$ und $e_2, \ldots, e_3$ und $\varepsilon$, $\varepsilon$ und $e_4, \ldots, e_{r-1}$ und $\eta$, $\eta$ und $e_r$, $e_r$ und $c$ zerlegen und auf diese unsere obigen Lehrsätze anwenden. Alsdann folgt sofort, dass

$$\lim \int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi(\vartheta)\, d0 = \lim \int_0^{e_1} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\varphi(0)$$

sein muss, indem die übrigen Integrale sämmtlich die Null zur Grenze besitzen.

Die Dirichlet'schen Theoreme verlieren selbst dann ihre Gültigkeit nicht, wenn die Function $\varphi(\vartheta)$ für einen oder mehrere zwischen 0 und $c$ oder $b$ und $c$ befindlichen Werthe unendlich wird, vorausgesetzt, dass das Integral

$$\int_0^\vartheta \varphi(\vartheta)\, d\vartheta = F(\vartheta)$$

von $\vartheta = 0$, $(b)$ bis $\vartheta = c$ endlich und stetig bleibt.

Um hiervon sich zu überzeugen, wird man bloss für einen dieser besondern Werthe eine nähere Betrachtung anzustellen haben, weil die Verallgemeinerung nicht die geringste Schwierigkeit bietet. Auch bedarf nur der erste Satz einer

ausführlichern Erörterung, da im Wesentlichen für den zweiten bloss eine Wiederholung der nachfolgenden Schlüsse nöthig ist.

Dem gemäss werde zwischen 0 und $c$ die Function $\varphi(\vartheta)$ nur für $\vartheta = \alpha$ unendlich, wo also $\alpha$ stets einen von 0 verschiedenen Werth besitzt. Bezeichnen wir nun durch $\varepsilon$ eine von $h$ unabhängige, positive Grösse; so folgt durch Zerlegung des Integrales $\int\limits_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$ in vier andere zwischen den Grenzen

0 und $\alpha - \varepsilon$, $\alpha - \varepsilon$ und $\alpha$, $\alpha$ und $\alpha + \varepsilon$, $\alpha + \varepsilon$ und $c$,

dass für das erste und letzte derselben beziehungsweise $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ und 0 die Grenzwerthe vorstellen, wenn $h$, d. i. $n$ unendlich wird.

Die Grenzen des zweiten und dritten Integrales aber wird man entdecken, wenn man die beliebige Grösse $\varepsilon$ so klein wählt, dass sowohl zwischen $\alpha - \varepsilon$ und $\alpha$, als auch innerhalb des Intervalls von $\alpha$ bis $\alpha + \varepsilon$ die Function $\varphi(\vartheta)$ niemals das Zeichen wechselt, was freilich nicht ausschliesst, dass beim Durchgange durch das Unendliche die Function $\varphi(\vartheta)$ ein anderes Vorzeichen erwirbt.*) Denn nun gelten in Bezug auf die absoluten Werthe augenscheinlich die Beziehungen

$$\int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta < \frac{1}{\sin(\alpha-\varepsilon)} \int\limits_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{F(\alpha) - F(\alpha-\varepsilon)}{\sin(\alpha-\varepsilon)}$$

*) Ein derartiger Fall würde z. B. eintreten, wenn $\varphi(\vartheta)$ für alle Werthe von $\vartheta < \alpha$ mit $-\frac{1}{2\sqrt{\alpha-\vartheta}}$ identificirt wird, dagegen für $\vartheta > \alpha$ die Function $\frac{1}{2\sqrt{\vartheta-\alpha}}$ repräsentirt. Alsdann ist offenbar

$$F(\vartheta) = \sqrt{\alpha-\vartheta} - \sqrt{\alpha}, \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\vartheta-\alpha} - \sqrt{\alpha}.$$

je nachdem $\vartheta \lesseqgtr \alpha$, also fortwährend eine stetige Function von $\vartheta$, deren beide Werthe für $\vartheta = \alpha$ zusammenfallen.

Man vergl. über diesen Beweis: Dirichlet. Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données. Crelle Journal 17; Seite 35 etc.

und

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta < \frac{1}{\sin\alpha}\left[F(\alpha+\varepsilon)-F(\alpha)\right],$$

welchen Werth $h$ auch annehmen mag. Der Voraussetzung zufolge aber ist $\alpha$ von 0 und wegen $\alpha < \frac{\pi}{2}$ auch von jedem andern Vielfachen von $\pi$ verschieden; die Grenzen der beiden Integrale müssen daher für ein unendlich klein werdendes $\varepsilon$ mit Null zusammenfallen.

Wie klein indess die von $h$ unabhängige Grösse $\varepsilon$ auch gewählt werden möge, stets bleibt für ein unendlich grosses $h$

$$\lim\left[\int_{0}^{\alpha-\varepsilon} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta + \int_{\alpha+\varepsilon}^{c} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta\right] = \frac{\pi}{2}\,\varphi(0),$$

und demnach muss für $h=\infty$ auch $\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$ den Grenzwerth des Integrales

$$\int_{0}^{c} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta$$

ausdrücken.

## §. 89.

### Die Constante $c$ überschreitet den Werth $\frac{\pi}{2}$.

Wenn die in unsern frühern Betrachtungen $\overline{\overline{<}}\ \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzte Constante $c$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ liegt, so folgt wegen

$$\int_{0}^{c} \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{c} \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta,$$

dass das erstere von diesen Integralen beim Uebergange zum Unendlichen mit $\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$ oder deutlicher mit $\frac{\pi}{2}\,\varphi(+0)$ identisch wird. Den Grenzwerth des zweiten Integrales dagegen wird man ermitteln, nachdem man dasselbe mittelst der Sub-

stitution $\vartheta = \pi - \vartheta'$ in $-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-c} \varphi(\pi-\vartheta) \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta$ umgesetzt hat. Denn nun ergiebt sich auf den ersten Blick, dass für $\frac{\pi}{2} < c < \pi$ das Integral mit unendlich wachsendem $n$ der Null sich nähert, dass hingegen für $c = \pi$

$$\lim \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\pi-\vartheta) \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\, \varphi(\pi-0)$$

ist. Und daher besteht jetzt folgender Satz:

I. Erfüllt die positive Constante $c$ die Bedingung $\frac{\pi}{2} < c < \pi$, so ist für ein unendlich grosses $n$

$$\lim \int\limits_0^{c} \varphi(\vartheta) \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\, \varphi(+0);$$

besitzt aber $c$ den Werth $\pi$, so hat man

$$\lim \int\limits_0^{c} \varphi(\vartheta) \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2} \left[\varphi(\pi-0) + \varphi(+0)\right].$$

Obgleich für das unmittelbar Folgende eine grössere Verallgemeinerung dieser Betrachtungen überflüssig ist, möge doch das nachstehende Theorem Dirichlet's hier ebenfalls noch eine Stelle finden.

II. Bezeichnet $a$ irgend eine positive Constante, heisst ferner $l\pi$ das grösste in $a$ enthaltene Vielfache von $\pi$, und stellt endlich $\varphi(\vartheta)$ eine von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = a$ stetige Function von $\vartheta$ vor; so unterscheidet sich, je nachdem $a$ von $l\pi$ verschieden, oder mit $l\pi$ gleichbedeutend ist, für ein unendlich werdendes $n$ das Integral

$$\int\limits_0^{a} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

entweder von dem Ausdrucke

$$\pi\left[\tfrac{1}{2}\varphi(0)+\varphi(\pi)+\varphi(2\pi)+\ldots+\varphi(l\pi)\right]=\frac{\pi}{2}\varphi(0)+\pi\sum_{s=1}^{s=l}\varphi(s\pi),$$

oder von diesem

$$\frac{\pi}{2}\left[\varphi(0)+\varphi(l\pi)\right]+\pi\sum_{1}^{l-1}\varphi(s\pi)$$

zuletzt um weniger als jede noch so klein gewählte Grösse.*)

In der That, man hat zunächst die Gleichung

$$1.\quad \int_0^a \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta=\int_0^{l\pi}\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta+\int_{l\pi}^{a}\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Zerlegt man nun das erste Integral in $2l$ andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{2\pi}{2}$, ..., $(2l-1)\frac{\pi}{2}$ und $2l\frac{\pi}{2}$ und schreibt in den einzelnen Theilintegralen anstatt $\vartheta$

$$0,\ \pi-\vartheta,\ \pi+\vartheta,\ 2\pi-\vartheta,\ 2\pi+\vartheta,\ldots\, l\pi-\vartheta;$$

so wird in sämmtlichen Integralen die Variabele $\vartheta$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ sich bewegen, wenn man bei den Integralen vom geraden Range eine Vertauschung der Integrationsgrenzen noch vornimmt. Und daher wird unserm frühern Lehrsatze zufolge für $n=\infty$ die Grenze von

$$\int_0^{l\pi}\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\varphi(\vartheta)d\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}d\vartheta\left[\varphi(\vartheta)+\varphi(\pi-\vartheta)+\varphi(\pi+\vartheta)+\ldots+\varphi(l\pi-\vartheta\right.$$

augenscheinlich mit

$$\frac{\pi}{2}\left[\varphi(0)+\varphi(\pi-0)+\varphi(\pi+0)+\ldots+\varphi(l\pi-0)\right]$$

identisch sein, also für den Fall einer stetigen Function durch den Ausdruck $\pi\left[\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi(\pi)+\varphi(2\pi)+\ldots+\frac{1}{2}\varphi(l\pi)\right]$ dargestellt werden. Offenbar repräsentirt derselbe auch die Grenze des Integrales von 0 bis $a$, wenn in dem zweiten der obigen Integrale (1) die Constante $a$ der Zahl $l\pi$ gleich ist. Und sind $a$ und $l\pi$ von einander verschieden, so wird man

*) Dirichlet. Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies. Crelle. Journal Bd. 17. S. 57 ff.

vermöge des vorhin bewiesenen Lehrsatzes I. aus der Beziehung

$$\int_{l\pi}^{a} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(\vartheta)\,d\vartheta = \int_{0}^{a-l\pi} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(l\pi+\vartheta)\,d\vartheta$$

sogleich die andere folgern:

$$\lim \int_{0}^{a-l\pi} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,\varphi(l\pi+\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\pi}{2}\,\varphi(l\pi+0) = \frac{\pi}{2}\,\varphi(l\pi).$$

Beide Resultate aber vereinigt zeigen die Richtigkeit des obigen Theoremes.

## §. 90.

### Convergenz der Reihe $\frac{1}{2}\,b_0 + \sum_1^\infty (b_s \cos s\,x + a_s \sin s\,x)$

Gestützt auf die vorhergehenden Lehrsätze können wir nun den Beweis liefern, dass die unendliche Reihe

$$\tfrac{1}{2}\,b_0 + \sum_1^\infty (b_s \cos s\,x + a_s \sin s\,x)$$

stets convergirt, wenn ihre Coefficienten den beiden Gleichungen

$$b_s = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos s\,x\,d\,x, \quad a_s = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin s\,x\,d\,x$$

gemäss bestimmt werden. Selbstverständlich wird dabei unter $f(x)$ eine solche Function von $x$ verstanden, die für den Fall der Discontinuität bloss endliche Sprünge macht und welche innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ nur eine beschränkte Anzahl von Maximis und Minimis besitzt.

Die Summe $S$ der $2n+1$ ersten Glieder dieser Reihe haben wir früher bekanntlich durch das bestimmte Integral

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\vartheta)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta-x}{2}}{\sin\frac{\vartheta-x}{2}}\,d\vartheta$$

ausgedrückt und gesehen, dass dasselbe in die beiden Integrale

$$w = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta \text{ und } v = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

sich zerlegen liess, wo $x$ nur von $-\pi$ bis $+\pi$ sich bewegen kann. Erreicht folglich $x$ weder den einen, noch den andern dieser Grenzwerthe, so ist offenbar für $n = \infty$

$$\lim w = \tfrac{1}{2} f(x-0), \quad \lim v = \tfrac{1}{2} f(x+0).$$

Wird aber $x = -\pi$, so hat man, weil $w = 0$,

$$\lim v = \tfrac{1}{2}\,[f(-\pi+2\pi-0) + f(-\pi+0)]$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[f(\pi-0) + f(-\pi+0)].$$

Und fällt $x$ mit $+\pi$ zusammen, so wird nun $v = 0$ und

$$\lim w = \tfrac{1}{2}\,[f(\pi-2\pi+0) + f(\pi-0)] = \tfrac{1}{2}\,[f(-\pi+0) + f(\pi-0)].$$

Sämmtliche Fälle vereinigt begründen demnach den Satz, dass die unendliche Reihe

$$\tfrac{1}{2} b_0 + \sum_1^\infty (b_s \cos sx + a_s \sin sx)$$

immer convergirt und den Werth $\frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)]$ erhält, sofern $-\pi < x < +\pi$, dass hingegen ihre Summe für die Grenzwerthe $x = \pm\pi$ mit dem Ausdrucke

$$\tfrac{1}{2}\,[f(\pi-0) + f(-\pi+0)]$$

oder einfacher mit $\frac{1}{2}\,[f(+\pi) + f(-\pi)]$ äquivalent ist.

Bezeichnet mithin $f(x)$ eine zwischen $-\pi$ und $+\pi$ stetige Function von $x$, so wird im Allgemeinen die Sinus-Cosinusreihe

$$\tfrac{1}{2} b_0 + \sum_1^\infty (b_s \cos sx + a_s \sin sx) = f(x), \text{ wenn } -\pi < x < +\pi, \text{ und}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[f(\pi) + f(-\pi)], \text{ sofern } x = \pm\pi.$$

Für alle Werthe von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$ wird sonach die Function $f(x)$ durch die genannte Reihe dargestellt werden können, wenn $f(x)$ eine gerade Function von $x$ ausdrückt. Ist dagegen $f(-x) = -f(x)$, so kann die Sinus-Cosinusreihe nur dann für sämmtliche Werthe von $x$ innerhalb des Intervalles $(-\pi, +\pi)$ mit der Function $f(x)$ gleichbedeutend sein, wenn $f(\pi)$ und $f(-\pi)$ mit Null zusammenfallen.

## §. 91.

### Convergenz der Sinus- und Cosinusreihe.

Die Bildung der Sinus-Cosinusreihe wurde beim Beginn der bislang gepflogenen Untersuchungen auf die bekannten Eigenschaften der Sinus- und der Cosinusreihe gegründet, wonach jene zur Darstellung einer der Bedingung $f(-x)=-f(x)$ unterworfenen Function zwischen den Grenzen $(-\pi, \pi)$ geeignet schien, diese hingegen eine Repräsentation einer geraden Function innerhalb des genannten Intervalls zuliess. Diesen Zusammenhang nun haben wir später ganz ausser Acht gelassen. Es liegt uns daher jetzt die Verpflichtung ob, in Kürze zu zeigen, wie aus der Convergenz der Sinus-Cosinusreihe die der beiden besondern Reihen von selbst entspringt.

Zu dem Behufe denke man sich vorerst die Function $f(x)$ für den halben Umfang des Intervalls $(-\pi, +\pi)$, nämlich von 0 bis $+\pi$ ganz beliebig gegeben und setze dieselbe für die zwischen 0 und $-\pi$ enthaltenen Werthe nach einander den beiden Gleichungen

$$f(-x)=f(x), \quad f(-x)=-f(x)$$

gemäss fort. Diesen Fortsetzungen der Function $f(x)$ auf der negativen Seite der $x$ entsprechend werden alsdann die Coefficienten $a_m$ oder $b_m$ aus der Sinus-Cosinusreihe

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} d\vartheta\, f(\vartheta)\cos m(\vartheta-x)^{*})$$

von selbst verschwinden, wodurch wir nunmehr Darstellungen der beliebigen Function $f(x)$ durch eine Cosinus- oder Sinusreihe gewinnen.

Wird die Function $f(x)$ der Gleichung $f(-x)=f(x)$ gemäss für negative $x$ fortgesetzt, so kann für $x=0$ keine Unterbrechung der Stetigkeit von $f(x)$ eintreten, und $f(-\pi)$ wird mit $f(\pi)$ gleichgeltend sein. Für $x=0$ ist daher die Summe unserer allgemeinen Reihe $=f(0)$ und für $x=\pm\pi$ mit $f(\pi)$ identisch. Bedenkt man jetzt weiter, dass

*) Diese kurze symbolische Form der Sinus-Cosinusreihe werden wir bei den später folgenden „Fourier'schen Integralen" begründen.

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\, f(\vartheta)\cos m\vartheta = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} d\vartheta\, f(\vartheta)\cos m\vartheta\right.$$

$$\left.+ \int_{0}^{\pi} d\vartheta\, f(\vartheta)\cos m\vartheta\right] = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} d\vartheta\, f(\vartheta)\cos m\vartheta$$

und ebenso $a_m = 0$ ist, so wird nun die von $x = 0$ bis $x = \pi$ ganz willkürliche gegebene Function $f(x)$ durch die Reihe

$$\tfrac{1}{2}\, b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots,\quad b_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \cos m x\, dx$$

vorgestellt, welche auch noch für die das Intervall begrenzenden Werthe 0 und $\pi$ gültig ist. Als selbstverständlich gilt dabei die Bemerkung, dass, wenn $f(x)$ innerhalb 0 und $\pi$ unstetig in der früher angedeuteten Weise wird, die Reihe für jeden solchen Werth von $x$ dem arithmetischen Mittel aus den entsprechenden Werthen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ gleich zu setzen ist.

Wird aber zur Fortsetzung der Function $f(x)$ für negative $x$ die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ benutzt, so wird im Allgemeinen für $x = 0$ eine Unterbrechung der Continuität von $f(x)$ eintreten. Die allgemeine Reihe besitzt folglich für $x = 0$ die Summe 0, und dasselbe findet an den Grenzen $x = \pm \pi$ Statt. Erinnert man sich also noch, dass jetzt

$$b_m = 0 \text{ und } a_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx\, f(x) \sin m x$$ ist, so zeigt sich, dass

die Sinusreihe im Allgemeinen für $x = 0$ und $x = \pi$ nicht mehr zur Darstellung der willkürlichen Function $f(x)$ von 0 bis $\pi$ benutzt werden kann, was jedoch wegen $\sin 0 = 0 = \sin \pi$ sich ganz von selbst ergiebt.

## §. 92.

### Die Darstellung einer Function durch trigonometrische Reihen ist nur auf eine Weise möglich.

Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen also unzweifelhaft, dass die nach Sinus oder Cosinus oder beiden Functionen fortschreitenden Reihen stets zu den convergirenden gehören, wenn ihre Coefficienten in der angegebenen Weise bestimmt werden. Nur dies ist bislang nicht entschieden, ob die Dar-

stellung einer gegebenen Function innerhalb der bekannten Intervalle nur auf eine Art möglich, also die Entwicklung eine in sich völlig bestimmte ist.

Nehmen wir, um hierüber Aufschluss zu erhalten, einmal an, dass für eine beliebige Function $f(x)$, die wir der Kürze halber stetig voraussetzen, die Gleichung bestehe

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos 2x + \ldots + \beta_n \cos nx + \ldots$$
$$+ \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \ldots + \alpha_n \sin nx + \ldots$$

Wird dieselbe nach einander mit $\cos mx\,dx$ und $\sin mx\,dx$ multiplicirt und darauf zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ integrirt, so ergeben sich die beiden Beziehungen

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx dx = \sum_{n=0}^{n=\infty} \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\,dx = \sum_0^\infty \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\,dx + \sum_1^\infty \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx.$$

Nun findet sich aber leicht, dass die Integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \sin mx\,dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx$$

immer der Null gleich sind, sofern die ganzen Zahlen $m$ und $n$ nicht zusammenfallen. Nur wenn $m = n$, ist:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx^2\,dx = \pi, \text{ oder } = 2\pi, \text{ je nachdem } m > 0, \text{ oder } m = 0,$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx^2\,dx = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2mx)\,dx = \pi.$$

Das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx$ oder — was dasselbe — das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx$ dagegen besitzt in allen Fällen den Werth Null.

Hieraus aber folgt mit Nothwendigkeit

$$\beta_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,dx, \text{ d. h. } \beta_m = b_m,$$

$$2\beta_0 \pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \text{ d. g. } \beta_0 = \tfrac{1}{2} b_0$$

und

$$\alpha_m \pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin m x \, dx, \quad \text{d. i. } \alpha_m = a_m.$$

Die Untersuchung für die Cosinus- und Sinusreihe können wir unterlassen, weil sie, wie wir wissen, schon in der obigen Betrachtung mitbegriffen ist.

## §. 93.

### Erläuterungen über die Sinus- und Cosinusreihe, wenn das Intervall von 0 bis $\pi$ eine Aenderung erleidet.

Die Reihen

$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots = \psi(x)$$

und

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots = \chi(x),$$

welche wir abgesehen von ihrer Summe kurz durch die genannten Symbole bezeichnen, sind Functionen von $x$, welche ähnliche Eigenschaften besitzen wie der Cosinus und Sinus. Namentlich ist

$$\psi(-x) = \psi(x), \qquad \psi(x \pm 2s\pi) = \psi(x)$$

und

$$\chi(-x) = -\chi(x), \qquad \chi(x \pm 2s\pi) = \chi(x).$$

Hat demnach die von 0 bis $\pi$ durch die Reihe $\psi(x)$ oder $\chi(x)$ auszudrückende Function $f(x)$ nicht die nämlichen Eigenschaften wie die zu ihrer Darstellung benutzte Reihe, so kann auch von einer Identität über das Intervall von 0 bis $\pi$ hinaus gar keine Rede mehr sein.

Setzt man z. B. $x = 1 = \chi(x)$, so ist bekanntlich für $0 < x < \pi$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots$$

Dieses Resultat aber würde völlig unbrauchbar werden für $-\pi < x < 0$; alsdann muss nothwendig diese Gleichung Statt finden:

$$-\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots,$$

weil sonst die Reihe die Zahl $\frac{\pi}{4}$ nicht darstellen könnte.

Nehmen wir hingegen $f(x) = \frac{x}{2}$, so wird für negative $x$ auch $f(x)$ negativ, und wir dürfen nun behaupten, dass

$$\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots, \quad -\pi < x < +\pi^{*}).$$

Für grössere Werthe von $x$ als $\pi$, z. B. für $\pi < x < 3\pi$, würde dagegen nicht mehr die Gleichheit der Function $f(x) = \frac{1}{2}x$ und der Sinusreihe bestehen, weil $\frac{1}{2}(x + 2\pi)$ nicht $= \frac{1}{2}x$ ist. Soll daher für $\pi < x < 3\pi$ eine Function

$$f(x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$$

sein, so muss diese Function die Eigenschaft $f(x) = f(x - 2\pi)$ besitzen, weil die Sinusreihe nur auf die Function, deren Argument zwischen $-\pi$ und $+\pi$ sich befindet, unmittelbar angewendet werden darf. Dieser Bedingung aber genügt das Argument $x - 2\pi$, wenn $x$ zwischen $\pi$ und $3\pi$ sich bewegt, und daher ist nun dem Obigen gemäss

$$\frac{x - 2\pi}{2} = \frac{\sin(x - 2\pi)}{1} - \frac{\sin 2(x - 2\pi)}{2} + \frac{\sin 3(x - 2\pi)}{3} - \ldots,$$

d. g.

$$\frac{x}{2} = \pi + \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots, \quad \pi < x < 3\pi.$$

## §. 94.

### Die Function $f(x)$ kann innerhalb des gegebenen Intervalls verschiedenen Gesetzen folgen.

Bislang haben wir die willkürliche Function $f(x)$, welche wir durch trigonometrische Reihen darzustellen suchten, für den ganzen Umfang des Intervalles von 0 bis $\pi$ oder von $-\pi$ bis $+\pi$ uns gegeben gedacht. Wir dürfen jedoch die Annahme machen, dass für verschiedene Theile der genannten Intervalle die Natur der Function sich ändert. Die Untersuchung bleibt ganz die frühere, weil eben die darzustellende Function ganz beliebig ist; nur die Form der Betrachtung ändert sich, indem die Coefficienten $b_m$, $a_m$ nicht mehr für den ganzen Umfang des gegebenen Intervalles nach demselben

*) Vergl. 2, §. 83.

Gesetze gebildet werden. Die Integrale für $b_m$ und $a_m$ mit den Grenzen $(0, \pi)$ oder $(-\pi, \pi)$ zerfallen nämlich jetzt in so viel andere als Aenderungen in der Natur von $f(x)$ eintreten; die Grenzen dieser Theilintegrale sind durch die Stellen angezeigt, an denen ein Wechsel in der Bildungsweise von $f(x)$ Statt findet, und der Functionalfactor $f(x)$ ist in den einzelnen Theilintervallen durch die dort vorkommende, besondere Function von $x$ zu ersetzen.

Sei beispielsweise die durch eine Sinusreihe zu repräsentirende Function $f(x)$ nur beliebig von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und zwar $= \varphi(x)$, für das Theilintervall $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ hingegen der Bedingung $f(x) = \varphi(\pi - x)$ unterworfen. Alsdann wird

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin mx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin mx\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(\pi - x) \sin mx\, dx \right],$$

aber

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(\pi - x) \sin mx\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \varphi[\pi - (x + \pi)] \sin m(x + \pi)\, dx$$

$$= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \varphi(x) \sin m(\pi - x)\, dx = (-1)^{m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin mx\, dx,$$

folglich

$$a_m = \frac{2}{\pi} [1 + (-1)^{m+1}] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin mx\, dx = \begin{cases} 0, & m \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) \sin mx\, dx, & m \text{ ung} \end{cases}$$

Die beliebige Function $\varphi(x)$ ist daher für das Intervall vo 0 bis $\frac{\pi}{2}$ darstellbar durch die Reihe

$$a_1 \sin x + a_3 \sin 3x + a_5 \sin 5x + \ldots,$$

und man sieht, dass für die untere Grenze die Entwicklung im Allgemeinen nicht zulässig ist, wohl aber für $x = \frac{\pi}{2}$. Aehnliches gilt augenscheinlich für die Function $\varphi(\pi - x)$.

Nimmt man den besondern Fall $\varphi(x) = x$, $\varphi(\pi - x) = \pi - x$, so kommt wegen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2m+1)x\,dx = \left[\frac{-x\cos(2m+1)x}{2m+1} + \frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}}{(2m+1)^2},$$

also

$$a_{2m+1} = \frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}:$$

$$x = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \ldots\right],\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Dagegen wird

$$\pi - x = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \ldots\right],\ \frac{\pi}{2} \overline{<} x \overline{<} \pi.$$

Bleibt aber $\varphi(x) = x$ von $0$ bis $\pi$, so ist dem Frühern zufolge

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right),\ 0 \overline{<} x < \pi.$$

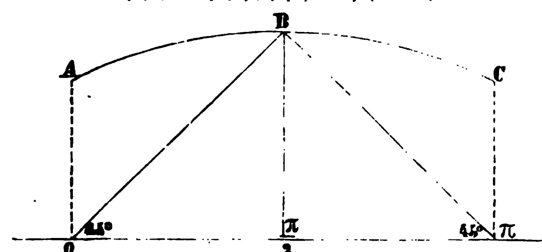
Für $x = \frac{\pi}{2}$ müssen sämmtliche Entwicklungen identisch werden, und in der That ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8};$$

$$\frac{\pi}{2} = 2\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right] = 2\,.\,\frac{\pi}{4}.$$

Fig. 9.

$f(x) = \varphi(x);\ f(x) = \varphi(\pi - x).$




Die geometrischen Bilder dieser Beispiele sind leicht zu con-

struiren; so würde für den speciellen Fall $\varphi(x)=x$, $\varphi(\pi-x)$ die gebrochene Linie $0\,B\,\pi$ (Fig. 9) die Function $f(x)$ darstellen.

Fig. 10.

Offenbar wird eine der obigen ganz analoge Betrachtung bei der Darstellung der gebrochenen Geraden $-\pi\,0\,i$ durch die Sinus-Cosinusreihe innezuhalten sein. Wie die Figur zeigt, ist $f(x)$ von $-\pi$ bis 0 der Null gleich, hingegen von 0 bis $\pi$ mit $x$ identisch; die Coefficienten $b_0$, $b_m$ und $a_m$ werden demnach definirt durch die Gleichungen

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos m x\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos m x\,dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{\cos m\pi-1}{m^2};\; b_0=\frac{\pi}{2}$$

und

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin m x\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin m x\,dx=-\frac{\cos m\pi}{m}.$$

Mithin ist

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right]$$
$$+\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots$$

Unstetigkeit tritt nicht ein, also muss $f(0)=0$ werden, was wegen $0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8}$ wirklich Statt findet; ebenso muss $\frac{\pi}{2}$ die Summe der Reihe für $x=+\pi$ heissen, und in der That ist $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8}$; $0=\frac{\pi}{4}-(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}$ endlich stellt den Werth der Reihe für $x=-\frac{\pi}{2}$ dar.

Wollte man jetzt — ähnlich dem vorhergehenden Beispiele — die den ersten und dritten Quadranten halbirende Gerade durch die Sinus-Cosinusreihe auszudrücken suchen, so würde dies offenbar wegen $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos m x\,dx=0$ unmöglich sein man erhielte also nur die früher erwähnte Sinusreihe, ein Resultat, das unsern obigen Betrachtungen zufolge auch im Voraus zu erwarten stand.

## §. 95.

### Herleitung einiger bestimmten Integrale mittelst der vorhergehenden Lehren.

In §. 92. haben wir den Nachweis geliefert, dass die Darstellung einer beliebig gegebenen Function durch trigonometrische Reihen innerhalb der Grenzen $(0, \pi)$ oder $(-\pi, \pi)$ nur auf eine Weise geschehen kann. Wird man daher durch irgend welche Untersuchungen auf eine Entwicklung der Function $f(x)$ nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen von $x$ geführt, in der die Coefficienten $a$ oder $b$ im Voraus bekannt sind; so ist durch diese Entwicklung zugleich die Kenntniss eines bestimmten Integrales gegeben, dessen Herleitung möglicherweis ohne die vorangehenden Lehren mit Schwierigkeiten verknüpft gewesen wäre.

Nehmen wir z. B. $f(x) = \frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2}$, so ist für $-1 < r < +1$

$$1. \quad \frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} = 1 + r \cos x + r^2 \cos 2x + \ldots + r^m \cos mx + \ldots \text{ *)}$$

Mithin ergeben sich sofort die Beziehungen

$$b_m = r^m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} \cos mx \, dx,$$

$$b_0 = 2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} \, dx.$$

Schreibt man aber die Gleichung 1. in folgender Gestalt

$$\frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} =$$

$$\frac{1}{2} + r \cos x + r^2 \cos 2x + \ldots,$$

so entspringt nun bloss die eine Relation

$$r^m = \frac{1 - r^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos mx \, dx}{1 - 2r \cos x + r^2} \text{ **)}.$$

---

*) Vergleiche Cauchy. Analysis S. 197 der deutschen Ausgabe von Huzler.

**) Vergl. Poisson. Journal de l'école polyt. cah. 19, p. 487.

Dieses auf den ersten Blick vielleicht etwas befremdende R sultat lässt sich jedoch an den betreffenden Integralen selb als richtig nachweisen. Da nämlich $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2} \cos mx\, dx$ fi $m > 0$ den Werth Null besitzt, so hat man offenbar d Gleichung

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} \cos mx\, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2} \cos mx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} \cos mx\, dx.$$

Für $m = 0$ dagegen ist $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2} \cos mx\, dx = 1$ und demna

$$b_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\, d$$

Auch mit der von Cauchy (a. a. O. S. 213) entwickelt Formel

2. $e^{r\cos x} \cos(r\sin x) = 1 + r\cos x + \frac{r^2}{1.2}\cos 2x + ..$

in welcher wie in der folgenden

3. $e^{r\cos x} \sin(r\sin x) = r\sin x + \frac{r^2}{1.2}\sin 2x + ...$

$r$ jeden zwischen $-\infty$ und $+\infty$ befindlichen Werth nehmen darf, hat es eine ähnliche Bewandtniss. Denn mittelbar entspringt

$$b_m = \frac{r^m}{m!} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{r\cos x} \cos(r\sin x) \cos mx\, dx,$$

$$b_0 = 2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{r\cos x} \cos(r\sin x)\, dx,$$

wogegen wiederum nur die eine Gleichung

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{r\cos x} \cos(r\sin x) \cos mx\, dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos mx\, d$$

Statt findet, wenn man zuvor auf beiden Seiten der Formel 2. die Zahl $\frac{1}{2}$ subtrahirt. Doch ist diese Vereinfachung bloss scheinbar, weil man auf die obigen Formen zurückkommt, je nachdem man $m \gtreqless 0$ setzt. In der That existiren also die beiden Gleichungen

$$4. \quad \int_0^\pi e^{r\cos x}\cos(r\sin x)\cos mx\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{r^m}{m!},\quad m > 0,$$

$$5. \quad \int_0^\pi e^{r\cos x}\cos(r\sin x)\,dx = \pi.$$

Die Reihe 3. dagegen liefert nur die eine Beziehung

$$6. \quad \int_0^\pi e^{r\cos x}\sin(r\sin x)\sin mx\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{r^m}{m!}.\text{*)}$$

Aus diesen Integralen wird man sehr leicht andere Formeln ableiten können. So ergiebt sich z. B., wenn man in der obigen Gleichung

$$\int_0^\pi \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}\cos mx\,dx = \frac{\pi}{2}r^m$$

$m = 1, 2, \dots n$ setzt und die Resultate addirt, mit Benutzung der Formel $\sum_1^n \cos s\vartheta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$ ohne Schwierigkeit die Relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}\,\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},\quad 1 > r > -1,$$

aus der wieder für $n = \infty$ die andere fliesst

$$\lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}\,\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1 - r},$$

*) Die Formeln 4., 5., 6. finden sich schon bei Poisson: Journal de l'école polyt., cah. 19, p. 493.

wie es in der That sein muss, sogar für ein beliebiges, von 1 verschiedenes $r$.

Aehnliche Formeln lassen sich noch entwickeln, wenn man die ebenfalls von Cauchy (a. a. O. S. 197) unter der Bedingung $1 > r > -1$ bewiesene Gleichung

$$\frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} = r \sin x + r^2 \sin 2x + r^3 \sin 3x + \ldots$$

zu Grunde legt. Alsdann nämlich hat man unmittelbar die Beziehung

$$\int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \sin mx \, dx = \frac{\pi}{2} r^m,$$

folglich

$$\frac{\pi}{2} r \frac{1 - r^n}{1 - r} = \int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx \left[\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx\right].$$

Nun ist einer früher erwähnten Formel zufolge der innerhalb der Klammer befindliche Ausdruck mit

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} - \frac{\cos (2n + 1) \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

identisch, und daher wird jetzt

$$\frac{\pi}{2} r \frac{1 - r^n}{1 - r} = \tfrac{1}{2} \int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} x \, dx$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin 2x}{1 - 2r \cos 2x + r^2} \frac{\cos (2n + 1) x}{\cos x} \operatorname{cotg} x \, dx.$$

Diese Gleichung aber wird besonders einfach, wenn ma über jede Grenze hinaus wachsen lässt; denn vertauscht zunächst in der bekannten Beziehung

$$\lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \frac{\sin h\vartheta}{\sin \vartheta} d\vartheta = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$\vartheta$ mit $\frac{\pi}{2} - \vartheta$, so kommt — abgesehen vom Vorzeicl

$$\lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\vartheta) \frac{\cos h\vartheta}{\cos \vartheta}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right),$$

und daher muss, weil $f(\vartheta) = \frac{r \sin 2\vartheta}{1 - 2r \cos 2\vartheta + r^2} \operatorname{cotg} \vartheta$ hier in 0 übergeht, die Gleichung bestehen

$$\int_0^{\pi} \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2}\, dx = \frac{r\pi}{1 - r}.$$

Benutzt man dagegen die Formel

$$\sum_1^n (-1)^{s-1} \sin sx = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} \pm \frac{\sin (2n + 1)\frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}}$$

so erhält man

$$\frac{\pi}{2}\, [r - r^2 + r^3 - r^4 + \ldots \pm r^n]$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \operatorname{tang} \frac{x}{2}\, dx$$

$$\pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin 2x}{1 - 2r \cos 2x + r^2} \frac{\sin (2n + 1)x}{\sin x} \operatorname{tang} x\, dx,$$

folglich wegen

$$\lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin 2x}{1 - 2r \cos 2x + r^2} \frac{\sin (2n + 1)x}{\sin x} \operatorname{tang} x\, dx = 0:$$

$$\int_0^{\pi} \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \operatorname{tang} \frac{x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + r}, \quad 1 > r > -1.$$

Noch andere derartige Integralbestimmungen können in Schlömilch's „Beiträgen zur Theorie der bestimmten Integrale" nachgelesen werden.

## §. 96.

### Die Fourier'schen Integrale.

Die Darstellung einer willkürlichen Function $f(x)$ durch die Sinus-Cosinusreihe ist unmittelbar nur für das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ möglich. Soll folglich die Function $f(x)$ zwischen den beliebigen Grenzen $-c$ und $+c$ durch die genannte Reihe repräsentirt werden, so kann dies nur dann geschehen, wenn das Argument $x$ so von einer neuen Veränderlichen $z$ abhängt, dass in Bezug auf diese eine Darstellung der gegebenen Function innerhalb des Intervalles von $-\pi$ bis $+\pi$ erscheint. Wie nun aber auf den ersten Blick erhellt, wird diese Forderung befriedigt, wenn $x = \alpha z$ ist, wo $\alpha$ eine gleich näher zu bestimmende Constante vorstellt. Denn wird $z = \pm\pi$, so muss $x = \pm\alpha\pi$, d. h. $\pm c = \pm\alpha\pi$ und folglich $\alpha = \frac{c}{\pi}$ sein. Mithin entspringt die Gleichung

$$1.\; f\left(\frac{c}{\pi}z\right) = \tfrac{1}{2}b_0 + b_1\cos z + b_2\cos 2z + \ldots + b_m\cos mz + \ldots$$
$$+ a_1\sin z + a_2\sin 2z + \ldots + a_m\sin mz + \ldots,$$

in der die Coefficienten $b_m$, $a_m$ den Bedingungen genügen müssen:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{c}{\pi}z\right)\cos mz\,dz,\quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{c}{\pi}z\right)\sin mz\,dz.$$

Setzen wir aber $\frac{c}{\pi}z = x$, so gehen diese Integrale in die andern über:

$$b_m = \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} f(x)\cos\left(m\frac{\pi}{c}x\right)dx \text{ und } a_m = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\sin\frac{m\pi}{c}x\,dx,$$

und die dem Intervalle $(-c, +c)$ entsprechende Reihe heisst nun so:

$$2.\quad f(x) = \tfrac{1}{2}b_0 + b_1\cos\frac{\pi}{c}x + b_2\cos\frac{2\pi}{c}x + \ldots + b_m\cos m\frac{\pi}{c}x + \ldots$$
$$+ a_1\sin\frac{\pi}{c}x + a_2\sin\frac{2\pi}{c}x + \ldots + a_m\sin\frac{m\pi}{c}x + \ldots$$

Kaum nöthig ist hierbei wohl die Bemerkung, dass vorkommenden Falls die linken Seiten der beiden Gleichungen

1. und 2. den früher erörterten Umständen gemäss zu berichtigen sind.

Behufs weiterer Folgerungen wollen wir der Reihe 2. eine kurze symbolische Form jetzt geben. Schreiben wir nämlich die Reihe in der Gestalt

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{c}\sum_{1}^{\infty}\int_{-c}^{c} f(\lambda)d\lambda\left[\cos s\frac{\pi}{c}x\cos s\frac{\pi}{c}\lambda + \sin s\frac{\pi}{c}x\sin s\frac{\pi}{c}\lambda\right]$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2c}\sum_{1}^{\infty} 2\int_{-c}^{c} f(\lambda)\,d\lambda\,\cos s\frac{\pi}{c}(\lambda - x),$$

so folgt mit Beachtung des Umstandes

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{-c}^{+c} f(\lambda)\,d\lambda\,\cos\frac{s\pi}{c}(\lambda - x) = \sum_{-\infty}^{-1}\int_{-c}^{+c} f(\lambda)\,d\lambda\,\cos\frac{s\pi}{c}(\lambda - x),$$

dass wir dieselbe auch in folgender Weise ausdrücken können:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{c}\int_{-c}^{c} f(\lambda)\cos s\frac{\pi}{c}(\lambda - x)\,d\lambda, \quad -c < x < +c$$

Daraus fliesst nun sofort, dass, wenn $c$ über jede Grenze hinaus wächst, $\frac{\pi}{c}$ eine unendlich kleine Grösse bezeichnen muss und dass $\frac{s\pi}{c}$ eine Grösse vorstellt, die in unendlich kleinen Intervallen fortschreitet. Nennen wir mithin $\frac{s\pi}{c}$ $\alpha$, so werden wir dem Geiste der Infinitesimalrechnung gemäss $\frac{\pi}{c}$ durch $d\alpha$ andeuten und das Summenzeichen durch das Symbol der Integration ersetzen müssen. Besitzt also für $c = \infty$ das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\cos\alpha(\lambda - x)\,dx$ einen Sinn, so führt diese Betrachtung auf die Darstellung einer beliebigen Function $f(x)$ durch das Doppelintegral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, f(\lambda)\cos\alpha(\lambda - x),$$

wobei natürlich ganz dieselben Bemerkungen gelten, welche früher bei den Fourier'schen Reihen gemacht wurden.

Auch dies darf gewissermassen als selbstverständlich angesehen werden, dass die Befolgung desselben Gedankenganges bei den bloss nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen von $x$ fortschreitenden Reihen zu den Gleichungen

$$1^a. \quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \cos\alpha x \cos\alpha\lambda\, f(\lambda)\, d\lambda, \quad 0 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} \infty$$

und

$$1^b. \quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \sin\alpha x \int_0^\infty f(\lambda) \sin\alpha\lambda\, d\lambda, \quad 0 < x < \infty$$

führen wird. Doch ist ihre Herleitung bei weitem einfacher, wenn man die Gleichung

$$\text{I.} \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty f(\lambda) \cos\alpha(\lambda - x)\, d\lambda$$

zuvor in die Form bringt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d\alpha \left[\cos\alpha x \int_{-\infty}^\infty d\lambda f(\lambda) \cos\alpha\lambda + \sin\alpha x \int_{-\infty}^\infty d\lambda f(\lambda) \sin\alpha\lambda\right],$$

alsdann bloss für positive $x$ die Function $f(x)$ willkürlich sich gegeben denkt, auf der Seite der negativen $x$ aber den beiden Gleichungen $f(x) = f(-x)$ und $f(x) = -f(-x)$ gemäss fortsetzt und schliesslich eine Zerlegung der Integrale in andere zwischen den Grenzen $-\infty$ und 0, 0 und $+\infty$ vornimmt.

Die vorhergehenden Doppelintegrale, welche durch ihre ausserordentliche Fruchtbarkeit in der Theorie der bestimmten Integrale sowohl, als auch in andern Gebieten der Mathematik sich auszeichnen, nennt man ihrem Entdecker zu Ehren die Fourier'schen Integrale*). Sie lassen sich als speciel[illegible]

*) Historisch zu bemerken ist hierbei, dass Fourier die Gleichung in einer andern Form dargestellt hat, nämlich in dieser:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty d\lambda\, f(\lambda) \cos\alpha(\lambda - x).$$

Sie findet sich leicht, wenn man die Sinus-Cosinusreihe 2. von $s = 0$

Fälle einer ganzen Klasse von Integralen auffassen*), von denen wir indess bloss die nächstliegende Verallgemeinerung der Gleichung I. hier berühren.

Bezeichne nämlich $a$ eine positive Constante grösser als 0 und kleiner als $c$, und sei die Function $f(x)$ von $x = -c$ bis $x = -a$ und ebenso von $x = +a$ bis $x = +c$ der Null gleich, von $-a$ bis $+a$ hingegen stelle sie die beliebige Function $f_1(x)$ vor. Dadurch nimmt offenbar die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2c}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-c}^{c} f(\lambda) \cos s\frac{\pi}{c}(\lambda - x)\, d\lambda$$

folgende Gestalt an

$$f_1(x) = \frac{1}{2c}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a} f_1(\lambda) \cos s\frac{\pi}{c}(\lambda - x)\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{c}\int_{-a}^{a} f_1(\lambda) \cos s\frac{\pi}{c}(\lambda - x)\, d\lambda,$$

indem durch Zerlegung des Integrales $\int_{-c}^{c} f(\lambda) \cos s\frac{\pi}{c}(\lambda - x)\, d\lambda$ in drei andere zwischen den Grenzen $(-c, -a)$, $(-a, +a)$, $(a, c)$ das erste und letzte derselben verschwinden, das mittlere aber gleich $\int_{-a}^{a} f_1(\lambda) \cos s\frac{\pi}{c}(\lambda - x)\, d\lambda$ wird. Lässt man nun das beliebige $c$ unendlich gross werden, so wird

$$3. \qquad f_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-a}^{a} f_1(\lambda) \cos \alpha(\lambda - x)\, d\lambda,$$

und diese Gleichung existirt immer, weil — wie stillschweigend

---

$s = \infty$ nimmt und das Integral $-\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda$ vernachlässigt, was wegen $c = \infty$ geschehen darf. Fourier. Théorie analytique de la chaleur.

*) Siehe: Paul du Bois-Reymond. Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Klasse von Doppelintegralen, zu welcher das Fourier'sche Doppelintegral gehört. Borchardt's Journal. Bd. 69, S. 65 ff.

vorausgesetzt wurde — $f_1(x)$ zwischen — $a$ und $+a$ niema unendlich wird.

Ebenso selbstverständlich darf die Bemerkung gelten, das an den Stellen, wo eine endliche Discontinuität von $f_1(x$ eintritt, links statt $f_1(x)$ das arithmetische Mittel aus den doi Statt findenden Werthen zu nehmen ist. Uebrigens wird a den Grenzen $\pm a$ selbst die Stetigkeit von $f_1(x)$ als nich unterbrochen anzusehen sein, weil der Voraussetzung zufolg $f(x)$ in $-a$ und $+a$ schon zweiwerthig ist.

Da in Gleichung 3. das positive $a$ nur kleiner als da positive $c$ sein soll, sonst aber ganz beliebig ist, so kann e auch über jede Grenze hinaus wachsen. In diesem Falle abe

wird, falls das Integral $\int_{-a}^{a} f_1(\lambda) \cos s\frac{\pi}{c}(\lambda - x)\,d\lambda$ nicht sinn los ist für $a = \infty$, die frühere Fourier'sche Formel erscheinen

Dass man den Gleichungen $I^a$. und $I^b$. analog hier eben falls speciellere Integralformen aufstellen kann, bedarf keine Beweises.

## §. 97.

### Anwendung der Fourier'schen Integrale.

1. Bei den Gammafunctionen haben wir das wicht Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ kennen gelernt und gesehen, dass es Werth $\sqrt{\pi}$ besitzt. Mit mehr Aufwand von Rechnung frei als dies früher der Fall war, können wir zu demselben R tat gelangen, wenn wir in Gleichung $I^a$. $f(x)$ mit der E nentialgrösse $e^{-kx^2}$ identificiren, in der die Constante $k$ s verständlich positiv sein muss, und $\cos \alpha\lambda$ durch die äquivalente Reihe ersetzen; allein eine derartige Entwic ist mit dem andern Vortheile verknüpft, dass sie gleicl die Kenntniss des Integrales $\int_0^{\infty} e^{-kx^2} \cos \alpha x\,dx$ uns ver

Nehmen wir also die Gleichung

$$(1.)\qquad e^{-kx^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \cos \alpha x \int_0^{\infty} d\lambda\, e^{-k\lambda^2} \cos \alpha \lambda$$

und erinnern wir uns, dass $\cos \alpha\lambda = \sum_0^\infty \frac{(-\alpha^2\lambda^2)^n}{2n!}$ ist, wo unter 0! — wie üblich — die Zahl 1 verstanden wird; so geht das zweite der vorkommenden Integrale, d. h. $\int_0^\infty e^{-k\lambda^2} \cos \alpha\lambda\, d\lambda$ über in:

$$\int_0^\infty e^{-k\lambda^2} \sum_0^\infty \frac{(-\alpha^2\lambda^2)^n}{2n!} d\lambda = \sum_0^\infty \frac{(-\alpha^2)^n}{2n!} \int_0^\infty e^{-k\lambda^2} \lambda^{2n} d\lambda.$$

Nun sei vorläufig $k = 1$; alsdann folgt durch theilweise Integration und nachherige Reduction

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2} \lambda^{2(n+1)} d\lambda = \frac{2n+1}{2} \int_0^\infty e^{-\lambda^2} \lambda^{2n} d\lambda.$$

Und daher ist, wenn man allmählich $n = n-1$, $n-2, \ldots 0$ schreibt und sämmtliche Resultate combinirt,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2} \lambda^{2n} d\lambda = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 3 \cdot 1}{2^n} \int_0^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Eine etwas andere Form aber können wir diesem Integrale geben, sofern wir Zähler und Nenner des Bruches rechts durch $(2n)(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \cdot 2 = 2^n \cdot n!$ multipliciren. So nämlich erhalten wir die Relation

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2} \lambda^{2n} d\lambda = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \int_0^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

in welcher das auf der rechten Seite befindliche, gegenwärtig als völlig unbekannt angesehene Integral offenbar eine numerische Constante ausdrückt. Nennen wir dieselbe vorläufig $c$, und substituiren wir in die letzte Gleichung statt $\lambda$ die Grösse $\lambda\sqrt{k}$, so entspringt nach einigen leichten Reductionen die neue Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-k\lambda^2} \lambda^{2n} d\lambda = \frac{c}{(4k)^n \sqrt{k}} \frac{2n!}{n!}.$$

Und demnach wird jetzt

$$\int_0^\infty e^{-k\lambda^2}\cos\alpha\lambda\,d\lambda = \sum_0^\infty \frac{(-\alpha^2)^n}{2n!}\cdot\frac{c}{(4k)^n\sqrt{k}}\,\frac{2n!}{n!} = \frac{c}{\sqrt{k}}\sum_0^\infty\left[\frac{-\alpha^2}{4k}\right]^n\cdot\frac{1}{n!},$$

d. g. mit Benutzung der Gleichung $e^{-x} = \sum_0^\infty \frac{(-x)^n}{n!}$

$$(2.)\qquad \int_0^\infty e^{-k\lambda^2}\cos\alpha\lambda\,d\lambda = \frac{c}{\sqrt{k}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4k}}.$$

Indem wir aber diesen Ausdruck in (1.) einführen, bekommen wir die Formel

$$e^{-kx^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\cos\alpha x\,.\,\frac{c}{\sqrt{k}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4k}} = \frac{2}{\pi}\,\frac{c}{\sqrt{k}}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{4k}}\cos\alpha x\,d\alpha,$$

aus welcher wieder mit Rücksicht auf Gleichung (2.) die neue Beziehung erwächst

$$e^{-kx^2} = \frac{2}{\pi}\,\frac{c}{\sqrt{k}}\,\frac{c}{\sqrt{\frac{1}{4k}}}\,e^{-\frac{x^2}{4\cdot\frac{1}{4k}}} = \frac{4}{\pi}\,e^{-kx^2}c^2.$$

Und hieraus entsteht endlich, weil $c$ nur positiv sein kann,

$$(3.)\qquad c = \int_0^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

folglich

$$(2^a.)\qquad \int_0^\infty e^{-kx^2}\cos 2\alpha x\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{k}}.$$

Ein Blick auf die letzte Gleichung aber zeigt noch, dass man aus ihr durch Differentiation die Werthe der beiden Integrale

$$\int_0^\infty x^{2n}\cos 2\alpha x\,e^{-kx^2}\,dx,\quad \int_0^\infty e^{-kx^2}\,x^{2n+1}\sin 2\alpha x\,dx$$

wird ableiten können.

Der vorhin befolgte Gedankengang ist darum vor allem bemerkenswerth, weil er lehrt, wie die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Integrale (2ᵃ.) und (3.) zu ihrer völligen Bestimmung benutzt werden kann. Wäre es bloss unsere Ansicht gewesen zu zeigen, wie mit der Kenntniss des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ die des andern gegeben ist, so hätten wir

dies viel einfacher in folgender Weise erreicht. Substituirt man nämlich in dem Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ statt $x$ den Ausdruck $\sqrt{k}\,.\,x+\beta$, wo $k>0$ und $\beta$ Constanten ausdrücken, so kommt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2-2\sqrt{k}.\beta x}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\,e^{\beta^2},$$

also für ein imaginäres $\beta$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}\cos(2\sqrt{k}.\beta x)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\,e^{-\beta^2},$$

woraus endlich durch Vertauschung von $2\beta\sqrt{k}$ mit $2\alpha$ die obige Formel entspringt.*)

2. Wenn wir statt der Exponentialgrösse $e^{-kx^2}$ die andere $e^{-kx}$ für $f(x)$ wählen und nun die Gleichungen I$^a$. und I$^b$. in Anwendung bringen, so bekommen wir die schon früher untersuchten Laplace'schen Integrale

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos 2\alpha x}{k^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2k}e^{-2k\alpha},\ 0\overline{<}\alpha<\infty \text{ und } \int_0^{\infty}\frac{x\sin 2\alpha x dx}{k^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-2k\alpha},\ 0<\alpha<\infty.$$

In der That hat man bei der Ableitung nur der Beziehungen

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}\cos\vartheta x\,dx=\frac{k}{k^2+\vartheta^2},\quad \int_0^{\infty} e^{-kx}\sin\vartheta x\,dx=\frac{\vartheta}{k^2+\vartheta^2}$$

sich zu erinnern. Man beweist dieselben entweder durch zweimalige partielle Integration, oder am einfachsten mittelst des Ueberganges vom Imaginären zum Reellen, indem man sich hierbei auf die bekannte Euler'sche, übrigens aber auch unmittelbar einleuchtende Gleichung

$$\int_0^{\infty} e^{-(k+\vartheta i)x}\,dx=\frac{1}{k+\vartheta i}$$

stützt.*)

Ausser den früher erwähnten geben die Laplace'schen

*) Vergl. Laplace. Théorie analytique des probabilités. 3. Édition. Paris 1820. Page 96.

*) Vergl. §. 64, 70.

Integrale noch zu andern Folgerungen Veranlassung, worüber wieder Schlömilch's „Beiträge zur Theorie der bestimmten Integrale“ einzusehen sind.

3. Sei jetzt $f(x) = \int_a^b \varphi(v)\, e^{-vx}\, dv$, so entspringen die beiden Gleichungen

$$(1.)\quad \int_a^b \varphi(v) e^{-vx}\, dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \alpha x d\alpha \int_0^\infty d\lambda \cos \alpha\lambda \int_a^b \varphi(v) e^{-\lambda v} dv,$$

$$(2.)\quad \int_a^b \varphi(v) e^{-xv}\, dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \alpha x d\alpha \int_0^\infty \sin \alpha\lambda\, d\lambda \int_a^b \varphi(v)\, e^{-\lambda v} dv,$$

die man augenscheinlich wie folgt schreiben kann:

$$(1^a.)\quad \int_a^b \varphi(v)\, e^{-xv}\, dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\, \alpha x\, d\alpha \int_a^b \varphi(v)\, \frac{v}{v^2+\alpha^2}\, dv,$$

$$(2^a.)\quad \int_a^b \varphi(v)\, e^{-xv}\, dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\, \alpha x\, d\alpha \int_a^b \varphi(v) \frac{\alpha}{v^2+\alpha^2}\, dv.*)$$

Bei nur oberflächlichem Anblick könnten diese Beziehungen gar leicht den Gedanken einer unnützen Formelschreiberei erwecken; doch ist dies keineswegs der Fall. Vielmehr deuten uns diese Gleichungen ein von Cauchy**) herrührendes Integrationsverfahren an, das, wie wir in dem folgenden Kapitel sehen werden, von der grössten Bedeutung für die Theorie der bestimmten Integrale ist und dessen Wesen sich kurz in nachstehender Weise charakterisiren lässt.

Bislang nämlich haben wir den bekannten Lehrsatz von der Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen nur in der Art zur Anwendung gebracht, dass wir aus einem gefundenen Integrale durch Multiplication mit diesem oder jenem Factor und mittelst darauf folgender Integration zwischen bestimmten Grenzen ein neues Integral zu entwickeln suchten. Offenbar können wir nun aber auch den andern Gedanken verfolgen, dass irgend ein gegebenes, bekanntes oder unbekanntes Integral vielleicht das Resultat einer doppel-

*) Vergl. Dienger. Differential- und Integralrechnung. Thl. 2. S. [illegible].

**) Journal de l'école polytech. 28, vergl. Bierens de Haan Exposé de la théorie des propriétés etc. des intégrales définies, page 438.

ten Integration sein könne, indem ein in jenem Integrale vorkommender Factor hier ein bestimmtes Integral mit constanten Grenzen vorstellen würde und dass folglich durch Umkehrung der letzten Integrationsordnung möglicherweise eine Auswerthung des vorgelegten oder eines neuen Integrales gewonnen werden könne. Und in der That, ersetzt man — immer den Bedingungen des Lehrsatzes entsprechend — in einem noch unbekannten Integrale z. B. auf passende Weise einen darin enthaltenen Factor durch ein bestimmtes Integral und kehrt nun in dem so gebildeten Doppelintegrale die Ordnung der Integration um; so gewinnt man eine von der ersten verschiedene Form, die wirklich in nicht wenig Fällen zur Bestimmung des gegebenen Integrales führt. Nöthig ist es alsdann freilich, dass sowohl die erste, als zweite Integration auf bekannte Ausdrücke zurückführen. Ist dagegen nur die erste Integration ausführbar, so erhält man natürlich bloss eine neue Form des ursprünglichen Integrales, die nichtsdestoweniger grosse Vorzüge bieten kann.

Beispielsweise lässt sich in dem obigen Integrale der Factor $e^{-xv}$ nicht nur mit $\frac{2v}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos x\alpha\, d\alpha}{v^2+\alpha^2}$, sondern auch mit $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha \sin\alpha x\, d\alpha}{v^2+\alpha^2}$ als gleichbedeutend ansehen, und sonach gelten die Gleichungen

$$\int_a^b \varphi(v) e^{-xv} dv = \frac{2}{\pi}\int_a^b dv\,\varphi(v)\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{v^2+\alpha^2} d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x d\alpha \int_a^b \varphi(v) \frac{v}{v^2+\alpha^2} dv,$$

$$\int_a^b \varphi(v) e^{-xv} dv = \frac{2}{\pi}\int_a^b dv\,\varphi(v)\int_0^\infty \frac{\alpha\sin\alpha x}{v^2+\alpha^2} d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \sin\alpha x \int_a^b \frac{\alpha\,\varphi(v)}{v^2+\alpha^2} dv.$$

Nehmen wir in der ersten $x = 0$, so kommt

$$\int_a^b \varphi(v)\, dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_a^b \varphi(v) \frac{v}{v^2+\alpha^2} dv.$$

Setzt man aber hier $\int_a^b \varphi(v)\, dv$ als bekannt, z. B. $= \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\pi}{2}$ voraus, so gewinnt man die Gleichung

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_0^1 \frac{v\,dv}{(v^2+\alpha^2)\sqrt{1-v^2}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{v\,dv}{(v^2+\alpha^2)\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}} \lg \frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{1-v^2}} + \text{const.},$$

also

$$\int_0^1 \frac{v\,dv}{(v^2+\alpha^2)\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}} \lg \frac{\sqrt{1+\alpha^2}+1}{\sqrt{1+\alpha^2}-1},$$

und daher wird jetzt

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \lg \frac{\sqrt{1+\alpha^2}+1}{\sqrt{1+\alpha^2}-1} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Schreibt man noch $\alpha = \operatorname{tang} x$, so entspringen die gefälligen Formen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi^2}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \cdot \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

## V. Kapitel.

### Verschiedene andere Integralbestimmungen.

#### 1. Anwendung der Cauchy'schen Integrationsmethod

#### §. 98.

#### Das Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-kx^2}\cos 2\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx$.

Verwandt mit den Integralen

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-kx^2}\cos 2\beta x\,dx$$

ist offenbar das folgende $\int_0^\infty \frac{e^{-kx^2}\cos 2\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx$, in welchem

sichtlich wieder $k > 0$ sein muss.*) Zwar lässt dieses Integral keine Zurückführung desselben auf Elementarfunctionen zu, gleichwohl kann in der Weise eine bedeutende Vereinfachung erzielt werden, dass die drei Parameter $k$, $\alpha$, $\beta$ unter dem Integralzeichen verschwinden und statt dessen die Bildung der Grenze $\mu$ in der zum Vorschein kommenden Transscendenten $\int_\mu^\infty e^{-t^2}\, dt$ bewirken. Am einfachsten geschieht diese Reduction des gegebenen Integrales auf die genannte Transscendente mittelst der im Vorigen berührten Integrationsmethode. Und ganz besonders elegant wird die hierzu dienende Rechnung, wenn man nicht von der nahe liegenden Substitution

$$\frac{1}{\alpha^2+x^2} = \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+x^2)u}\, du$$

ausgeht,**) sondern mit Dirichlet die andere Gleichung

$$\frac{k}{k^2+x^2} = \int_0^\infty e^{-kz} \cos xz\, dz$$

der Untersuchung zu Grunde legt. Ersetzt man nämlich in dem Integrale

$$y = \int_0^\infty \frac{e^{-kx^2} \cos 2\beta x\, dx}{\alpha^2+x^2}$$

die Grösse $\frac{1}{\alpha^2+x^2}$ durch den gleichgeltenden Ausdruck

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha z} \cos xz\, dz,$$

wo nothwendig $\alpha > 0$ sein muss: so ergiebt sich sogleich

$$y = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha z}\, dz \int_0^\infty e^{-kx^2} \cos xz \cos 2\beta x\, dx$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha z}\, dz \int_0^\infty e^{-kx^2} dx \left[\cos(z+2\beta)x + \cos(z-2\beta)x\right],$$

*) Den besondern Fall $k = 0$ haben wir ja schon erörtert.

**) Vergl. Schlömilch in seiner Zeitschrift für Math. u. Physik. Bd. 1, S. 186—188.

d. h. in symbolischer Form

$$y = \frac{1}{2\alpha} \sum \int_0^\infty e^{-\alpha z}\, dz \int_0^\infty e^{-kx^2} \cos(z \pm 2\beta)\, x\, dx.$$

Aber

$$\int_0^\infty e^{-kx^2} \cos(z \pm 2\beta) x\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\frac{(z \pm 2\beta)^2}{4k}},$$

folglich

$$y = \frac{1}{2\alpha} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \sum \int_0^\infty e^{-\alpha z - \left(\frac{z}{2\sqrt{k}} \pm \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right)^2} dz.$$

Ergänzt man jetzt $\alpha z + \left(\frac{z}{2\sqrt{k}} \pm \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right)^2$ zu einem volls digen Quadrate $\left(\frac{z}{2\sqrt{k}} + \alpha\sqrt{k} \pm \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right)^2$ und zieht hier $[\alpha^2 k \pm 2\alpha\beta]$ wieder ab, so bekommt man die an Beziehung

$$y = \frac{1}{2\alpha} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{\alpha^2 k} \sum e^{\pm 2\alpha\beta} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{z}{2\sqrt{k}} + \alpha\sqrt{k} \pm \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right)^2} d z$$

Hieraus aber ersieht man auf den ersten Blick, dass di Einführung des Werthes $x$ statt $\frac{z}{2\sqrt{k}} + \alpha\sqrt{k} \pm \frac{\beta}{\sqrt{k}}$ u Integral die Gestalt annimmt:

$$y = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\, e^{k\alpha^2} \sum e^{\pm 2\alpha\beta} \int_{\alpha\sqrt{k} \pm \frac{\beta}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

d. h. in anderer Schreibweise:

1. $$\int_0^\infty \frac{e^{-kx^2} \cos 2\beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\left[e^{k\alpha^2 + 2\alpha\beta} \int_{\alpha\sqrt{k} + \frac{\beta}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-x^2}\, dx + e^{k\alpha^2 - 2\alpha\beta} \int_{\alpha\sqrt{k} - \frac{\beta}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-x^2}\, dx\right].$$

Differentiirt man diese Gleichung nach $\beta$, so ergi sich noch

$$2. \int_0^\infty \frac{x\, e^{-kx^2} \sin 2\beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}\, e^{k\alpha^2} \sum \pm e^{\mp 2\alpha\beta} \int_{\alpha\sqrt{k} \mp \frac{\beta}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-x^2}\, dx;$$

denn

$$\frac{d}{d\beta} \sum e^{\pm 2\alpha\beta} \int_{\alpha\sqrt{k} \pm \frac{\beta}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sum (\pm 2\alpha)\, e^{\pm 2\alpha\beta} \int_{\alpha\sqrt{k} \pm \frac{\beta}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-x^2}\, dx$$

$$- \sum e^{\pm 2\alpha\beta}\, e^{-\left(\alpha\sqrt{k} \pm \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right)^2} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

und

$$\sum e^{\pm 2\alpha\beta}\, e^{-\left(\alpha\sqrt{k} \pm \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right)^2} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 0.$$

Wie man sieht, sind die Laplace'schen Integrale specielle Fälle der vorstehenden; denn einem früher bewiesenen Satze zufolge darf in diesen Gleichungen $k$ wirklich mit Null identificirt werden. Und setzt man auch $\beta = 0$, so folgt die bekannte Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha};$$

dagegen erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx^2}\, dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\, e^{k\alpha^2} \int_{\alpha\sqrt{k}}^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

wenn bloss $\beta = 0$ gewählt wird.

In Betreff der für die Theorie der Wärme, der atmosphärischen Refraction u. s. w. wichtigen Transscendenten $\int_\mu^\infty e^{-x^2}\, dx$ endlich mögen noch folgende Bemerkungen eine Stelle hier finden.

Zerlegt man das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ in die beiden andern

$$\int_0^\mu e^{-x^2}\, dx \text{ und } \int_\mu^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

so hat man sofort die Gleichung

$$\int_{\mu}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_{0}^{\mu} e^{-x^2}\,dx.$$

Dabei kann $\mu$ positiv oder negativ sein; indess darf $\mu$ stets als positive Grösse betrachtet werden, weil für ein negatives $\mu' = -\mu$ offenbar

$$\int_{0}^{-\mu} e^{-x^2}\,dx = -\int_{0}^{\mu} e^{-x^2}\,dx$$

und sonach

$$\int_{\pm\mu}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \mp \int_{0}^{\mu} e^{-x^2}\,dx$$

ist.

## §. 99.

### Integrale von der Form $\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{x}} f(x)\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Wird in dem Laplace'schen Integrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos p\,x}{q^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2q}\,e^{-pq},\ p>0,\ q>0$$

die Grösse $\frac{1}{q^2+x^2}$ durch das Integral $\int_{0}^{\infty} e^{-(q^2+x^2)y}\,dy$ ausgedrückt, so entsteht die Gleichung

$$\frac{\pi}{2q}\,e^{-pq} = \int_{0}^{\infty} dx \cos p x \int_{0}^{\infty} e^{-(q^2+x^2)y}\,dy = \int_{0}^{\infty} e^{-q^2 y}\,dy \int_{0}^{\infty} e^{-yx^2} \cos px\,dx.$$

Nun ist aber

$$\int_{0}^{\infty} e^{-yx^2} \cos p x\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,e^{-\frac{p^2}{4y}},$$

und folglich wird

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\left(q^2 y + \frac{p^2}{4y}\right)}\,\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{q}\,e^{-pq}$$

oder

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\left(q^2 x^2 + \frac{p^2}{x^2}\right)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2q}\,e^{-2pq}.$$

Dieses Integral bildet einen besondern Fall des folgenden

$$\int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{4y}} f(y) \frac{dy}{\sqrt{y}},$$

das seinerseits wieder in dem allgemeinern Integrale

$$\int_a^b \frac{e^{-\frac{p^2}{x}} f(x)\, dx}{\sqrt{x}}$$

enthalten ist. Behandelt man dasselbe ebenfalls nach der Cauchy'schen Integrationsmethode, schreibt man nämlich

$$\frac{e^{-\frac{p^2}{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-xy^2} \cos 2py\, dy,$$

so bekommt man das Theorem

$$\text{I.} \quad \int_a^b e^{-\frac{p^2}{x}} f(x) \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \cos 2\, py \int_a^b e^{-y^2 x} f(x)\, dx.$$

Aus demselben fliessen ohne Schwierigkeit die nachstehenden Integrale, in denen $f(x)$ nach und nach $= x\, e^{-q^2 x}$, $e^{-q^2 x} \sin rx$, $e^{-q^2 x} \cos rx$ und $a = 0$, $b = \infty$ gewählt ist:

$$2. \quad \int_0^\infty e^{-\left(q^2 x + \frac{p^2}{x}\right)} \sqrt{x}\, dx = \frac{1+2pq}{2p^3} e^{-2pq} \sqrt{\pi},$$

$$3. \int_0^\infty e^{-\left(q^2 x + \frac{p^2}{x}\right)} \frac{\sin rx}{\sqrt{x}} dx = e^{-2p\lambda} [\mu \cos 2p\mu + \lambda \sin 2p\mu] \sqrt{\frac{\pi}{q^4 + r^2}},$$

$$4. \int_0^\infty e^{-\left(q^2 x + \frac{p^2}{x}\right)} \frac{\cos rx}{\sqrt{x}} dx = e^{-2p\lambda} [\lambda \cos 2p\mu - \mu \sin 2p\mu] \sqrt{\frac{\pi}{q^4 + r^2}}.$$

Man hat bei diesen Integralbestimmungen nur der Euler'schen Gleichungen

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \begin{cases} \sin \vartheta x \\ \cos \vartheta x \end{cases} \cdot dx = \frac{\Gamma(a)}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}} \begin{cases} \sin a \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\vartheta}{k} = \psi\right) \\ \cos a\, \psi \end{cases}$$

sich zu erinnern, ausserdem aber bei der zweiten Formel die früher bewiesene Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2px\,dx}{(q^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{1\,.\,2^2}\,e^{-2pq}\left[\frac{2p}{q^2}+\frac{1}{q^3}\right]$$

in Betracht zu ziehen und bei den Gleichungen 3. und 4. die erst später (§. 106.) zu rechtfertigenden Relationen

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2px}{(q^2+x^2)^2+r^2}dx = \frac{\pi}{2r}\frac{e^{-2p\left[\sqrt{\frac{\sqrt{q^4+r^2}+q^2}{2}}=\lambda\right]}}{\sqrt{q^4+r^2}}\left[\mu\cos 2p\mu+\lambda\sin 2p\mu\right],$$

$$\left\{\lambda=\sqrt{\frac{\sqrt{q^4+r^2}+q^2}{2}},\ \mu=\sqrt{\frac{\sqrt{q^4+r^2}-q^2}{2}}\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2+q^2}{(x^2+q^2)^2+r^2}\cos 2px\,dx = \frac{\pi\,e^{-2p\lambda}}{2\sqrt{q^4+r^2}}\left[\lambda\cos 2p\mu-\mu\sin 2p\mu\right]$$

zu berücksichtigen.

Führt man in die Gleichungen 3. und 4. statt $x$ die neue Veränderliche $x^2$ ein, so entspringen die Formen:

$$\int_0^\infty e^{-\left(q^2x^2+\frac{p^2}{x^2}\right)}\sin(rx^2)dx=\tfrac{1}{2}e^{-2p\lambda}\left[\mu\cos 2p\mu+\lambda\sin 2p\mu\right]\sqrt{\frac{\pi}{q^4+r^2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-\left(q^2x^2+\frac{p^2}{x^2}\right)}\cos(rx^2)dx=\tfrac{1}{2}e^{-2p\lambda}\left[\lambda\cos 2p\mu-\mu\sin 2p\mu\right]\sqrt{\frac{\pi}{q^4+r^2}},$$

aus denen wieder für $q=0$, $p=0$ die specielleren Beziehungen entstehen:

$$5.\ \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{x^2}}\sin(rx^2)\,dx=\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\,e^{-p\sqrt{2r}}\left[\cos p\sqrt{2r}+\sin p\sqrt{2r}\right],$$

$$6.\ \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{x^2}}\cos(rx^2)\,dx=\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\,e^{-p\sqrt{2r}}\left[\cos p\sqrt{2r}-\sin p\sqrt{2r}\right]$$

$$7.\ \int_0^\infty e^{-q^2x^2}\sin(rx^2)\,dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi(\sqrt{q^4+r^2}-q^2)}{q^4+r^2}},$$

$$8.\ \int_0^\infty e^{-q^2x^2}\cos(rx^2)\,dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi(\sqrt{q^4+r^2}+q^2)}{q^4+r^2}}.$$

Noch eine andere, für das Nächstfolgende sehr wichtige

Gleichung liefert uns das Theorem I., wenn wir $f(x) = x^{\mu} e^{-q^2 x}$ und ebenfalls wieder $a = 0$, $b = \infty$ voraussetzen. So nämlich erhalten wir die Relation

$$\int_0^\infty e^{-\left(q^2 x + \frac{p^2}{x}\right)} x^{\mu - \frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \cos 2py \int_0^\infty e^{-(y^2+q^2)x} x^{\mu} dx^{*)},$$

aus welcher mit Beachtung der bekannten Formel

$$\frac{\Gamma(a)}{k^a} = \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\, dx$$

sofort die andere sich ergiebt:

$$9. \qquad \int_0^\infty e^{-\left(q^2 x + \frac{p^2}{x}\right)} x^{\mu - \frac{1}{2}}\, dx = \frac{2\,\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos 2py\, dy}{(q^2+y^2)^{\mu+1}}.$$

Diese Gleichung aber lässt sich in der Form

$$10. \qquad \int_0^\infty e^{-\left(q^2 x + \frac{p^2}{x}\right)} x^{n - \frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} e^{-2pq} \left[\frac{(2p)^n}{q^{n+1}} + \frac{(n+1)n}{2} \frac{(2p)^{n-1}}{q^{n+2}} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\,.\,4} \frac{(2p)^{n-2}}{q^{n+3}} + \ldots\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{q} \left(\frac{p}{q}\right)^n e^{-2pq} \left[1 + \frac{(n+1)n}{2} \frac{1}{2pq} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2\,.\,4} \left(\frac{1}{2pq}\right)^2 + \ldots\right]$$

schreiben, wenn wir unter $\mu$ die ganze Zahl $n$ verstehen.

Setzen wir noch $q = \sqrt{\alpha \vartheta}$, $p = \sqrt{\gamma \vartheta}$ und der Kürze halber die Coefficienten in der Klammer rechts beziehungsweise $= a_1, a_2, \ldots$, wo also

$$a_m = \frac{(n+m)(n+m-1)\ldots[n-(m-1)]}{2\,.\,4\,.\,6 \ldots 2m};$$

so entspringt unmittelbar die folgende Beziehung:

$$10^a. \qquad \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{n}{2}} \vartheta^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\left(\alpha x + \frac{\gamma}{x}\right)\vartheta} x^{n-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[1 + a_1 \frac{\vartheta^{-1}}{2\sqrt{\alpha\gamma}} + a_2 \frac{\vartheta^{-2}}{(2\sqrt{\alpha\gamma})^2} + \ldots\right] e^{-2\sqrt{\alpha\gamma}\,.\,\vartheta}$$

---

*) Man sieht hieraus, dass für den Fall eines negativen $\mu$ $1+\mu > 0$ sein muss.

## §. 100.

### 2. Beweis eines allgemeinen Theoremes von den Gammafunctionen.*)

Die vorhin gefundene Gleichung 10'. ist für uns desshalb von besonderm Interesse, weil sie uns als Basis für die Ableitung eines allgemeinen, die Gammafunctionen betreffenden Theoremes dienen wird. Multipliciren wir nämlich die genannte Formel mit $\vartheta^{\mu-1}\, e^{-\beta\vartheta}\, d\vartheta$, wo $\mu$ und $\beta$ beide positiv sind, und integriren wir darauf zwischen den Grenzen 0 und $\infty$; so geben zuvörderst die Glieder der rechten Seite Ausdrücke von der Form

$$a_n \frac{1}{(2\sqrt{\alpha\gamma})^n} \int_0^\infty \vartheta^{\mu-n-1}\, e^{-(2\sqrt{\alpha\gamma}+\beta)\vartheta}\, d\vartheta = a_n \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\right)^n \frac{\Gamma(\mu-n)}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{\mu-n}},$$

wo $\mu$ natürlich stets grösser, als $n$ sein muss.

Das Doppelintegral

$$\int_0^\infty e^{-\beta\vartheta}\, \vartheta^{\mu+\frac{1}{2}-1}\, d\vartheta \int_0^\infty e^{-\left(\alpha x+\frac{\gamma}{x}\right)\vartheta}\, x^{n-\frac{1}{2}}\, dx$$

hingegen lässt sich durch Umkehrung der Integrationsordnung sogleich in das einfache $\Gamma(\mu+\frac{1}{2}) \int_0^\infty \frac{x^{\mu+n}\, dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{[illegible]+}}$ verwandeln. Und daher besteht nunmehr die Gleichung

$$\frac{\sqrt{\alpha}\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty \frac{x^{\mu+n}\, dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{\mu+\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\mu)}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^\mu}$$

$$+ a_1 \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}} \frac{\Gamma(\mu-1)}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{\mu-1}} + \ldots + a_n \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\right)^n \frac{\Gamma(\mu-n)}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{\mu-n}}.$$

Wird darin $\alpha = \gamma = 1$ und $\beta = 0$ genommen, so kommt

$$\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{\mu+n}\, dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\mu)}{2^\mu} + \frac{(n+1)n}{2} \frac{\Gamma(\mu-1)}{2^\mu} + \ldots$$

---

*) Vergl. Schlömilch. Beiträge zur Theorie der bestt. Integr. S. 88—91.

A. Meyer. Exposé élémentaire de la théorie des intégrales défin. Bruxelles et Leipzig 1851. Page 323.

Das Integral aber stellt ein Euler'sches der ersten Gattung vor; es ist nämlich mit dem Integrale

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n+\mu-1}{2}}\,dx}{(1+x)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

gleichbedeutend, wie sich sofort durch Vertauschung von $x^2$ mit $x$ erkennen lässt.*) Einem bekannten Theoreme zufolge muss daher die Beziehung Statt finden

$$\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n+\mu+1}{2}-1}\,dx}{(1+x)^{\frac{n+\mu+1+\mu-n}{2}}} = \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-n}{2}\right)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})},$$

und demnach ist jetzt

$$1.\quad \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\mu+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-n}{2}\right) = \Gamma(\mu) + \frac{(n+1)n}{2}\Gamma(\mu-1) + \frac{(n+2)\ldots(n-1)}{2.4}\Gamma(\mu-2) + \ldots$$

Ersetzt man in dieser bemerkenswerthen Gleichung die ganze Zahl $n$ nach und nach durch die andern $m-1$, $m-2$ und nimmt statt $\mu$ überall $m-\mu$, so erhält man die specielleren Beziehungen:

$$1^a.\quad \frac{(2-\mu)(4-\mu)(6-\mu)\ldots(2m-2-\mu)\,\pi}{\sin\mu\pi\,.\,\Gamma(\mu)} = \Gamma(m-\mu) + \frac{m(m-1)}{2}\Gamma(m-\mu-1) + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2.4}\Gamma(m-\mu-2) + \ldots$$

und

$$1^b.\quad \frac{(1-\mu)(3-\mu)(5-\mu)\ldots(2m-3-\mu)}{\Gamma(\mu)\sin\mu\pi} = \Gamma(m-\mu) + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\Gamma(m-\mu-1) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4}\Gamma(m-\mu-2) + \ldots$$

Augenscheinlich erfordern nur die linken Seiten derselben eine nähere Erläuterung. Nehmen wir daher zunächst die Gleichung $1^a$., so zeigt sich, dass durch die Substitutionen $m-\mu$ statt $\mu$, $n=m-1$ die linke Seite der Gleichung 1. vorerst diese Formel annimmt:

$$\frac{2^{m-\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(m-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right).$$

*) Vergl. §. 60.

Beachtet man aber, dass der frühern Bedingung $\mu > n$ zufolge das neue $\mu$ offenbar zwischen 0 und 1 sich befinden muss; so kann für $\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)$ der gleichgeltende Ausdruck $\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\cos\frac{\mu\pi}{2}}$ gesetzt werden. Und da nun andererseits

$$\Gamma\left(m-\frac{\mu}{2}\right)=\Gamma\left(m-1+1-\frac{\mu}{2}\right)=\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\left(2-\frac{\mu}{2}\right)\left(3-\frac{\mu}{2}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(m-1-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\mu}{2}\right)=\left(1-\frac{\mu}{2}\right)^{m-1|1}\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin\frac{\mu\pi}{2}},$$

folglich

$$\Gamma\left(m-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)=\left(1-\frac{\mu}{2}\right)^{m-1|1}\frac{2\pi\,.\,\pi}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}\right)\sin\mu\pi}$$

$$=\left(1-\frac{\mu}{2}\right)^{m-1|1}\frac{2\pi^2}{\Gamma\left(2\,.\,\frac{\mu}{2}\right)(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{-2.\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}}\sin\mu\pi}$$

ist: so wird ersichtlich

$$\frac{2^{m-\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(m-\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)=\frac{2^{m-1}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)^{m-1|1}\pi}{\Gamma(\mu)\sin\mu\pi},$$

eine Beziehung, die nur in der Schreibweise von der obigen Form sich unterscheidet.

Für die Gleichung $1^b$. hingegen hat man, wenn $\mu$ auch hier als echter Bruch betrachtet wird, diese Reductionen:

$$\frac{2^{m-\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(m-\frac{1+\mu}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\mu}{2}\right)$$

$$=\frac{2^{m-1-\mu}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{m-1|1}\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\sin\frac{\mu\pi}{2}}$$

$$=\frac{2^{m-1-\mu}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{m-1|1}\frac{\pi^2}{\Gamma(\mu).2^{-\mu}\sin\mu\pi.\sqrt{\pi}}=\frac{(1-\mu)(3-\mu)\ldots(2m-3-\mu)}{\Gamma(\mu)\,.\,\sin\mu\pi}$$

Die Gleichung 1. lässt sich übrigens in einer kurz symbolischen Form darstellen, wenn man einer früher er

terten Schreibweise sich erinnert.*) Dieser zufolge nimmt nämlich die Gleichung 10. der vorangehenden Nummer zunächst die Gestalt

$$\int_0^\infty e^{-\left(q^2x+\frac{p^2}{x}\right)} x^{n-\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}} e^{-2pq} \sum_{r=0}^{r=n} \frac{\Gamma(2n-r+1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)} \frac{(2\,.\,2p)^r}{q^{2n-r+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^n e^{-2pq} \sum_0^n \frac{\Gamma(2n-r+1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)} \left(\frac{1}{2^{n-r}} \cdot \frac{1}{(2pq)^{n-r}}\right)$$

an. Und hieraus folgt wie oben

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\,\Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty \frac{x^{\mu+n}\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$= \sum_0^n \frac{1}{(2^2\sqrt{\alpha\gamma})^{n-r}} \frac{\Gamma(2n-r+1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)} \int_0^\infty e^{-(2\sqrt{\alpha\gamma}+\beta)\vartheta}\,\vartheta^{\mu-n+r-1} d\vartheta$$

$$= \sum_0^n \left(\frac{1}{2^2\sqrt{\alpha\gamma}}\right)^{n-r} \frac{\Gamma(2n-r+1)\,\Gamma(\mu-n+r)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{\alpha\gamma}+\beta)^{\mu-n+r}}.$$

Indem man aber mit dieser Beziehung die vorhin angezeigten Umformungen vornimmt, erhält man schliesslich die Form

$$1^a.\quad \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\!\left(\frac{1+\mu+n}{2}\right)\Gamma\!\left(\frac{\mu-n}{2}\right) = \sum_0^n \frac{1}{2^{n-r}} \frac{\Gamma(2n-r+1)\,\Gamma(\mu-n+r)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n-r+1)}.$$

## 3. Integralbestimmungen mittelst Differentiation und nachheriger Integration.

### §. 101.

### Vorerinnerungen.

Nachdem wir in den vorhergehenden Paragraphen durch das Cauchy'sche Integrationsverfahren neue Belege für die ausserordentliche Tragweite des Theoremes von der Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen mit constanten Grenzen gewonnen haben; liegt es uns nun noch ob, an einer Reihe von Beispielen jene ebenfalls nicht gering zu achtenden Folgerungen in helleres Licht, als dies früher

*) Gl. 3ª. §. 75.

geschehen, zu stellen, welche wir aus der Differentiation eines Integrales nach einem Parameter ziehen können, wenn wir diese mit einer nachfolgenden Integration in Beziehung setzen. Die Methoden, welche aus einer derartigen Combination beider Operationen für die Theorie der bestimmten Integrale erwachsen, theilen sich in Bezug auf die genannte Differentiation naturgemäss in zwei Hauptgruppen. Entweder nämlich führt dieselbe bei einem zu entwickelnden Integrale auf ein unmittelbar bekanntes oder doch leicht zu ermittelndes Integral, oder sie ermöglicht die Bildung von Differentialgleichungen. Gelingt daher in beiden Fällen die nachfolgende Integration, so ist dadurch der Werth des zu bestimmenden Integrales aufgezeigt.

Dass übrigens die nothwendigen Bedingungen des Leibnitz'schen Satzes erfüllt sein müssen, bedarf keiner weitern Erörterung.*)

Nach diesen Andeutungen über den Geist der hier auftretenden Methoden wenden wir uns zu ihrer nähern Erläuterung durch Beispiele und beginnen mit der zuerst genannten Gruppe.

## §. 102.

### Reduction eines unbekannten Integrales auf ein bekanntes durch Differentiation nach einem Parameter.

Heisst das Integral $\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$, dessen Werth wir bestimmen wollen, kurz $u$, und nehmen wir an, dass die Gren-

*) Wir haben dieses, sowie das Theorem von der Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen freilich nur für den Fall stetiger Functionen und endlicher Integrationsgrenzen bewiesen und alsdann später beide Lehrsätze ohne Weiteres auch in solchen Fällen zur Anwendung gebracht, in denen eine Modification jener ursprünglichen Annahme eintrat. Wir waren indess hierzu berechtigt, weil die dann noch hinzuzufügende Bedingung, dass das zu bildende Integral nicht ohne Bedeutung sei, nach den vorgeführten Lehren über den Sinn solcher Integrale sich gewissermassen von selbst verstand. Man vergleiche übrigens in dieser Hinsicht beispielsweise die Paragraphen 43, 45, 71 und 75.

zen $a$ und $b$ unabhängig von der Constanten $\alpha$ sind; so folgt durch Differentiation nach $\alpha$:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx.$$

Indem wir aber den Werth dieses Integrales als bekannt und zwar $= \psi(\alpha)$ voraussetzen, erhalten wir durch Integration

$$u + \text{const.} = \int \psi(\alpha)\, d\alpha,$$

eine Gleichung also, welche zur Kenntniss von $u$ führt, wenn das unbestimmte Integral zu den angebbaren gehört. Dies nun vorausgesetzt, liegt uns folglich nur noch die Bestimmung der Integrationsconstanten ob. Offenbar geschieht dies sofort durch Ermittlung eines solchen besondern Werthes von $\alpha$, für welchen das ursprüngliche Integral unmittelbar bekannt ist.

Da wir von dieser Methode bei Gelegenheit der auf Gammafunctionen zurückführbaren Integrale schon Gebrauch gemacht haben*), so mögen nur noch einige Beispiele eine Stelle hir finden. Behufs naheliegender Folgerungen kehren wir jedoch vorerst auf die damals entwickelten Integrale

$$1.\quad \int_0^1 \frac{x^p-1}{1x}\, dx = \lg(p+1) \text{ und } \int_0^1 \frac{x^q-x^p}{1x} dx = \lg\frac{q+1}{p+1}, p>0, q>0 \quad 1^a.$$

zurück.

I. Schreiben wir nämlich in dem letzten Integrale $p+q$ anstatt $q$, so kommt

$$\int_0^1 \frac{x^q-1}{\lg x}\, x^p\, dx = \lg\frac{p+q+1}{p+1}.$$

Daraus folgt weiter, wenn $p$ mit $p+r$ und in dem ersten der obigen Integrale $q$ mit $p$ vertauscht wird und beide Integrale nach einander mit dem eben benutzten durch Subtraction verbunden werden:

$$\int_0^1 \frac{x^q-1}{1x}(x^p-1)\, dx = \lg\frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^q-1}{1x}(x^r-1)\, x^p\, dx = \lg\frac{(p+q+r+1)\,(p+1)}{(p+q+1)\,(p+r+1)}.$$

---

*) Siehe §. 80, Schluss.

Wiederholt man diesen Gedankengang immer von neuem, so erhält man nach und nach Relationen, aus denen man durch Gleichsetzung sämmtlicher Binomialfactoren leicht allgemeine Formeln abstrahiren kann, die sich ohne Mühe mittelst vollständiger Induction zur Gewissheit erheben lassen. Es sind dies die Gleichungen:

$$\int_0^1 \frac{(x^p-1)^n}{1x} dx = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \lg [(n-s)p+1]$$

und

$$\int_0^1 \frac{(x^q-1)^n}{1x} x^p dx = \sum_0^n (-1)^s \binom{n}{s} \lg [p + (n-s) q + 1],$$

welche ihrerseits wieder zu weitern Folgerungen Veranlassung geben, wie man in Bierens de Haan: „Exposé de la théorie des propriétés etc. des intégrales définies, pag. 347 etc." nachsehen kann. Aber ein viel allgemeineres, dem in §. 80, Schluss bewiesenen Satze verwandtes Theorem lässt sich mit Hülfe der Gleichung 1. entwickeln.

Nehmen wir nämlich an, dass $f(x)$ eine solche Function von $x$ bedeute, die für $x = 1$ verschwindet, übrigens aber in nachstehender Weise sich schreiben lasse:

2. $$f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + a_3 x^{\alpha_3} + \ldots$$

Die Grössen $a$ und $\alpha$ bezeichnen hierbei willkürliche Constanten, von denen die letztern indess sämmtlich positiv sein sollen. Giebt man nun dem Integrale $\int_0^1 \frac{f(x)}{1x} dx$ die Gestalt

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\lg x} dx = \int_0^1 \frac{[a_1+a_2+a_3+\ldots]+a_1(x^{\alpha_1}-1)+a_2(x^{\alpha_2}-1)+\ldots}{\lg x} dx,$$

so entspringt mit Berücksichtigung der Beziehungen 1. und $f(1) = a_1 + a_2 + \ldots = 0$ sofort die von Euler gefundene Gleichung

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1x} dx = a_1 \lg(\alpha_1+1) + a_2 \lg(\alpha_2+1) + \ldots = \sum_{s=1}^{s=s} a_s \lg(\alpha_s + 1).^{*)}$$

*) Vergl. §. 61, Formel 7. — Die obige Gleichung findet sich in Euler, Inst. cal. int. vol. IV, sup. V. §. 27, p. 276.

II. Unmittelbar aus den früher bewiesenen Euler'schen Formeln erhellt, dass der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

$\operatorname{arc tang} \frac{\alpha}{k}$ heisst. Abgesehen jedoch von dieser Deduction lässt sich das Integral nach der hier in Frage kommenden Methode auf folgende Weise bestimmen.

Differentiiren wir nämlich die Gleithung

$$y = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

nach $\alpha$, so ergiebt sich

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \int_0^\infty e^{-kx} \cos \alpha x \, dx = \frac{k}{k^2 + \alpha^2}.$$

Mithin wird

$$y = \int \frac{k\, d\alpha}{k^2 + \alpha^2} = \operatorname{arc tang} \frac{\alpha}{k} + \text{const.}$$

Nun ist für $\alpha = 0$ auch $y = 0$ und demnach const. $= 0$.

Würde man dagegen die Differentiation nach $k$ vorziehen, so erhielte man

$$\frac{\partial y}{\partial k} = -\int_0^\infty e^{-kx} \sin \alpha x \, dx = -\frac{\alpha}{k^2 + \alpha^2},$$

sonach

$$y = -\operatorname{arc tang} \frac{k}{\alpha} + \text{const.}$$

Für $\alpha = 0$ aber ist $y = \frac{\pi}{2}$, wenn wir der Kürze halber $\alpha$ positiv voraussetzen, und folglich $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc tang} \frac{k}{\alpha} = \operatorname{arc tang} \frac{\alpha}{k}$.

Will man in derselben Weise die beiden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-k\alpha} - e^{-k_1 \alpha}}{x} \sin \alpha x \, dx \text{ und } \int_0^\infty \frac{e^{-kx} - e^{-k_1 x}}{x} \cos \alpha x \, dx$$

behandeln, in denen $k$ und $k_1$ natürlich positiv sein müssen, so findet man

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx} - e^{-k_1 x}}{x} \sin \alpha x \, dx = \operatorname{arc\,tang} \frac{k_1}{\alpha} - \operatorname{arc\,tang} \frac{k}{\alpha}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx} - e^{-k_1 x}}{x} \cos \alpha x \, dx = \tfrac{1}{2} \lg \frac{k_1^2 + \alpha^2}{k^2 + \alpha^2}.$$

Die Integrationsconstante bestimmt sich dabei am zweckmässigsten, wenn man $k = k_1$ setzt, also von $k_1$ bis $k$ integrirt.

Schreibt man endlich in dem letzten Integrale $\alpha = 0$, so folgt noch

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx} - e^{-k_1 x}}{x} dx = \lg \frac{k_1}{k}.\text{*)}$$

III. Ein anderes hier passendes Beispiel liefert das Integral

$$y = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x} dx,$$

das sogleich zu der Beziehung führt:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \int_0^\infty e^{-kx} \cos \alpha x \frac{\sin \beta x}{x} dx = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-kx} \sin(\alpha+\beta) x}{x} dx - \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-kx} \sin(\alpha-\beta) x}{x} dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[ \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha+\beta}{k} - \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha-\beta}{k} \right].$$

Daraus fliesst weiter

$$y = \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha+\beta}{k} + \frac{\beta-\alpha}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{\alpha-\beta}{k} + \frac{k}{4} \lg \frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2},$$

weil

$$\int \operatorname{arc\,tang} \frac{a+b}{c} da = a \operatorname{arc\,tang} \frac{a+b}{c} - c \int \frac{a\, da}{c^2 + (a+b)^2}$$

$$= a \operatorname{arc\,tang} \frac{a+b}{c} + b \operatorname{arc\,tang} \frac{a+b}{c} - \frac{c}{2} \lg[c^2 + (a+b)^2] + \text{const.}$$

ist und für $\alpha = 0$ auch $y$ den Werth 0 erwirbt. Berücksichtigt man aber die bekannte Formel

*) Vergl. §. 80, Schluss oder Gl. 1[a].

$$\operatorname{arc\,tang} u \pm \operatorname{arc\,tang} v = \operatorname{arc\,tang} \frac{u \pm v}{1 \mp uv},$$

so folgt leicht

$$\int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx = \frac{\alpha}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{2k\beta}{k^2 + \alpha^2 - \beta^2} + \frac{\beta}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{2k\alpha}{k^2 - \alpha^2 + \beta^2}$$

$$+ \frac{k}{4} \lg \frac{k^2 + (\alpha - \beta)^2}{k^2 + (\alpha + \beta)^2}.$$

Und hieraus fliesst wieder für $\alpha = \beta$

$$\int_0^\infty e^{-kx} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx = \alpha \operatorname{arc\,tang} \frac{2\alpha}{k} - \frac{k}{4} \lg \frac{k^2 + 4\alpha^2}{k^2}.$$

Würde endlich der Sinus durch den Cosinus vertreten, so müsste man, um ein nicht sinnlos werdendes Integral zu haben, dasselbe in dieser Gestalt schreiben

$$y = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\cos \alpha x^2 - \cos \beta x^2}{x^2} dx.$$

Die Differentiation nach $\alpha$ führt dann sogleich zu der Beziehung

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = - \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin 2\alpha x}{x} dx = - \operatorname{arc\,tang} \frac{2\alpha}{k},$$

aus welcher sich nun wieder in bekannter Weise der Werth von $y$, nämlich

$$y = \beta \operatorname{arc\,tang} \frac{2\beta}{k} - \alpha \operatorname{arc\,tang} \frac{2\alpha}{k} + \frac{k}{4} \lg \frac{k^2 + 4\alpha^2}{k^2 + 4\beta^2}$$

entwickeln lässt. Die ausführliche Betrachtung dieses Integrales wird in dem folgenden Paragraphen geschehen.

## §. 103.

### Fortsetzung.

Nicht immer ist der im Vorigen innegehaltene Gedankengang so einfacher Natur. Es kann sich sehr wohl ereignen, dass mehrere nach einander zu vollziehende Differentiationen nöthig werden, um auf bekannte Integrale zurückzukommen. Bei der nachfolgenden Integration sind alsdann offenbar eben so viel Constanten zu bestimmen, als Derivationen voraus-

gingen. Und zwar geschieht deren Bestimmung am zweckmässigsten in der Weise, dass man für jedes unbestimmte Integral einen solchen besondern Werth eines in Betracht kommenden Parameters aufsucht, für welchen das gleichnamige bestimmte Integral unmittelber bekannt wird. Die Auflösung sämmtlicher so gewonnenen Gleichungen liefert dann die Werthe der verschiedenen Constanten.

Um auch hier das Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir das im vorigen Paragraphen schon angedeutete Integral

$$y = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\cos \alpha x^2 - \cos \beta x^2}{x^2} dx, \quad k > 0$$

einer nähern Betrachtung unterwerfen. Differentiiren wir dasselbe zunächst nach $\alpha$, so ergiebt sich

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin 2\alpha x}{x} dx,$$

und hieraus könnte man also mit Rücksicht auf die Formel

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \sin \vartheta x \, dx = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \frac{\sin a\psi}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}$$

sogleich schliessen, dass

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = - \text{arc tang} \frac{2\alpha}{k}$$

ist. Gegenwärtig sehen wir indess von einer Benutzung der Euler'schen Relation, sowie von dem im vorigen Paragraphen Gelehrten gänzlich ab, differentiiren vielmehr unser Integral nochmals nach $\alpha$. Dadurch kommt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = -2\int_0^\infty e^{-kx} \cos 2\alpha x \, dx = -\frac{2k}{k^2+4\alpha^2} \text{*)},$$

und folglich wird durch Integration dieser Gleichung nach die Beziehung

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -2\int \frac{k\,d\alpha}{k^2+4\alpha^2} = - \text{arc tang} \frac{2\alpha}{k} + \text{const.}$$

*) Vergl. die §§. 64; 70, Anmerk. 2; 97, 2.

entstehen, welche sich einfacher so schreibt:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = - \text{arc tang} \frac{2\alpha}{k},$$

weil für $\alpha = 0$ offenbar $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0$ ist. Die nochmalige Integration nach $\alpha$ zeigt nun, dass

$$y = - \int \text{arc tang} \frac{2\alpha}{k} \, d\alpha = - \alpha \, \text{arc tg} \frac{2\alpha}{k} + \frac{k}{4} \lg [k^2 + 4\alpha^2] + \text{const.}$$

Weil aber für $\alpha = \beta$ das bestimmte Integral $y$ den Werth Null erwirbt, so muss

$$\text{const.} = \beta \, \text{arc tang} \frac{2\beta}{k} - \frac{k}{4} \lg [k^2 + 4\beta^2]$$

und demnach

$$y = \int_\alpha^\beta \text{arc tg} \frac{2\alpha}{k} \, d\alpha = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\cos \alpha x^2 - \cos \beta x^2}{x^2} \, dx$$

$$= \beta \, \text{arc tg} \frac{2\beta}{k} - \alpha \, \text{arc tg} \frac{2\alpha}{k} + \frac{k}{4} \lg \frac{k^2 + 4\alpha^2}{k^2 + 4\beta^2}$$

sein.

Wäre endlich die zweite Differentiation nach $k$ statt nach $\alpha$ vollzogen, so hätten wir diese Gleichung gehabt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \, \partial k} = \int_0^\infty e^{-kx} \sin 2\alpha x \, dx = \frac{2\alpha}{k^2 + 4\alpha^2}.$$

Daraus aber entspringt

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \int \frac{d\left(\frac{k}{2\alpha}\right)}{1 + \left(\frac{k}{2\alpha}\right)^2} = \text{arc tang} \frac{k}{2\alpha} + \text{const.},$$

d. g., weil für $k = 0$ $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = - \int_0^\infty \frac{\sin 2\alpha x}{x} \, dx = - \frac{\pi}{2}$ $(\alpha > 0)$ wird,

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \text{arc tang} \frac{k}{2\alpha} - \frac{\pi}{2} = - \text{arc tang} \frac{2\alpha}{k}.$$

U. s. w.

## §. 104.

### Umkehrung des im Obigen befolgten Gedankenganges.

Nur mit einigen Worten wollen wir einer Integrations-methode hier noch gedenken, die sich als Umkehrung der vorhin gepflogenen Betrachtungen zu erkennen giebt.

Sei nämlich das zwischen den von $\alpha$ unabhängigen Grenzen $a$ und $b$ genommene Integral

$$y = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

dessen Werth wir bestimmen wollen, eine stetige Function des Parameters $\alpha$. Alsdann lässt sich immer die Gleichung

$$\int^\alpha y\, d\alpha = \int^\alpha d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

bilden. Da nun bei einem unbestimmten Integrale die untere Grenze durch die sogenannte Integrationsconstante vertreten wird, so kann man rechts die Ordnung der Integrationen vertauschen, und folglich erhält man

$$\int y\, d\alpha = \int_a^b dx \int f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Lässt sich mithin nicht nur das unbestimmte Integral $\int f(x, \alpha)\, d\alpha$, sondern auch das bestimmte $\int_a^b dx \int f(x, \alpha)\, d\alpha$ ermitteln, so ergiebt sich wieder durch Differentiation

$$y = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b dx \int f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Der Hinzufügung einer Constanten bedarf es bei dem unbestimmten Integrale $\int f(x, \alpha)\, d\alpha$ natürlich nicht, weil sie ja durch die nachfolgende Differentiation wieder verschwindet.

1. Sei z. B. der Werth des Integrales

$$y = \int_0^1 e^{-\alpha x} x\, dx$$

anzugeben. Integrirt man hier unbestimmt nach $\alpha$, so kommt

$$\int y\, d\alpha = \int_0^1 x\, dx \int e^{-\alpha x}\, d\alpha = -\int_0^1 e^{-\alpha x}\, dx = \frac{e^{-\alpha} - 1}{\alpha},$$

und sonach wird

$$y = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{e^{-\alpha} - 1}{\alpha}\right) = \frac{1 - e^{-\alpha}(1 + \alpha)}{\alpha^2}.$$

2. In ganz ähnlicher Weise entspringen aus dem Integrale

$$y = \int_0^1 x \sin \alpha x \, dx$$

diese Gleichungen:

$$\int y \, d\alpha = -\int dx \cos \alpha x = -\frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad y = \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^2}.$$

Dass übrigens auch hier eine wiederholte Anwendung der genannten Operationen unter Umständen erforderlich werden kann, versteht sich wohl von selbst. So ist beispielsweise für das Integral

$$y = \int_0^1 e^{-\alpha x} x^2 dx$$

eine zweimalige unbestimmte Integration von Nöthen. Man hat nämlich, wenn man die Hinzufügung der Constanten unterdrückt, welche ja auch hier wieder aus dem Endresultate verschwinden müssen,

$$\int^1 y \, d\alpha = -\int_0^1 x \, e^{-\alpha x} \, dx, \quad \int^2 y \, d\alpha^2 = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha},$$

folglich

$$\int^1 y \, d\alpha = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\right) = \frac{\alpha e^{-\alpha} + e^{-\alpha} - 1}{\alpha^2}$$

und

$$y = \frac{2(1 - e^{-\alpha})}{\alpha^3} - e^{-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right).$$

## §. 105.

### Integralbestimmungen mittelst Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

Die in den Paragraphen 102. und 103. erwähnten Methoden zur Ermittlung unbekannter Integrale beruhen auf der Annahme, dass die Differentiation schliesslich auf ein bekanntes Integral zurückführt. Dieser Voraussetzung aber dürfte

bloss in verhältnissmässig sehr günstigen und desshalb nicht sehr zahlreichen Fällen entsprochen werden. Weit öfter wird voraussichtlich der Fall eintreten, dass ein unbekanntes Integral das Ergebniss der Differentiation bildet. Gelingt es alsdann aber, durch irgend welche Mittel ein Abhängigkeitsverhältniss zwischen diesem und dem ursprünglichen Integrale herzustellen, so erhält man offenbar eine oder auch zwei simultane Differentialgleichungen, deren Integration, sofern sie möglich ist, nun zu dem Werthe des vorgelegten Integrales führen wird.

Die Ordnung der so erzielten Differentialgleichungen ist entweder die erste, oder eine höhere, und zwar entscheidet hierüber die Anzahl der Derivationen, welche behufs Erlangung einer Relation zwischen dem ursprünglichen Integrale und den Abgeleiteten desselben zu vollziehen sind.

Obwohl wir schon früher, bei dem Beweise der Euler'schen Formeln nämlich, mit dem Wesen der hier nöthig werdenden Operationen Bekanntschaft gemacht, ist es doch äusserst wünschenswerth, die Natur dieser Methoden noch eingehender zu beleuchten und namentlich auch solche Fälle vorzuführen, in denen bloss eine Differentialgleichung zu behandeln ist.

Selbstverständlich werden wir nun zunächst solche Beispiele auswählen, welche nur die Bildung einer Differentialgleichung der ersten Ordnung verlangen.

I. In §. 99. haben wir gesehen, dass $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2\sqrt{a}}$ den Werth des Integrales $\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a}{x^2}}\, dx$, $a > 0$ vorstellt, und zwar haben wir uns dabei auf die Kenntniss des Laplace'schen Integrals $\int_0^\infty \frac{\cos \vartheta x}{k^2+x^2}\, dx$ gestützt. Unmittelbar aber können wir zu dem genannten Resultate gelangen, wenn wir die Ermittlung des Integrales von der Behandlung einer Differentialgleichung der ersten Ordnung abhängig zu machen suchen *).

---

*) Mémoire sur les intégrales définies par Poisson in: Journal de l'école polytechnique cah. 16, p. 237 etc.
Vergl. auch §. 44.

Und in der That, aus

$$y = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha}{x^2}} dx$$

folgt sogleich

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\int_0^\infty \frac{e^{-x^2 - \frac{\alpha}{x^2}} dx}{x^2},$$

und hieraus fliesst wieder durch Vertauschung von $x$ mit $\frac{\sqrt{\alpha}}{x}$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha}{x^2}} dx = \frac{-y}{\sqrt{\alpha}}.$$

Daher ergiebt sich jetzt durch Integration

$$\lg y = \text{const.} - 2\sqrt{\alpha},$$

und folglich wird

$$y = e^{-2\sqrt{\alpha}} e^{\text{const.}} = e^{-2\sqrt{\alpha}} . q.$$

Nun ist für $\alpha = 0$ $y = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = q$, also

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2\sqrt{\alpha}}.$$

Ausserdem aber hat man noch unmittelbar

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2 - \frac{\alpha}{x^2}} dx}{x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-2\sqrt{\alpha}}, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2 - \frac{1}{x^2}} dx}{x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2\sqrt{\alpha}}.$$

II. Auch das schon öfter betrachtete Laplace'sche Integral

$$y = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, dx$$

lässt hier ohne grosse Mühe sich bestimmen. Denn

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \int_0^\infty e^{-x^2} (-\sin 2\alpha x)\, 2x\, dx$$

und

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2\alpha x(-2x)\,dx = \int_0^\infty \frac{d(e^{-x^2})}{dx}\sin 2\alpha x\,dx$$

$$= \Big[e^{-x^2}\sin 2\alpha x\Big]_0^\infty - 2\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x dx = -2\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x dx,$$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -2\alpha y.$$

Integrirt man aber diese Differentialgleichung, so kommt

$$\lg y = -\alpha^2 + \text{const.},$$

und dies giebt sofort die andere Gleichung

$$y = e^{-\alpha^2}\,.\,q.$$

Weil nun für $\alpha = 0$ $y = q = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ist, so hat man wie früher

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha^2}.$$

II. Ersetzt man dagegen den Cosinus durch den Sinus, so wird man auf eine neue Transscendente geführt. Denn aus

$$y = \int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2\alpha x\,dx$$

entspringt

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,.\,2x\,dx = \Big[-e^{-x^2}\cos 2\alpha x\Big]_0^\infty$$

$$-2\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2\alpha x\,dx,$$

d. h.

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 1 - 2\alpha y.$$

Multipliciren wir aber diese Differentialgleichung mit $e^{\alpha^2}$, so ergiebt sich leicht

$$\frac{\partial(e^{\alpha^2}y)}{\partial \alpha} = e^{\alpha^2},$$

und folglich ist

$$y = e^{-\alpha^2}\int e^{\alpha^2}\,d\alpha.$$

Nun geht für $\alpha = 0$ auch $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} \sin 2\alpha x \, dx$ in 0 über, und demnach muss für $\alpha = 0$ das Integral $\int e^{\alpha^2} d\alpha$ verschwinden. Mit andern Worten aber heisst dies

$$y = e^{-\alpha^2} \int\limits_0^\alpha e^{\varphi^2} \, d\varphi.$$

IV. Eine fernere Anwendung der hier befolgten Methode gestattet das Laplace'sche Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\cos \vartheta x}{k^2 + x^2} \, dx$. Denn nennen wir den Werth desselben vorläufig $y$, so kommt sogleich

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = -\int\limits_0^\infty \frac{x \sin \vartheta x}{k^2 + x^2} \, dx.$$

Der Factor $\frac{x}{k^2 + x^2}$ aber ist mit dem Integrale $\int\limits_0^\infty e^{-xz} \cos kz \, dz$ gleichbedeutend, mithin wird

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = -\int\limits_0^\infty dz \cos kz \int\limits_0^\infty e^{-xz} \sin \vartheta x \, dx = -\int\limits_0^\infty dz \cos kz . \frac{\vartheta}{\vartheta^2 + z^2}$$

oder, wenn wir $kz$ mit $\vartheta x$ vertauschen,

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = -k \int\limits_0^\infty \frac{\cos \vartheta x}{k^2 + x^2} \, dx = -ky.$$

Wiederum also entspringt die einfache Differentialgleichung $\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = -ky$, deren Integral $y = e^{-k\vartheta} q$ nun sofort zu der bekannten Beziehung

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos \vartheta x}{k^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2k} e^{-k\vartheta}$$

führt.

## §. 106.

### Integralbestimmungen durch Differentialgleichungen höherer Ordnung.

I. Die Kenntniss der Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos \vartheta x}{k^2 + x^2}\, dx \text{ und } \int_0^\infty \frac{x \sin \vartheta x}{k^2 + x^2}\, dx$$

können wir uns auch dadurch erwerben, dass wir zuvörderst den Werth des Integrales

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{k^2 + x^2}\, \frac{dx}{x}$$

bestimmen, was in folgender Weise geschehen kann.

Differentiiren wir $y$ zweimal in Bezug auf $\vartheta$, so gewinnen wir die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \int_0^\infty \frac{\cos \vartheta x}{k^2 + \vartheta^2}\, dx, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta^2} = -\int_0^\infty \frac{x \sin \vartheta x}{k^2 + \vartheta^2}\, dx,$$

in denen wir natürlich die Integrale als vorläufig noch unbekannte Grössen betrachten. Indem wir aber dem letztern Integrale die Gestalt

$$\int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{x} \left( \frac{-x^2}{k^2 + x^2} \right) dx = \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{x} \left( \frac{k^2}{k^2 + x^2} - 1 \right) dx$$

geben und der Kürze halber $\vartheta > 0$ voraussetzen, gewinnen wir sogleich die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta^2} = k^2 y - \frac{\pi}{2}.$$

Wird dieselbe durch $2\, \partial y$ multiplicirt und darauf integrirt, so ergiebt sich die neue Beziehung

$$\left( \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \right)^2 = k^2 y^2 - \pi y + \text{const.}$$

Diese vereinfacht sich indess, wenn man schon jetzt die Constante bestimmt, also bedenkt, dass für $\vartheta = 0$ offenbar $\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \frac{\pi}{2k}$, $y = 0$ und folglich const. mit $\left( \frac{\pi}{2k} \right)^2$ gleichbedeutend ist. Denn nun erhält man mit Berücksichtigung des

Umstandes, dass für $\vartheta = 0$ die obige Gleichung eine identische werden muss,

$$-\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = ky - \frac{\pi}{2k}.$$

Daraus aber fliesst wieder die andere Relation

$$ky - \frac{\pi}{2k} = e^{-k\vartheta}\,.\,q.$$

Und bestimmt man jetzt die Constante $q$ in der bekannten Weise, so folgt schliesslich

$$y = \frac{\pi}{2k^2}(1 - e^{-k\vartheta}) = \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{k^2 + x^2}\frac{dx}{x} \text{*)}.$$

II. In der soeben gewonnenen Gleichung wollen wir für den Augenblick die Constante $k$ complex, nämlich $= re^{\alpha i}$ voraussetzen. Alsdann erhalten wir offenbar folgende Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{r^2 e^{2\alpha i} + x^2}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2r^2} e^{-2\alpha i}\left(1 - e^{-re^{\alpha i}.\vartheta}\right),$$

die ihrerseits wieder verschiedene besondere Fälle in sich begreift, wie wir sogleich zeigen werden, nachdem wir uns von der Zulässigkeit der hier befolgten Induction überzeugt haben. Dies aber bedarf nur weniger Worte.

In der That, differentiirt man auch hier zweimal nach $\vartheta$, so muss ersichtlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta^2} = r^2 e^{2\alpha i} y - \frac{\pi}{2}, \text{ d. h. } \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\left(y - \frac{\pi}{2r^2} e^{-2\alpha i}\right) = r^2 e^{2\alpha i}\left(y - \frac{\pi}{2r^2} e^{-2\alpha i}\right)$$

zum Vorschein kommen. Und hieraus fliesst nun leicht weiter, dass

$$y - \frac{\pi}{2r^2} e^{-2\alpha i} = c\, e^{r\vartheta e^{\alpha i}} + c_1 e^{-r\vartheta e^{\alpha i}}.$$

sein wird, weil bekanntlich

$$ce^{kz} + c_1 e^{-kz} = u$$

das Integral der Differentialgleichung

---

*) Man vergleiche hierbei die in der Ausführung der Rechnung etwas abweichende Behandlung dieses Integrales von Serret in Liouville's Journal de math., p. 22. T. VIII.

$$\frac{d^2u}{dz^2} = k^2 u$$

vorstellt. Da nun der Sinus $\sin \vartheta x$ numerisch den Werth 1 nicht überschreiten, also das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{r^2 e^{2\alpha i} + x^2} \frac{dx}{x}$ mit $\vartheta$ nicht unbegrenzt wachsen kann, so wird die Constante $c$ nothwendig mit Null zusammenfallen müssen. Die Constante $c_1$ hingegen bestimmt sich durch die Bemerkung, dass für $\vartheta = 0$ auch $y = 0$ und somit $c_1 = -\frac{\pi}{2r^2} e^{-2\alpha i}$ ist. Es findet also wirklich die Gleichung

$$1. \quad \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{r^2 e^{2\alpha i} + x^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2r^2} e^{-2\alpha i} \left(1 - e^{-r\vartheta e^{\alpha i}}\right)$$

Statt.

Vertauschen wir in derselben $\alpha$ mit $-\alpha$, und combiniren wir alsdann das gewonnene Resultat mit dem ursprünglichen, so entstehen die Relationen

$$2. \quad \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{r^4 + 2r^2 \cos 2\alpha . x^2 + x^4} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2r^4} \left[1 - e^{-r\vartheta \cos \alpha} \frac{\sin(2\alpha + r\vartheta \sin \alpha)}{\sin 2\alpha}\right]$$

und

$$3. \quad \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x [r^2 \cos 2\alpha + x^2]}{r^4 + 2r^2 x^2 \cos 2\alpha + x^4} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2r^2} \left[\cos 2\alpha - e^{-r\vartheta \cos \alpha} \cos(2\alpha + r\vartheta \sin \alpha)\right]$$

Ganz dieselbe Behandlung der Gleichungen

$$4. \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \int_0^\infty \frac{\cos \vartheta x}{r^2 e^{2\alpha i} + x^2} dx = \frac{\pi}{2r} e^{-\alpha i} e^{-r\vartheta e^{\alpha i}},$$

$$5. \quad -\frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta^2} = \int_0^\infty \frac{x \sin \vartheta x}{r^2 e^{2\alpha i} + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-r\vartheta e^{\alpha i}}$$

liefert ferner die Beziehungen

$$6. \quad \int_0^\infty \frac{\cos \vartheta x \, dx}{r^4 + 2r^2 x^2 \cos 2\alpha + x^4} = \frac{\pi}{2r^3} e^{-r\vartheta \cos \alpha} \frac{\sin(\alpha + r\vartheta \sin \alpha)}{\sin 2\alpha},$$

$$7. \quad \int_0^\infty \frac{x \sin \vartheta x \, . \, dx}{r^4 + 2r^2 x^2 \cos 2\alpha + x^4} = \frac{\pi}{2r^2} e^{-r\vartheta \cos \alpha} \frac{\sin(r\vartheta \sin \alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

Und hieraus entspringen wieder durch eine zweimalige Differentiation nach $\vartheta$, welche augenscheinlich hier vollzogen werden darf, die andern Formeln

$$8. \quad \int_0^\infty \frac{x^2 \cos \vartheta x \, dx}{r^4 + 2r^2x^2 \cos 2\alpha + x^4} = \frac{\pi}{2r} e^{-r\vartheta \cos\alpha} \frac{\sin(\alpha - r\vartheta \sin\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

und

$$9. \quad \int_0^\infty \frac{x^3 \sin \vartheta x \,.\, dx}{r^4 + 2r^2x^2 \cos 2\alpha + x^4} = \frac{\pi}{2} e^{-r\vartheta \cos\alpha} \frac{\sin(2\alpha - r\vartheta \sin\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

Wir haben die verschiedenen Relationen gleich in ihrer einfachsten Gestalt hingestellt, weil die auszuführenden Rechnungen ausser einer gewissen Weitläufigkeit nicht die geringste Mühe verursachen. Man erinnere sich bei ihnen namentlich nur der bekannten Formeln

$$\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} = \cos v \quad \text{und} \quad \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} = \sin v.$$

Speciellere Formen lassen sich aus den vorhergehenden Gleichungen dadurch erzielen, dass man den Bogen $\alpha = 0$, oder $= \frac{\pi}{4}$ voraussetzt. Dagegen würden bei der Annahme $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder allgemeiner $\alpha = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, wo $n$ eine ganze Zahl ausdrückt, die meisten der vorstehenden Integrale unzweifelhaft sinnlos werden*).

Die neuen Gleichungen, welche unter den angedeuteten

*) Aus den Gleichungen 3., 4. und 5. kann man, wie es wohl geschieht, leicht die Integralformen herleiten:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{r^2 - x^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2r^2}(1 - \cos r\vartheta), \quad \int_0^\infty \frac{\cos \vartheta x}{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2r} \sin r\vartheta,$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin \vartheta x}{r^2 - x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \cos r\vartheta$$

Da aber für $x = r$ eine unendliche Discontinuität eintritt, so scheinen mir bei näherer Untersuchung die Integrale ohne Bedeutung zu sein. Siehe auch §. 109. Cauchy giebt das erstere dieser drei Integrale im Journal de l'école polyt., cah. 19, p. 578; die beiden letztern in Gergonne's Annalen Bd. 17, S. 106.

Voraussetzungen zum Vorschein kommen, sind übrigens nachstehenden.

Aus den Formeln 2., 6., 7., 8., 9. entspringt zuvörd für $\alpha = 0$, wenn man die in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ scheinenden Ausdrücke in bekannter Weise entwickelt, folgende System

10.
$$\int_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{(x^2+r^2)^2}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2r^4}\left[1 - e^{-r\vartheta}\frac{2+r\vartheta}{2}\right];$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \vartheta x}{(x^2+r^2)^2}dx = \frac{\pi}{2r^3}e^{-r\vartheta}\frac{1+r\vartheta}{2}\,{}^{*)};\quad \int_0^\infty \frac{x \sin \vartheta x}{(x^2+r^2)^2}dx = \frac{\vartheta\pi}{4r}e^{-r\vartheta}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos \vartheta x}{(x^2+r^2)^2}dx = \frac{\pi}{2r}e^{-r\vartheta}\frac{1-r\vartheta}{2};\quad \int_0^\infty \frac{x^3 \sin \vartheta x}{(x^2+r^2)^2}dx = \frac{\pi}{2r}e^{-r\vartheta}\frac{2-}{}$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hingegen hat man diese Beziehungen:

11.
$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\vartheta x}{x^4+r^4}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2r^4}[1 - e^{-r\vartheta\sqrt{2}}\cos(r\vartheta\sqrt{2})];$$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin 2\vartheta x}{x^4+r^4}dx = \frac{\pi}{2r^2}e^{-r\vartheta\sqrt{2}}\sin(r\vartheta\sqrt{2});$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin 2\vartheta x}{x^4+r^4}dx = \frac{\pi}{2}e^{-r\vartheta\sqrt{2}}\cos(r\vartheta\sqrt{2});$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\vartheta x}{x^4+r^4}dx = \frac{\pi}{2r^3}e^{-r\vartheta\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + r\vartheta\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4r^3}e^{-r\vartheta\sqrt{2}}[\cos(r\vartheta\sqrt{2}) + \sin(r\vartheta\sqrt{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos 2\vartheta x}{x^4+r^4}dx = \frac{\pi}{2r}e^{-r\vartheta\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - r\vartheta\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4r}e^{-r\vartheta\sqrt{2}}[\cos(r\vartheta\sqrt{2}) - \sin(r\vartheta\sqrt{}$$

Endlich haben wir noch mit einigen Worten der bei früher erwähnten Formeln

*) Vergl. §. 75.

$$12.\ \int_0^\infty \frac{\cos 2\vartheta x}{(x^2+q^2)^2+s^2}\,dx = \frac{\pi}{2s}\,\frac{e^{-2\vartheta\lambda}}{\sqrt{q^4+s^2}}\,[\mu\cos(2\vartheta\mu)+\lambda\sin(2\vartheta\mu)]$$

und

$$13.\ \int_0^\infty \frac{x^2+q^2}{(x^2+q^2)^2+s^2}\cos 2\vartheta x\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-2\vartheta\lambda}}{\sqrt{q^4+s^2}}[\lambda\cos(2\vartheta\mu)-\mu\sin(2\vartheta\mu)]$$

zu gedenken, in denen bekanntlich $\lambda$ und $\mu$ die Ausdrücke

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sqrt{q^4+s^2}+q^2}{2}},\quad \mu = \sqrt{\frac{\sqrt{q^4+s^2}-q^2}{2}}$$

bedeuten*).

Schreibt man nämlich $q^2 = r^2 \cos 2\alpha$ und $r^4 = q^4 + s^2$; also

$$r\cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{q^4+s^2}+q^2}{2}},\quad r\sin\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{q^4+s^2}-q^2}{2}},\quad r^2\sin 2\alpha = s;$$

so erhält man aus den Gleichungen 6. und 8. sofort die andern

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\vartheta x\,dx}{(x^2+q^2)^2+s^2} = \frac{\pi}{2s}\,\frac{e^{-2\vartheta\lambda}}{\sqrt{q^4+s^2}}\,[\mu\cos(2\vartheta\mu)+\lambda\sin(2\vartheta\mu)]$$

und

$$\int_0^\infty \frac{x^2\cos 2\vartheta x\,dx}{(x^2+q^2)^2+s^2} = \frac{\pi}{2s}\,e^{-2\vartheta\lambda}\,[\mu\cos(2\vartheta\mu)-\lambda\sin(2\vartheta\mu)].$$

Mit Berücksichtigung der Beziehung

$$\lambda - \frac{q^2\lambda}{\sqrt{q^4+s^2}} = \frac{s}{\sqrt{q^4+s^2}}\,\mu$$

aber fliesst hieraus weiter, dass

$$\int_0^\infty \frac{(x^2+q^2)\cos 2\vartheta x}{(x^2+q^2)^2+s^2}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{q^4+s^2}}\,e^{-2\lambda\vartheta}\,[\lambda\cos 2\mu\vartheta - \mu\sin 2\mu\vartheta]$$

sein muss.

III. Bezeichnet $\alpha$ eine positive Constante und $n$ eine ganze Zahl, so besteht unsern frühern Betrachtungen zufolge die Gleichung

---

*) Siehe §. 99.

$$14.\quad \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi e^{-\alpha}}{2^{2n-1}\Gamma(n)} \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\Gamma(2n-r-1)}{\Gamma(n-r)\,\Gamma(r+1)} (2\alpha)^r \text{*)}.$$

Wir können dieselbe auch dadurch beweisen, dass wir zuerst die Bestimmung des Integrales

$$15.\qquad y = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x\,dx}{(1+x^2)^n x} - \frac{\pi}{2}$$

von der Integration einer linearen Differentialgleichung der $2n^{ten}$ Ordnung abhängig machen. In folgender Weise aber ist dies möglich.

Durch eine wiederholte Anwendung des Leibnitz'schen Satzes von der Differentiation eines Integrales nach einem Parameter $\alpha$ ergeben sich nämlich aus 15. nach und nach die Beziehungen:

$$16.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial\alpha} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\,dx}{(1+x^2)^n}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} = -\int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{(1+x^2)^n}\,dx; \\[2ex] \dfrac{\partial^3 y}{\partial\alpha^3} = -\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos\alpha x}{(1+x^2)^n}\,dx; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial\alpha^4} = \int_0^\infty \frac{x^3\sin\alpha x}{(1+x^2)^n}\,dx; \\[2ex] \dfrac{\partial^5 y}{\partial\alpha^5} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^4\cos\alpha x}{(1+x^2)^n}\,dx, \; \ldots \; \frac{\partial^{2n} y}{\partial\alpha^{2n}} = \pm\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}\sin\alpha x}{(1+x^2)^n}\,dx, \end{cases}$$

und daher wird

$$17.\qquad y - \binom{n}{1}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} + \binom{n}{2}\frac{\partial^4 y}{\partial\alpha^4} - \binom{n}{3}\frac{\partial^6 y}{\partial\alpha^6} + \ldots$$

$$\pm \frac{\partial^{2n} y}{\partial\alpha^{2n}} = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Bildet man nun die charakteristische Gleichung

$$f(r) = 1 - \binom{n}{1} r^2 + \binom{n}{2} r^4 - \ldots \pm r^{2n} = (1-r^2)^n = 0,$$

so zeigt sich, dass jede ihrer Wurzeln $\pm 1$ eine $n$fache ist und dass somit die Ausdrücke

*) Zu vergleichen sind hier die Abhandlungen von Catalan und Serret in Liouville's Journal T. V. et VIII.

$$e^{\overset{+}{-}\alpha}; \quad \alpha e^{\overset{+}{-}\alpha}, \quad \alpha^2 e^{\overset{+}{-}\alpha}, \ldots \alpha^{n-1} e^{\overset{+}{-}\alpha}$$

particuläre Integrale der Differentialgleichung 17. liefern werden. Erwägt man aber, dass $y$ nicht unbestimmt mit $\alpha$ wachsen kann, so wird offenbar nur die Wurzel $r = -1$ zur Bildung der besondern Integrale hier benutzt werden können. Unser Integral 15. muss demnach diese Form besitzen:

$$18. \; y = e^{-\alpha}\left[A_0 + \frac{A_1}{1}\alpha + \frac{A_2}{1.2}\alpha^2 + \ldots + \frac{A_m}{m\,!}\alpha^m + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(n-1)!}\alpha^{n-1}\right] = e^{-\alpha}.P,$$

wenn wir — der leichtern Rechnung halber — den willkürlichen Constanten $A_1, A_2, \ldots$ noch die angezeigten Coefficienten beifügen. Sind folglich die willkürlichen Constanten bestimmt worden, so wird augenscheinlich die Ermittlung des Integrales $\int\limits_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^n}\,dx$ nur noch eine weitere Behandlung der Gleichung

$$19. \; \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -e^{-\alpha}\left[P - \frac{\partial P}{\partial \alpha}\right] = -e^{-\alpha}\Big[(A_0 - A_1) + (A_1 - A_2)\alpha + (A_2 - A_3)\frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + (A_{n-2} - A_{n-1})\frac{\alpha^{n-2}}{n-2!} + \frac{A_{n-1}}{n-1!}\alpha^{n-1}\Big]$$

erfordern.

Zur Bestimmung der willkürlichen Constanten $A_1, A_2, \ldots$ aber werden wir in sehr einfacher Weise gelangen, indem wir die in 18. ausgedrückte Beziehung $(n-1)$mal nach $\alpha$ deriviren und darauf in jeder der erzielten Gleichungen $\alpha$ mit Null zusammenfallen lassen.

Da nun allgemein

$$\frac{d^s(e^{-\alpha}P)}{d\alpha^s} = (-1)^s e^{-\alpha}\left[1 - \frac{dP}{d\alpha}\right]^s,$$

d. h.

$$\frac{d^s(e^{-\alpha}P)}{d\alpha^s} = (-1)^s e^{-\alpha}\left[P - \binom{s}{1}\frac{dP}{d\alpha} + \binom{s}{2}\frac{d^2P}{d\alpha^2} - \cdots \pm \frac{d^sP}{d\alpha^s}\right]$$

ist, so folgt sogleich für $\alpha = 0$

$$\left[\frac{d^s y}{d\alpha^s}\right]_{\alpha=0} = (-1)^s\left[A_0 - \binom{s}{1}A_1 + \binom{s}{2}A_2 - \ldots \pm A_s\right].$$

Und wird hierin $s$ allmählich $= 0, 1, \ldots n-1$ gewählt, so findet man leicht, dass allgemein

$$20. \quad A_s = y_0 + \binom{s}{1}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 + \binom{s}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}\right)_0 + \ldots + \left(\frac{\partial^s y}{\partial \alpha^s}\right)_0$$

sein wird. Die den verschiedenen Differentialquotienten von $y$ angehängte Null soll dabei den Werth der Abgeleiteten für $\alpha = 0$ ausdrücken.

Nun erkennt man aber aus 16. auf den ersten Blick, dass für ein gerades $m$ $\left(\frac{\partial^m y}{\partial \alpha^m}\right)_0 = 0$, für ein ungerades $m$ hingegen

$$\left(\frac{\partial^m y}{\partial \alpha^m}\right)_0 = \pm \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, dx}{(1+x^2)^n} = \pm \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{m}{2}-1}\, dx}{(1+x)^n} = \pm \tfrac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(n)}$$

Statt finden wird, je nachdem nämlich $m \equiv +1, -1 \pmod{4}$ ist. Führt man also diese Werthe in Gleichung 20. ein, so hat man wegen $y_0 = -\frac{\pi}{2}$ die nachstehende Relation

$$21. \quad A_s + \frac{\pi}{2} = \left[\binom{s}{1}\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) - \binom{s}{3}\Gamma(\tfrac{3}{2})\Gamma(n-\tfrac{3}{2}) + \binom{s}{5}\Gamma(\tfrac{5}{2})\Gamma(n-\tfrac{5}{2}) - \ldots\right]\frac{1}{2\Gamma(n)}.$$

Behufs der nachfolgenden Betrachtungen werden wir indess statt derselben zweckmässiger ein in trigonometrischer Form dargestelltes Integral benutzen. Schreiben wir nämlich $x^2 = \operatorname{tang} \vartheta^2$, so geht das Integral $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\, dx}{(1+x^2)^n}$ in das folgende $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta^{m-1} \cos \vartheta^{2n-m-1}\, d\vartheta$ über, und sonach wird

$$22. \quad A_s + \frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} \cos \vartheta^{2n-s-1} \left[\binom{s}{1} \sin \vartheta \cos \vartheta^{s-1} - \binom{s}{3} \sin \vartheta^3 \cos \vartheta^{s-3} + \binom{s}{5} \sin \vartheta^5 \cos \vartheta^{s-5} - \ldots\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta^{2n-s-1} \frac{\sin s\vartheta}{\sin \vartheta}\, d\vartheta.$$

Daraus aber fliesst weiter, dass die Differenz

$$A_{s-1} - A_s = \left(A_{s-1} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(A_s + \frac{\pi}{2}\right)$$

mit

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta^{2n-s-1} \cos(s-1)\vartheta\, d\vartheta = -\frac{\pi}{2^{2n-s}} \frac{\Gamma(2n-s)}{\Gamma(n-s+1)\Gamma(n)}$$

gleichbedeutend ist. Der Coefficient $A_{n-1}$ dagegen bestimmt sich mit Rücksicht auf die in §. 78. gefundene Liouville'sche Gleichung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\psi\cos\psi^{\alpha-1}}{\sin\psi}\, d\psi = \frac{\pi}{2}$$

durch die nebenstehenden Relationen:

$$A_{n-1} + \frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta^n \frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta^{n-2} \frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta^{n-2}\cos n\vartheta\, d\vartheta - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta^{n-2}\cos(n-2)\vartheta\, d\vartheta^{*}) = \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2^n}.$$

Mit Benutzung dieser Werthe nimmt daher Gleichung 19. diese Form jetzt an:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^n}\, dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{e^{-\alpha}}{\Gamma(n)} \left[\frac{\Gamma(2n-1)}{\Gamma(n+1-1)} + \frac{\Gamma(2n-1-1)}{\Gamma(n+1-2)} \frac{2\alpha}{1} + \frac{\Gamma(2n-1-2)}{\Gamma(n+1-3)} \frac{(2\alpha)^2}{1.2} + \dots\right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma[2n-1-(n-2)]}{\Gamma[n+1-(n-1)]} \frac{(2\alpha)^{n-2}}{n-2!} + \frac{\Gamma[2n-1-(n-1)]}{\Gamma[n+1-n]} \frac{(2\alpha)^{n-1}}{n-1!}\right],$$

d. h.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^n}\, dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{e^{-\alpha}}{\Gamma(n)} \sum_0^{n-1} \frac{\Gamma(2n-r-1)}{\Gamma(n-r)\,\Gamma(r+1)} (2\alpha)^r.$$

*) Man beachte hierbei die in §. 78. bewiesene Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi^{p-1}\cos q\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2^p} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)},\ p>0.$$

Vergleicht man noch die Formeln 21. und 22., so hat man für $s \leqq n-1$ eine Darstellung des Integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta^{2n-s-1} \frac{\sin s\vartheta}{\sin \vartheta}\, d\vartheta$$

durch Gammafunctionen, und hieraus könnte man wieder eine ähnliche Beziehung für das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta^{2n-s-1} \sin (s-1)\, \vartheta \operatorname{cotg} \vartheta\, d\vartheta$$

ableiten. Mehr Interesse bietet jedoch eine andere, vo[illegible] Catalan gefundene Relation zwischen Gammafunctionen.*)

Beachtet man nämlich die bekannte Eigenschaft d[illegible] Binomialcoefficienten

$$\binom{s+1}{p} = \binom{s}{p} + \binom{s}{p-1}, \text{ d. h. } \binom{s}{p} - \binom{s+1}{p} = -\binom{s}{p-1}$$

so folgt einerseits

$$\left(A_s + \frac{\pi}{2}\right) - \left(A_{s+1} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\Gamma(n)}\left\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) - \binom{s}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})\Gamma(n-\tfrac{3}{2}) + \binom{s}{4}\Gamma(\tfrac{5}{2})\Gamma(n-\tfrac{5}{2}) - \cdots\right\}$$

und hierin heisst das letzte Glied $\pm \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{s+1}{2}\right)$, oder $\mp \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{s}{2}\right)$, je nachdem $s$ gerade oder [illegible]n-gerade ist.

Andererseits hingegen findet diese Beziehung Statt:

$$\left(A_s + \frac{\pi}{2}\right) - \left(A_{s+1} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2^{2n-s-1}} \frac{\Gamma(2n-s-1)}{\Gamma(n-s)\,\Gamma(n)},$$

und daher wird nun

$$(23.)\quad \frac{\pi}{2^{2n-s-2}} \frac{\Gamma(2n-s-1)}{\Gamma(n-s)} = \Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) - \binom{s}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{3}{2})$$
$$+ \binom{s}{5}\,\Gamma(\tfrac{5}{2})\,\Gamma(n-\tfrac{5}{2}) - \ldots$$

In dieser Formel bedeuten also, um es nochmals zu wiederholen, $n$ und $s$ absolute ganze Zahlen, von denen $s < n-1$ sein muss.

*) Liouville. Journal de mathématiques etc. T. V. p. 108 etc.

Rücksichtlich des Historischen diene folgende Bemerkung.

Die Bestimmung des Integrales $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^n} \, dx$ mittelst einer Differentialgleichung der $2n^{ten}$ Ordnung ist zuerst von Catalan ausgeführt worden, nachdem schon Poisson die Werthermittelung des allgemeineren Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \, dx}{A + Bx^2 + Cx^4 + \ldots + x^{2n}},$$

in welchem das Polynom $A + Bx^2 + Cx^4 + \ldots + x^{2n}$ keine reellen Wurzeln besitzen darf, von der Integration einer solchen Differentialgleichung abhängig gemacht hatte.*) Beide Mathematiker aber wurden hierbei auf die absurde Gleichung $\int_0^\infty \cos \alpha x \, dx = 0$ geführt. Diese Schwierigkeit vermied Serret, indem er zur Herstellung der Differentialgleichung das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+x^2)^n} \frac{dx}{x} - \frac{\pi}{2}$ benutzte und für den Fall $n = 1$ die äusserst einfache Rechnung wirklich ausführte.**) Für den allgemeinen Fall dagegen scheint nur ein mit dem unserigen ähnlicher Gedankengang als zweckmässig sich zu erweisen, was z. B. von Catalan's Darstellung gilt. Man beachte bei dem Studium des Catalan'schen Aufsatzes nur den Umstand, dass die dortigen Coefficienten $A_0, A_1, A_2 \ldots$ eine von der unserigen abweichende Bedeutung besitzen, nämlich mit unserer Differenz $A_{s+1} - A_s$ zusammenfallen.

## §. 107.

### Anwendung simultaner Differentialgleichungen.

Die Integrale $\int_0^\infty e^{-x^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left\{\frac{\alpha^2}{x^2}\right\} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{\alpha\sqrt{2}\right.$.

Im Hinblick auf die früher bewiesene Euler'sche Gleichung

*) Journal de l'école polytechnique, cah. 16, page 222 et Nouveau Bulletin de la Société philomatique nro 50.

**) Liouville. Journal de math. T. VIII pages 21 et 22.

$$\int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k+\vartheta i)^a}$$

bemerkten wir in §. 105, dass unter Umständen die Bestimmung eines vorgelegten Integrales von der Integration zweier simultanen Differentialgleichungen abhängig gemacht werden könne. Tritt ein derartiger Fall ein, so bildet natürlich das gegebene Integral eine Combination zweier verschiedenen Integrale. Und zwar werden diese in einer solchen Abhängigkeit zu einander stehen müssen, dass durch eine zweckmässige Behandlung der Integrale eben jene gleichzeitigen Differentialgleichungen erscheinen.

Ausser den schon erörterten Integralen

$$\int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\{ \vartheta x \,.\, dx$$

gehören auch die folgenden, für die Theorie der Wärme sehr wichtigen Integrale

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx,\; v = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx$$

hier her. Offenbar sind dieselben echte Brüche, weil die Functionen sin und cos nur zwischen $-1$ und $+1$ sich bewegen können. Stellen wir nun die beiden Integrale in der einen Form

$$1. \qquad s = u - vi = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} i}\, dx$$

uns vor, so dürfen wir der Vermuthung Raum geben, dass die schon öfter bewiesene Formel*)

$$\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}}\, dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}\, e^{-2\alpha}$$

unmittelbar zur schnellen Darstellung der genannten Integrale wird dienen können. Und in der That, ersetzen wir $\alpha^2$ durch $\alpha^2 i$, also $\alpha$ durch $\alpha \sqrt{i} = \frac{\alpha}{2}[+1 \pm i]\sqrt{2}$; so kommt

*) Vergl. die §§. 23, 44, 99, 105.

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}i}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha\sqrt{2}(1+i)},$$

d. h.

$$2. \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2}$$

und

$$3. \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}.$$

Denn da $\alpha$ stillschweigend als positive Constante angesehen ist, so kann der reelle Exponent von $e$ nur $-\alpha\sqrt{2}$ heissen. Nicht so unmittelbar einleuchtend aber ist die andere Frage, welches von den beiden Vorzeichen das Sinusintegral führen muss. Jedoch entscheidet sich dieselbe leicht, wenn man beachtet, dass durch eine zweimalige Differentiation des Cosinusintegrales nach $\alpha$ das Sinusintegral sich ergiebt*), die zweite Derivirte von $e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2}$ aber, also

$$D_\alpha^2\left[e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2}\right] = 4\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}$$

mit dem Pluszeichen behaftet ist. Mithin kann in Gleichung 3. nur das obere Zeichen gelten. Abgesehen hiervon wird indess auch die gleichfolgende strenge Begründung der Relationen 2. und 3. uns Gewissheit verschaffen. Einer solchen Rechtfertigung aber bedarf es noch, weil die zur Induction benutzte Formel nur für reelle Werthe von $\alpha$ bewiesen wurde.

*) Man hat

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = -\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)\frac{2\alpha\,dx}{x^2} = -\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{x_1^2}}\sin(x_1^2)\frac{2\alpha^2\,dx_1}{x_1^2}\frac{x_1^2}{\alpha^2}$$

$$= -2\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}}\sin(x^2)\,dx;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = 2\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}}\sin(x^2)\frac{2\alpha}{x^2}\,dx = 4\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx.$$

Differentiiren wir Gleichung 1. nach $\alpha$, so gewinnen wir die Beziehung

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{du}{d\alpha} - i\,\frac{dv}{d\alpha} = -\,2i\int\limits_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}i}\,\frac{\alpha}{x^2}\,dx,$$

und hieraus folgt durch Einführung der neuen Veränder-lichen $x_1 = \frac{\alpha}{x}$

$$\frac{ds}{d\alpha} = -\,2i\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{x_1^2} - x_1^2 i}\,dx_1.$$

Wird aber nochmals nach $\alpha$ derivirt, so entspringt

$$\frac{d^2 s}{d\alpha^2} = 4\,\alpha i\int\limits_0^\infty e^{-x^2 i - \frac{\alpha^2}{x^2}}\,\frac{dx}{x^2} = 4i\int\limits_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}i}\,dx,$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 s}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - i\,\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} = 4i\,(u - vi).$$

Durch Trennung des Reellen und Imaginären entstehen folglich jetzt die beiden Differentialgleichungen

I. $$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = 4v \text{ und } \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} = 4u.$$

Um ihre Integralgleichungen zu entdecken, setzen wir auf Grund der Beziehungen 2. und 3.

II. $$u = p\,e^{\lambda\alpha} \text{ und } v = q\,e^{\lambda\alpha},$$

wo $p$, $q$, $\lambda$ noch näher zu bestimmende Constanten ausdrücken.

Bezeichnen nun wirklich die in II. genannten Grössen die Integrale der Differentialgleichungen I., so müssen ihnen zufolge offenbar die Beziehungen gelten:

$$p\,\lambda^2\,e^{\lambda\alpha} - 4\,q\,e^{\lambda\alpha} = 0 \text{ und } q\,\lambda^2\,e^{\lambda\alpha} + 4\,p\,e^{\lambda\alpha} = 0.$$

Daraus aber fliesst

$$\frac{q}{p} = \tfrac{1}{4}\,\lambda^2 \text{ und } \frac{p}{q} = -\,\tfrac{1}{4}\,\lambda^2,$$

und demnach besitzt $\lambda$ den Werth

$$\lambda = \sqrt{\pm 4\sqrt{-1}},$$

d. h. $\lambda$ stellt die Wurzeln der biquadratischen Gleichung $y^4 = -16$ vor.

Schreiben wir nun der bessern Uebersicht halber $\lambda$ in folgender Form

$$\lambda = \frac{2\,[\pm(1 \pm \sqrt{-1})]}{\sqrt{2}} = \varepsilon\,(1 \pm i)\,\sqrt{2},$$

und bedenken wir noch, dass $\frac{q}{p} : \frac{p}{q}$ die Beziehung $q = \pm\, p\, i$ giebt; so können wir jetzt unsern Gleichungen II. die Gestalt

$$u = p\, e^{\alpha\sqrt{2}\cdot\varepsilon(1 \pm i)} \text{ und } v = \pm\, p\, i\, e^{\alpha\sqrt{2}\cdot\varepsilon(1 \pm i)}$$

geben. Diese Ausdrücke sind offenbar vierdeutig; je zwei besondere, derselben Zeichencombination entsprechende Functionen $u$ und $v$ genügen somit den Differentialgleichungen I. Dies gilt selbst dann noch, wenn wir jede der besonderen Functionen mit einer speciellen Constanten $p$ multipliciren, die in den einander entsprechenden Functionen den nämlichen Werth besitzt. Das Integral jeder der Differentialgleichungen setzt sich hiernach aus vier Theilen zusammen — und um dies in Kürze sichtbar zu machen, wollen wir die Functionen $u$ und $v$ in der nebenstehenden Form darstellen

$$u = \Sigma\, p\, e^{\alpha\sqrt{2}\cdot\varepsilon(1 \pm i)},\quad v = \Sigma \pm p i\, e^{\alpha\sqrt{2}\cdot\varepsilon(1 \pm i)}.$$

Bedenkt man nun, dass $u$ und $v$ zu den echten Brüchen gehören, so kann das Zeichen $+$ für $\varepsilon$ nicht Statt finden; sonach können $u$ und $v$ nur die folgende Gestalt besitzen

$$u = \Sigma\, p\, e^{-\alpha\sqrt{2}\,(1 \pm i)},\quad v = \Sigma \pm p i\, e^{-\alpha\sqrt{2}\,(1 \pm i)}.$$

Von diesen Ausdrücken behandeln wir zunächst den zweiten. Offenbar muss die eine der in demselben enthaltenen besondern Constanten mit $+i$, die andere mit $-i$ multiplicirt sein, damit für $\alpha = 0$ $v$ den Werth Null erwirbt. Nur unentschieden bleibt vorläufig, welche der Constanten $p$, $p_1$ mit $+i$ durch Multiplication zu verbinden ist. Indess beantwortet sich diese Frage leicht, wenn wir die Exponentialgrössen in die goniometrische Form umsetzen, die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 4\, v$ berücksichtigen und schliesslich das Reelle vom Imaginären sondern. Alsdann nämlich hat man nach und nach:

$$u = e^{-\alpha\sqrt{2}}\left[p\, e^{-\alpha\sqrt{2}i} + p_1 e^{\alpha\sqrt{2}\cdot i}\right]$$
$$= e^{-\alpha\sqrt{2}}\left[(p+p_1)\cos\alpha\sqrt{2} - i\,(p-p_1)\sin\alpha\sqrt{2}\right],$$

$$v = e^{-\alpha\sqrt{2}}[\pm ip\,e^{-\alpha\sqrt{2}.i} \mp ip_1\,e^{\alpha\sqrt{2}i}]$$

$$= e^{-\alpha\sqrt{2}}[\pm(p+p_1)\sin\alpha\sqrt{2} \pm i(p-p_1)\cos\alpha\sqrt{2}],$$

$$\pm 4i(p-p_1)\cos\alpha\sqrt{2}\,.\,e^{-\alpha\sqrt{2}} = D_\alpha^2 e^{-\alpha\sqrt{2}}[-i(p-p_1)\sin\alpha\sqrt{\ldots}$$

$$= 4i(p-p_1)\cos\alpha\sqrt{2}\,.\,e^{-\alpha\ldots}$$

Daher kann in der letzten Formel links nur das Pluszeic[illegible] gelten, und folglich muss $p_1$ mit $-i$ multiplicirt sein.

Die zweite unserer obigen Gleichungen besitzt mit[illegible] folgende Gestalt

$$v = pi\,e^{-\alpha\sqrt{2}(1+i)} - ip_1\,e^{-\alpha\sqrt{2}(1-i)}.$$

Erwägt man nun, dass für $\alpha = 0$ auch $v$ in Null überg[illegible] $u$ hingegen mit $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ zusammenfällt, so gewinnt man Beziehungen

$$p + p_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ und } p - p_1 = 0,$$

d. g.

$$p = \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi} = p_1.$$

Und sonach wird schliesslich

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2}$$

und

$$v = \int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}.$$

## §. 108.

### Bemerkungen zu dem Vorigen und den Euler'schen Gleichungen in §. 68.

1. In dem Vorhergehenden haben wir die Ermittlung der Integrale der beiden Differentialgleichungen $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = 4v$, $\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} = 4u$ aus Dirichlet's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen entlehnt.*) Einfacher gelangt man indess zum

*) Die vollständige Wiedergabe des Dirichlet'schen Gedankenganges in der Behandlung der Integrale $\int_0^\infty e^{-x^2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{\frac{\alpha^2}{x^2}\right\}dx$ findet man in den

Ziele durch sofortige Integration der oben gewonnenen Gleichung

$$1. \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial \alpha^2} - 4 i s = 0.$$

Denn bildet man die charakteristische Gleichung

$$f(r) = r^2 - 4i = 0,$$

so heissen die beiden Wurzeln derselben $r = 2\sqrt{i}$ und $r = -2\sqrt{i}$; mithin muss zufolge der bekannten Theorie linearer Differentialgleichungen ohne zweites Glied das allgemeine Integral der Differentialgleichung 1. durch den Ausdruck

$$s = c_1 e^{2\alpha\sqrt{i}} + c_2 e^{-2\alpha\sqrt{i}}$$

vorgestellt werden. Beachtet man nun, dass

$$s = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} i} dx$$

mit $\alpha$ nicht unbegrenzt wachsen kann; so folgt sogleich, dass die willkürliche Constante $c_1$ den Werth Null besitzen muss. Nun ist aber für $\alpha = 0$ $s = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ und daher auch $c_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} i} dx$ ist sonach gleichbedeutend mit dem Ausdrucke

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2\alpha\sqrt{i}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}(1 \pm i)},$$

dessen weitere Behandlung oben gezeigt wurde.

2: Bei Gelegenheit dieser Betrachtung wollen wir noch einige Worte den Euler'schen Formeln

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \Big| \vartheta x \, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \Big\{ a\psi, \; \psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\vartheta}{k}$$

widmen, deren strenge Begründung wir bekanntlich früher in der Dirichlet'schen Weise gegeben haben. Wir fanden nämlich damals die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{d\vartheta} = -\frac{ai}{k+\vartheta i} s,$$

---

von Hattendorff herausgegebenen Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen, Seite 134—136.

$$s = u - vi = \int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx$$

war.

Auch diese Differentialgleichung gestattet eine unmittelbare Integration; denn schreibt man dieselbe in der Form

$$\frac{ds}{s} = - a\, i\, \frac{d\vartheta}{k + \vartheta i},$$

so ergiebt sich augenblicklich

$$\lg s = \lg (u - vi) = - a \lg (k + \vartheta i) + \text{const.}$$

Nun ist für $\vartheta = 0$

$$\lg s = \lg \left[\frac{\Gamma(a)}{k^a}\right]$$

und demnach

$$\text{const.} = \lg \left(\frac{\Gamma(a)}{k^a} \cdot k^a\right) = \lg \Gamma(a).$$

Wir erhalten also jetzt die Gleichung

2. $$\lg s = - a \lg (k + \vartheta i) + \lg \Gamma(a).$$

Beachtet man aber, dass für positive Werthe von $u$

$$\lg ((u - vi)) = \tfrac{1}{2} \lg (u^2 + v^2) - i \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u} + \lg ((1)),$$

dagegen für ein negatives $u$

$$\lg ((u - vi)) = \tfrac{1}{2} \lg (u^2 + v^2) - i \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u} + i\pi + \lg ((1))$$

und wegen des positiven $k$

$$\lg ((k + \vartheta i)) = \tfrac{1}{2} \lg (k^2 + \vartheta^2) + i \operatorname{arc\,tang} \frac{\vartheta}{k} + \lg ((1))$$

ist, wo die doppelte Klammer in $\lg ((1))$ etc. nach Cauchy bekanntlich die Vieldeutigkeit der Logarithmen anzeigt*); so folgen nun aus Gleichung 2. durch Sonderung des Reellen und Imaginären die frühern Relationen:

$$\tfrac{1}{2} \lg (u^2 + v^2) = - \frac{a}{2} \lg (k^2 + \vartheta^2) + \lg \Gamma(a),$$

also

$$u^2 + v^2 = (k^2 + \vartheta^2)^{-a} \, [\Gamma(a)]^2$$

und

---

*) Cauchy. Algebraische Analysis, Einleitg., Kap. 9. — $\lg ((1)) = \pm 2 r \pi i$, wo $r$ beliebig und ganzzahlig.

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u} = a \operatorname{arc\,tang} \frac{\vartheta}{k},\ u > 0,$$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u} = a \operatorname{arc\,tang} \frac{\vartheta}{k} - \pi,\ u < 0,$$

d. g.

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tang} a\,\psi = \operatorname{tang}(a\,\psi - \pi).$$

Augenscheinlich sind bei diesem Verfahren die einfachsten Logarithmen der Rechnung zu Grunde gelegt, was auch geschehen darf, solange die Grössen $a \operatorname{arc\,tg} \frac{\vartheta}{k}$ und $a \operatorname{arc\,tg} \frac{\vartheta}{k} - \pi$ das für $\operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u}$ und $\operatorname{arc\,tang} \frac{\vartheta}{k}$ vorgeschriebene Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ nicht überschreiten. Tritt aber das Gegentheil ein, so wird man zur Vermeidung von Ungereimtheiten dem Logarithmus von $s = u - vi$ ein Vielfaches von $\pi i$ hinzufügen müssen und die darin enthaltene ganze Zahl $r$ den vorkommenden Umständen gemäss bestimmen*); den Logarithmus von $k + \vartheta i$ dagegen wird man immer in der einfachsten Gestalt

$$\lg(k + \vartheta i) = \tfrac{1}{2} \lg(k^2 + \vartheta^2) + i \operatorname{arc\,tang} \frac{\vartheta}{k}$$

sich vorstellen dürfen.

3. Nicht ganz ohne Interesse dürfte noch die Bemerkung sein, dass die beiden Integrale $\int_0^\infty e^{-x^2} \begin{vmatrix} \cos \\ \sin \end{vmatrix} \frac{\alpha^2}{x^2} \bigg| dx$ durch eine nach $\alpha$ zwischen den Grenzen 0 und $\alpha$ ausgeführte Integration der früher in §. 99. bewiesenen Formeln

---

*) Die beiden oben erwähnten Formen für $\lg((s))$ können in die eine

$$\lg((u - vi)) = \tfrac{1}{2} \lg(u^2 + v^2) - i \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u} + M\pi i$$

zusammengefasst werden, wo für $M$ entweder $\pm 2r$, oder $\pm(2r + 1)$ zu wählen ist, je nachdem man $u > 0$, oder $u < 0$ hat.

Zugleich ersieht man hieraus, dass zur Herleitung der Beziehung $\frac{v}{u} = \operatorname{tang} a\,\psi$ die nähere Angabe von $M$ nicht einmal erforderlich ist und dass die Bestimmung der obigen Integrationsconstanten immer in der angedeuteten Weise geschehen kann. Jedes Multiplum von $\pi i$ bezeichne man nur immer durch $M$.

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} \sin(x^2)\, dx = \tfrac{1}{4}\sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} [\cos\alpha\sqrt{2} + \sin\alpha\sqrt{2}]$$

und

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} \cos(x^2)\, dx = \tfrac{1}{4}\sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} [\cos\alpha\sqrt{2} - \sin\alpha\sqrt{2}]$$

gefunden werden können und dass folglich umgekehrt diese aus jenen durch Differentiation hervorgehen müssen.

In der That, setzt man zunächst $\frac{\alpha^2}{x^2} = x_1^2$, so bekommt man leicht die Beziehungen

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} \sin(x^2)\, dx = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) \frac{\alpha\, dx}{x^2};$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} \cos(x^2)\, dx = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) \frac{\alpha\, dx}{x^2}.$$

Und daher wird einerseits

$$\int_0^\alpha d\alpha \int_0^\infty e^{-x^2} \sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) \frac{\alpha}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \int_0^\alpha \sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) d\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\left[1 - \cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)\right] dx = \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi} - \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) d.$$

und

$$\int_0^\alpha d\alpha \int_0^\infty e^{-x^2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) \frac{\alpha}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} \sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx.$$

Anderseits aber findet man durch theilweise Integration sofort die Gleichungen

$$\int_0^\alpha e^{-\alpha\sqrt{2}} \cos\alpha\sqrt{2}\, d\alpha = e^{-\alpha\sqrt{2}}\, \frac{\sin\alpha\sqrt{2} - \cos\alpha\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^\alpha e^{-\alpha\sqrt{2}} \sin\alpha\sqrt{2}\, d\alpha = -\, e^{-\alpha\sqrt{2}}\, \frac{\sin\alpha\sqrt{2} + \cos\alpha\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Mithin hat man jetzt die augenscheinlich mit den frühern zusammenfallenden Beziehungen

$$2.\quad \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}-\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx=\tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}-\tfrac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\frac{\cos\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

und

$$3.\quad \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx=\tfrac{1}{4}\sqrt{2\pi}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\frac{\sin\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

4. Näherliegend als vorhin ist jedoch die Ableitung der Integrale 2. und 3. aus den Formeln 11., §. 106., II.

$$\int_0^\infty \frac{x\sin 2\alpha x}{x^4+1}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3\sin 2\alpha x}{x^4+1}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2}.$$

Berücksichtigt man z. B. bloss die erste dieser Gleichungen, was offenbar genügt, weil ja die andere durch zweimalige Differentiation nach $\alpha$ aus jener entspringt; so ergiebt sich mit Benutzung der sofort durch die Euler'sche Formel

$$\int_0^\infty e^{-zx}\sin\vartheta x\,.\,x^{a-1}\,dx=\frac{\Gamma(a)}{(z^2+\vartheta^2)^{\frac{a}{2}}}\sin a\,\psi$$

zu rechtfertigenden Gleichung

$$\frac{1}{x^4+1}=\int_0^\infty e^{-zx^2}\sin z\,dz$$

zunächst die Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x\sin 2\alpha x}{x^4+1}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x\sin 2\alpha x\,dx\int_0^\infty e^{-x^2z}\sin z\,dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sin z\,dz\int_0^\infty e^{-zx^2}\,x\sin 2\alpha x\,dx.$$

Nun folgt aus der Relation

$$\int_0^\infty e^{-zx^2} \cos 2\alpha x \, dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \, e^{-\frac{\alpha^2}{z}}$$

durch Derivation nach $\alpha$

$$\int_0^\infty e^{-zx^2} x \sin 2\alpha x \, dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \, e^{-\frac{\alpha^2}{z}} \cdot \frac{\alpha}{z}.$$

Mithin wird jetzt

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin z \, dz \int_0^\infty e^{-zx^2} x \sin 2\alpha x \, dx = \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{z}} \frac{\sin z}{z\sqrt{z}} \, dz,$$

d. g., wenn $\frac{\alpha}{\sqrt{z}} = x$ gesetzt wird,

$$\frac{\alpha}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{z}} \frac{\sin z}{z\sqrt{z}} \, dz = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx,$$

also ist

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi} \, e^{-\alpha\sqrt{2}} \sin(\alpha\sqrt{2}).$$

## §. 109.

### 4. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{cix} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \, dx.$

Die meisten von den in §. 106. vorgeführten Integralen bilden offenbar specielle Fälle der von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirten rationalen Brüche von der Form $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, in welchen die beiden zu einander primen Polynome $\varphi(x)$ und $f(x)$ beziehungsweise vom $m^{ten}$ und $n^{ten}$ Grade sein sollen, wenn der Zähler $\varphi(x)$ dieser Brüche mit einer der Functionen Sinus oder Cosinus durch Multiplication verbunden ist, vorausgesetzt natürlich, dass solche Integralformen überhaupt gebildet werden dürfen. Dies nun ist, wie aus unsern frühern Erörterungen über die Integration der gebrochenen Functionen zwischen den Grenzen $\pm\infty$ sofort erhellt, im Allgemeinen immer, aber nur dann möglich, wenn

erstens die Wurzeln von $f(x)$ sämmtlish complex oder rein imaginär sind und wenn

zweitens der Grad des Polynomes $\varphi(x)$ kleiner, als der von $f(x)$ ist.*)

Im Vergleich zu der Integration der nicht mit Sinus oder Cosinus multiplicirten Brüche $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ aber findet jetzt der Unterschied Statt, dass nicht wie bei diesen der Zähler $\varphi(x)$ einen mindestens um zwei Einheiten niedrigeren Grad besitzen muss, als der Nenner $f(x)$. Denn schreiben wir wieder wie damals $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = x^{m-n}\,\psi(x)$, so entstehen jetzt die Integralformen $\int_{-\infty}^{\infty} x^{m-n}\,\psi(x) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{\vartheta x\right\} dx$, wo $\vartheta$ constant, und folglich ist

$$\int_p^q x^{m-n}\,\psi(x) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{\vartheta x\, dx = R\int_p^q x^{m-n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left[\vartheta x\,.\,dx.\right.\right.$$

Von den Integralen $\int_p^q x^{m-n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{\vartheta x\, dx\right.$ aber wissen wir, dass

---

*) Bezeichnet $x=\alpha$ eine solche einfache Wurzel von $f(x)=0$, für welche entweder der Cosinus, oder Sinus ebenfalls verschwindet, so wird das entsprechende Integral nicht sinnlos. Z. B. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\vartheta x}{x^2-r^2}\,dx$ ist nicht ohne Bedeutung, wenn $\vartheta$ einem beliebigen ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2r}$ gleich ist. Man hat unter dieser Voraussetzung in der That

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left[\frac{2s+1}{2r}\,\pi x\right] dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{r}\sin\frac{(2s+1)\pi}{2} = (-1)^{s+1}\frac{\pi}{r}.$$

(Siehe §. 106. II. Anmerkg. 1). Ebenso gehört

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\vartheta x}{x^2+r^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{r^2}\left[1-e^{-r\vartheta}\right]$$

hier her. Formen dieser Art wollen wir indess von unserer Betrachtung ausschliessen.

sie mit wachsendem $p$ und $q$ der Grenze Null sich näher[illegible] sofern $m - n < 0$, also $m < n$ ist. Zu bemerken ist üb[illegible]gens hierbei, dass behufs Anwendung des Maximum-Minimu[illegible]-Satzes die Grössen $p$ und $q$ in der Weise des §. 66. [illegible] wählen sind.

Im Gegensatz zu unserer ehemaligen Betrachtung d[illegible]r Brüche $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ wollen wir jetzt noch annehmen, dass eine W[illegible]zel $\alpha$ von $f(x)$ auch wiederholt vorkommen kann, dass al[illegible]o bei der Zerlegung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche Nenner von d[illegible]r Form $(x-\alpha)^n$ erscheinen dürfen. Stellen wir nun die beide[illegible]n Integrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cos cx\,dx$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}\sin cx\,dx$, in denen [illegible]c statt der Constanten $\vartheta$ gewählt ist, in der einen schon vo[illegible]n Cauchy*) gebrauchten Gestalt $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}e^{cxi}\,dx$ uns vor; so r[illegible] ducirt sich die Untersuchung derselben auf die Integratio[illegible]n eines Ausdruckes von der Form $\frac{A\,e^{cxi}}{(x-\alpha)^n}\,dx$ oder einfache[illegible]r $\frac{e^{cxi}\,dx}{(x-\alpha)^n}$. Wir gewinnen also das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{cxi}\,dx}{(x-\mu-\nu i)^n}$, wen[illegible] $\alpha = \mu + \nu i$ gesetzt wird, wo $\mu$ auch den Werth Null be[illegible] sitzen darf. Durch die Substitution $x - \mu = x'$ aber ge[illegible] das vorhergehende Integral in das folgende über:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{c(x+\mu)i}\,dx}{(x-\nu i)^n},$$

an dessen Statt wir einfach das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{cxi}\,dx}{(x-\nu i)^n}$$

setzen dürfen, weil wesentlich nur die Form des resultirende[illegible] Integrales Interesse für uns hat. Diese letztere Darstellung[illegible]

*) Journal de l'école polyt., cah. 19, p. 578.

weise unserer Aufgabe aber erinnert uns lebhaft an die frühere Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\vartheta i}\, d\vartheta}{(k+\vartheta i)^a} = \begin{cases} 0, & c < 0 \\ \frac{2\pi}{\Gamma(a)}\, e^{-kc}\, c^{a-1}, & c > 0, \end{cases}$$

mit deren Hülfe wir bekanntlich zuerst die Kenntniss der Laplace'schen Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos c\vartheta\, d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta \sin c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}\, d\vartheta$ uns erwarben. Es liegt daher der Gedanke sehr nahe, die erwähnte Beziehung auch jetzt zu verwerthen. Und in der That, beachten wir, dass $(x-\nu i)^n = (-i)^n (\nu+xi)^n$, so folgt sogleich die Relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}\, dx}{(x-\nu i)^n} = i^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}\, dx}{(\nu+xi)^n}.$$

Bezeichnet mithin $\nu$ eine positive Grösse, so ist hierdurch die Transformation des Integrales $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}\, dx}{(x-\nu i)^n}$ als beendigt anzusehen und folglich die Anwendung des obigen Satzes sofort gestattet. Für ein negatives $\nu$ hingegen ist das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}\, dx}{(\nu+xi)^n}$ nochmals umzuformen, nämlich in der Gestalt

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cxi}\, dx}{(-\nu-xi)^n} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cxi}\, dx}{(-\nu+xi)^n}$$

darzustellen.

Aus der vorliegenden Untersuchung ergiebt sich nun offenbar der Satz, dass ein Integral von der Form $\int_{-\infty}^{\infty} e^{cxi} \frac{\varphi(x)}{f(x)}\, dx$ stets auf die Zahlen $\pi$ und $e$ zurückgeführt werden kann.

Beispiele hierzu liefern die in §. 106. betrachteten Integrale. Um aber einige Fälle wenigstens vorzuführen, wollen wir die dort entwickelten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos\vartheta x\,dx}{(x^2+r^2)^2} = \frac{\pi}{2r^3}e^{-r\vartheta}.\frac{1+r\vartheta}{2} \text{ und } \int_0^\infty \frac{x\sin 2\vartheta x dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2}e^{-\vartheta\sqrt{2}}\sin$$

wo $\vartheta$ positiv sein soll, nochmals in Betracht ziehen.

Augenblicklich ergiebt sich nun, wenn wir zuvö das erstere Integral erörtern, dass $x = \pm ri$ die Wı des Polynomes $f(x)$ darstellen. Die Theilintegrale, w wir mithin jetzt zu betrachten haben, sind offenba folgenden

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\vartheta xi}\,dx}{(x\pm ri)^2} \text{ und } \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\vartheta xi}\,dx}{x\pm ri}.$$

Nun zeigt aber die vorhergehende Entwicklung, dass ı der Beziehungen

$$(-1)\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x\vartheta i}\,dx}{(-r+xi)^2} = -\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\vartheta xi}\,dx}{(r+xi)^2} = 0, \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\vartheta xi}\,dx}{r+xi} =$$

nur die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\vartheta xi}\,dx}{(x-ri)} = -\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\vartheta xi}\,dx}{(r+xi)^2} = -2\pi e^{-r\vartheta}\cdot\vartheta$$

und

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\vartheta xi}\,dx}{x-ri} = i\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\vartheta xi}\,dx}{r+xi} = 2\pi e^{-r\vartheta}$$

für unsere Untersuchung Bedeutung haben. Bei der legung des Bruches $\frac{1}{(x^2+r^2)^2}$ in Partialbrüche brauchen daher auch bloss die beiden Glieder

$$\frac{A}{(x-ri)^2} = -\frac{1}{4r^2}\frac{1}{(x-ri)^2} \text{ und } \frac{A_1}{x-ri} = -\frac{i}{4r^3}\frac{1}{x-ri}$$

zu berücksichtigen. Dies aber führt uns auf den Ausdr

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\vartheta xi}\,dx}{(x^2+r^2)^2} = -\frac{1}{4r^2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\vartheta xi}\,dx}{(x-ri)^2} - \frac{i}{4r^3}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\vartheta xi}\,dx}{x-ri}$$

$$= \frac{2\pi}{4r^2}e^{-r\vartheta}\vartheta - \frac{2\pi i^2}{4r^3}e^{-r\vartheta} = \frac{\pi}{2r^3}e^{-r\vartheta}(1+r$$

und demnach ist wie früher

$$\int_0^\infty \frac{\cos\vartheta x\,dx}{(x^2+r^2)^2} = \frac{\pi}{4r^3} e^{-r\vartheta}(1+r\vartheta).$$

Betrachten wir jetzt das Integral $\int_0^\infty \frac{x\sin 2\vartheta x}{x^4+1}dx$.

Die Wurzeln des Polynomes $f(x) = x^4 + 1$ werden hier bekanntlich durch die Ausdrücke

$$\alpha = \pm e^{\pm\frac{\pi}{4}i} = \pm\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}$$

vorgestellt, und demnach heissen die Coefficienten der Theilbrüche

$$A_1 = \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{1}{4}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{4}\right)\right] = -\frac{i}{4},$$

$$A_2 = \frac{i}{4},\ A_3 = \frac{i}{4},\ A_4 = -\frac{i}{4}.$$

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^4+1}e^{2\vartheta xi}dx = -\frac{i}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\vartheta xi}dx}{x-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{i}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\vartheta xi}dx}{x-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$+\frac{i}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\vartheta xi}dx}{x+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}} - \frac{i}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\vartheta xi}dx}{x+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}.$$

Nun ist

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\vartheta xi}dx}{x-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\vartheta(x-\frac{1}{2}\sqrt{2})i}dx}{x-i\sin\frac{\pi}{4}} = i\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\vartheta(x+\frac{1}{2}\sqrt{2})i}dx}{\sin\frac{\pi}{4}+xi}$$

$$= ie^{\vartheta\sqrt{2}i}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\vartheta xi}dx}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+xi} = i\,e^{\vartheta\sqrt{2}i}\,2\pi\,e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 2\vartheta}$$

also das erste Glied im vorhergehenden Ausdrucke

$$A_1\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\vartheta xi}dx}{x-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}e^{\vartheta\sqrt{2}i}\,e^{-\vartheta\sqrt{2}},$$

und

$$\frac{i}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\vartheta xi}\,dx}{x+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{i^2}{4}2\pi e^{-i\vartheta\sqrt{2}}\,e^{-\vartheta\sqrt{2}}=-\frac{\pi}{2}e^{-i\vartheta\sqrt{2}}e^{-\vartheta\sqrt{2}};$$

die beiden andern Integrale dagegen sind der Null gleich. Daher wird schliesslich

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,e^{2\vartheta xi}\,dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{2}e^{-\vartheta\sqrt{2}}\left[e^{\vartheta i\sqrt{2}}-e^{-\vartheta i\sqrt{2}}\right]=\pi i e^{-\vartheta\sqrt{2}}\sin\vartheta\sqrt{2}$$

und

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2\vartheta x\,dx}{x^4+1}=2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin 2\vartheta x}{x^4+1}\,dx=\pi e^{-\vartheta\sqrt{2}}\sin\vartheta\sqrt{2}.$$

## §. 110.

### 5. Das Dirichlet'sche Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-c\vartheta i}\,d\vartheta}{(l^2+\vartheta^2)(k+\vartheta i)^a}\cdot\frac{1}{(k_1+\vartheta i)^{a_1}}\cdot\frac{1}{(k_2+\vartheta i)^{a_2}}\cdots=\frac{\pi}{l}e^{-lc}\frac{1}{(k+l)^a}\cdot\frac{1}{(k_1+l)^{a_1}}\cdots$$

Im vierten Bande des Crelle'schen Journals für reine und angewandte Mathematik hat Dirichlet die Wissenschaft mit einem Integrale bereichert, das eine Fülle von einzelnen Resultaten in sich begreift, wie sie nur wenigen Integralen zukommt. Mit der Bildung dieses Integrales wollen wir uns jetzt beschäftigen, beschränken aber dabei im Einklang mit den bisherigen Betrachtungen die Werthe gewisser Constanten vorerst auf das Gebiet der reellen Grössen.

Bezeichnen $l$ und $c$ positive Constanten, so gelten bekanntlich die Beziehungen

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos c\vartheta}{l^2+\vartheta^2}\,d\vartheta=\frac{\pi}{l}e^{-lc}\quad\text{und}\quad\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin c\vartheta}{l^2+\vartheta^2}\,d\vartheta=0,$$

aus deren Combination sofort die neue Gleichung

$$1.\qquad\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-c\vartheta i}\,d\vartheta}{l^2+\vartheta^2}=\frac{\pi}{l}e^{-lc}$$

entspringt. Sie besitzt, wie man sieht, die Eigenthümlichkeit, dass die positive Grösse $c$ einerseits im reellen, andererseits hingegen im imaginären Exponenten erscheint. Und gerade diese besondere Eigenschaft unserer Relation ist von ausserordentlicher Tragweite. Denn multipliciren wir die früher bewiesene Euler'sche Gleichung

$$2. \qquad \int_0^\infty e^{-(k+\vartheta i)x}\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k+\vartheta i)^a}\ {}^{*)}$$

mit $\frac{e^{-c\vartheta i}\, d\vartheta}{l^2+\vartheta^2}$, und integriren wir hierauf zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, so bekommen wir das Integral

$$\Gamma(a) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-c\vartheta i}\, d\vartheta}{(l^2+\vartheta^2)\,(k+\vartheta i)^a} = \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\, dx \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-(c+x)\vartheta i}\, d\vartheta}{l^2+\vartheta^2},$$

aus dem nun vermöge der in 1. ausgedrückten Beziehung

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-(c+x)\vartheta i}}{l^2+\vartheta^2}\, d\vartheta = \frac{\pi}{l}\, e^{-l(c+x)}$$

und folglich nach einigen leichten Reductionen die Formel

$$3. \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-c\vartheta i}\, d\vartheta}{(l^2+\vartheta^2)(k+\vartheta i)^a} = \frac{\pi}{l} \cdot e^{-lc} \cdot \frac{1}{(k+l)^a}$$

fliesst. Diese aber zeigt den nämlichen Charakter wie Gleichung 1., und daher können wir augenscheinlich den vorhin angewendeten Process von neuem vollziehen. Sind demnach $k_1$ und $a_1$ wie oben $k$ und $a$ positive Grössen, so entspringt aus 2.

$$\Gamma(a) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-c\vartheta i}}{l^2+\vartheta^2} \cdot \frac{1}{(k+\vartheta i)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+\vartheta i)^{a_1}}\, d\vartheta$$

$$= \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\, dx \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-(c+x)\vartheta i}\, d\vartheta}{(l^2+\vartheta^2)\,(k_1+\vartheta i)^{a_1}},$$

*) In derselben ist — um es hier nochmals mit Nachdruck hervorzuheben — bekanntlich $(k+\vartheta i)^{-a} = (k^2+\vartheta^2)^{-\frac{a}{2}} e^{-a\psi}$, wo $\psi$ = arc tang $\frac{\vartheta}{k}$ zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ sich befindet. (Vergl. §.62,71).

und dies giebt wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(c+x)\vartheta i}}{(l^2+\vartheta^2)} \frac{d\vartheta}{(k_1+\vartheta i)^{a_1}} = \frac{\pi}{l} e^{-l(c+x)} \frac{1}{(k_1+l)^{a_1}},$$

also

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} x^{a-1} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(c+x)\vartheta i}}{(l^2+\vartheta^2)} \frac{d\vartheta}{(k_1+\vartheta i)^{a_1}} = \frac{\pi}{l} \frac{e^{-lc}}{(k_1+l)^{a_1}} \int_0^{\infty} e^{-(l+k)x} x^{a-1} dx$$

die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-c\vartheta i}}{l^2+\vartheta^2} \cdot \frac{1}{(k+\vartheta i)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+\vartheta i)^{a_1}} d\vartheta = \frac{\pi}{l} e^{-lc} \frac{1}{(k+l)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+l)^{a_1}}.$$

Wie man aber in dieser Weise weiter gehen kann, leuchtet unmittelbar ein. Bezeichnen somit ausser $c$ auch $l, k, k_1, \ldots$; $a, a_1, \ldots$ positive Constanten: so besteht die Gleichung

$$1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-c\vartheta i}}{l^2+\vartheta^2} \cdot \frac{1}{(k+\vartheta i)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+\vartheta i)^{a_1}} \cdot \frac{1}{(k_2+\vartheta i)^{a_2}} \cdots d\vartheta$$

$$= \frac{\pi}{l} e^{-lc} \frac{1}{(k+l)^a (k_1+l)^{a_1} (k_2+l)^{a_2} \cdots}.$$

Sie bleibt selbst dann noch in Kraft, wenn die Constanten $l, k, \ldots$; $a, a_1 \ldots$ solche complexen Werthe erhalten, deren reelle Theile positiv sind. Denn unter dieser Voraussetzung ergiebt sich zunächst aus den Betrachtungen des §. 106., dass Gleichung 1. fortbesteht. Und ein Blick auf die Beziehung

$$\Gamma(\alpha+\beta i) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha+\beta i-1} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} [\cos(\beta \lg x) + i \sin(\beta \lg x)] dx\text{*)}$$

lehrt, dass für $a > 0$ das Argument $a$ der Function $\Gamma(a)$ durch die complexe Grösse $\alpha + \beta i$ ersetzt werden darf. Mithin ist bloss der Nachweis von der Richtigkeit der Gleichung 2. unter der über die Natur der Constanten $a$ gemachten Annahme noch zu liefern. Dies aber erfordert nur eine Wieder-

*) Vergleiche Cauchy., Algebraische Analysis. S. 220.

holung des frühern für ein reelles $a$ befolgten Gedankenganges. Schreibt man nun anstatt der beliebigen Grösse $\vartheta$ $\vartheta_1 + \varkappa$, wo $\vartheta_1$ und $\varkappa$ irgend welche reellen Grössen bedeuten; so wird, wenn man in $k + \vartheta i = k + \varkappa i + \vartheta_1 i$ einfach $k$ statt $k + \varkappa i$ setzt, wieder die Beziehung gelten

$$\int_0^\infty e^{-(k+\vartheta_1 i)x} x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k+\vartheta_1 i)^a}.$$

Von den zahllosen Folgerungen, welche die Gleichung I. gestattet, hat Dirichlet selbst eine sehr fruchtbare angezeigt. Man gelangt zu ihr durch folgende Betrachtung.

Sei $h$ entweder eine positive Zahl $> 1$, oder eine complexe Grösse, deren reeller Theil die positive Eins überschreitet; alsdann wird immer der reelle Bestandtheil von

$$\lg(h + yi) - \tfrac{1}{2}\lg(h^2 + y^2) + i \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{h}$$

positiv sein. Denn setzt man $h = m + ni$, wo also $m > 1$ sein soll, so wird

$$\lg(h + yi) = \lg[m + (n+y)i] = \tfrac{1}{2}\lg[m^2 + (n+y)^2] + i \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{h},$$

und in diesem Ausdrucke kann $m^2 + (n+y)^2$ niemals kleiner, als die positive Zahl $m^2 > 1$ werden*). — In dem Integrale 2. kann man daher die complexe Grösse $k + \vartheta i$ durch $\lg(h + yi)$ ersetzen. In diesem Falle aber besitzt Gleichung 2. die Gestalt

$$\int_0^\infty e^{-x\lg(h+yi)} x^{b-1}\, dx = \frac{\Gamma(b)}{[\lg(h+yi)]^b},$$

d. h.

4. $$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}\, dx}{[h + yi]^x} = \frac{\Gamma(b)}{[\lg(h+yi)]^b},$$

---

*) Die vorkommenden Logarithmen complexer Grössen $u + vi$ sind hier zur Vermeidung von Zweideutigkeiten immer in der Gestalt $\lg(r) + i\psi$, wo $\psi = \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{u}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt und $r$ der Modul der complexen Grösse $u + vi$ ist, zu nehmen. Unter dieser Annahme stellt also eine Grösse von der Form $(u + vi)^m$ den Ausdruck

$$e^{m\lg(u+vi)} = e^{m\lg r + im\psi}$$

vor.

wenn $b$ statt $a$ geschrieben wird, wo natürlich $b$ entweder positiv, oder — für den Fall eines complexen Werthes von $b$ — der reelle Theil desselben $> 0$ ist.

Indem man nun die letztere Beziehung durch den Ausdruck

$$\frac{e^{-cyi}}{l^2+y^2} \frac{1}{(k+yi)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+yi)^{a_1}} \cdots dy,$$

in welchem die Grössen $c, l, k, \ldots; a, a_1, \ldots$ Constanten der oben genannten Art bedeuten, multiplicirt und hierauf von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ integrirt, erhält man die Relation

$$\int_0^\infty x^{b-1}\, dx \left[ \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-cyi}}{l^2+y^2} \frac{1}{(k+yi)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+yi)^{a_1}} \cdots \frac{dy}{(h+yi)^x} \right]$$

$$= \Gamma(b) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-cyi}}{l^2+y^2} \frac{1}{(k+yi)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+yi)^{a_1}} \cdots \frac{dy}{[\lg (h+yi)]^b}.$$

Und berücksichtigt man, was wegen des positiven $x$ geschehen kann, jetzt die Gleichung I., so folgt, dass

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-cyi}}{l^2+y^2} \frac{1}{(h+yi)^x} \cdot \frac{1}{(k+yi)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+yi)^{a_1}} \cdots dy$$

$$= \frac{\pi}{l} e^{-lc} \frac{1}{(h+l)^x (k+l)^a (k_1+l)^{a_1} \cdots},$$

also der linke Theil der vorhergehenden Gleichung mit

$$\frac{\pi}{l} e^{-lc} \frac{1}{(k+l)^a (k_1+l)^{a_1} \cdots} \int_0^\infty \frac{x^{b-1}\, dx}{(h+l)^x}$$

gleichbedeutend ist. Nun findet aber die Beziehung Statt

$$\int_0^\infty \frac{x^{b-1}\, dx}{(h+l)^x} = \frac{\Gamma(b)}{[\lg (h+l)]^b},$$

und demnach wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cyi}}{l^2+y^2} \frac{1}{(k+yi)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+yi)^{a_1}} \cdots \frac{dy}{[\lg(h+yi)]^b}$$

$$= \frac{\pi}{l} e^{-lc} \frac{1}{[\lg(h+l)]^b} \cdot \frac{1}{(k+l)^a (k_1+l)^{a_1} \ldots}.$$

Auf diese Relation gestützt aber lässt sich wieder eine andere, in der die zwei Factoren $\frac{1}{[\lg(h+yi)]^b}$ und $\frac{1}{[\lg(h_1+yi)]^{b_1}}$ vorkommen, dadurch aus Gleichung 4. ableiten, dass man in ihr statt $b$ und $h$ respective $b_1$ und $h_1$ schreibt, dieselbe mit dem Ausdrucke unter dem Integralzeichen in der zuletzt gewonnenen Gleichung multiplicirt und hierauf wieder von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ integrirt. So nämlich gewinnt man zunächst die Beziehung

$$\int_0^{\infty} x^{b_1-1} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cyi}}{l^2+y^2} \frac{1}{(k+yi)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+yi)^{a_1}} \cdots \frac{1}{(h_1+yi)^x} \frac{1}{[\lg(h+yi)]^b} dy$$

$$= \Gamma(b_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cyi}}{l^2+y^2} \cdot \frac{1}{(k+yi)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+yi)^{a_1}} \cdots \frac{1}{[\lg(h+yi)]^b} \cdot \frac{1}{[\lg(h_1+yi)]^{b_1}} dy$$

$$= \frac{\pi e^{-lc}}{l} \frac{1}{[\lg(h+l)]^b} \frac{1}{(k+l)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+l)^{a_1}} \cdots \int_0^{\infty} \frac{x^{b_1-1} dx}{(h_1+l)^x},$$

d. g. nach einer leichten Reduction

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cyi}}{l^2+y^2} \left[\frac{1}{(k+yi)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+yi)^{a_1}} \cdots\right] \frac{1}{[\lg(h+yi)]^b} \frac{1}{[\lg(h_1+yi)]^{b_1}} dy$$

$$= \frac{\pi}{l} e^{-lc} \frac{1}{(k+l)^a (k_1+l)^{a_1} \ldots} \cdot \frac{1}{[\lg(h+l)]^b [\lg(h_1+l)]^{b_1}}.$$

Und vollzieht man diesen Process immer von neuem, so erhält man die Dirichlet'sche Formel

$$\text{II. } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cyi}}{l^2+y^2} \left[\frac{1}{(k+yi)^a} \cdot \frac{1}{(k_1+yi)^{a_1}} \cdots\right] \left[\frac{1}{[\lg(h+yi)]^b} \frac{1}{[\lg(h_1+yi)]^{b_1}} \cdots\right] dy$$

$$= \frac{\pi e^{-lc}}{l} \cdot \frac{1}{(k+l)^a (k_1+l)^{a_1} \ldots} \cdot \frac{1}{[\lg(h+l)]^b [\lg(h_1+l)]^{b_1} \ldots},$$

in der also $c$ positiv ist und $l$; $a, a_1 \ldots$; $b, b_1 \ldots$; $h, h_1 \ldots$; $k, k_1 \ldots$ entweder positiv reelle, oder solche complexen Constanten bezeichnen, deren reelle Theile zu den positiven Grössen gehören und für die Reihe $h, h_1, \ldots$ grösser, als die Einheit sind.

Als ein sehr specieller Fall der Formel I. möge das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos(c\vartheta + 2n\psi)}{(l^2+\vartheta^2)^{n+1}}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{e^{-lc}}{l^{2n+1}}$$

angeführt werden; dasselbe folgt leicht aus Gleichung 3., wenn man $l = k$ und $a$ der ganzen Zahl $2n$ gleichsetzt.

## §. 111.

### 6. Ableitung einiger allgemeinen Integralformen mittelst Integration der Reihe $f(x) = \sum_0^n a_n x^n$.

Zur Ergänzung der bisjetzt vorgetragenen Lehren lassen wir in diesem und den Paragraphen 112. und 113. noch einige Theoreme folgen, die an sich interessant sind und in manchen Fällen nicht ohne Nutzen beim Aufsuchen des Werthes vorgelegter Integralformen sein werden. Wir beginnen zu dem Behufe mit folgender Betrachtung.

I. Sei $f(x)$ eine solche Function von $x$, für welche immer die Gleichung

$$1.\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Statt findet, mag die Reihe endlich sein, oder mag sie zu den unendlichen convergirenden Reihen gehören. Die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ werden dabei als reelle Grössen angesehen.

Setzen wir in 1. die Variabele $x = re^{\vartheta i}$, so wird

$$2.\qquad f(re^{\vartheta i}) = a_0 + a_1 r\cos\vartheta + a_2 r^2 \cos 2\vartheta + \ldots$$
$$+ i(a_1 r \sin\vartheta + a_2 r^2 \sin 2\vartheta + \ldots)$$

Multipliciren wir nun diese Gleichung beziehungsweise mit $\frac{d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}$ und $\frac{\vartheta\, d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}$, wo die Constante $k$ positiv sein soll, und integriren wir hierauf zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$; so entspringen mit Rücksicht auf die Laplace'schen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta=\frac{\pi}{k}e^{-kc},\quad c>0 \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vartheta\sin c\vartheta}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta=\pi e^{-kc},\ c>0,$$

sowie mit Beachtung der evidenten Beziehungen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vartheta\cos c\vartheta\, d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin c\vartheta\, d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}=0$$

und der Gleichung 1. die Relationen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(re^{\vartheta i})\,d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}=\sum_0^n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_n r^n\cos n\vartheta}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta=\frac{\pi}{k}f(re^{-k}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vartheta f(re^{\vartheta i})\,d\vartheta}{k^2+\vartheta^2}=i\sum_1^n a_n r^n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vartheta\sin n\vartheta}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta=i\pi[f(re^{-k})-f(0)].$$

Andererseits aber ist, wenn wir die Summen der Reihen $\sum_0^n a_n r^n\cos n\vartheta$ und $\sum_1^n a_n r^n\sin n\vartheta$ bezüglich durch die reellen Functionen $\varphi(r,\vartheta)$ und $\psi(r,\vartheta)$ von $r$ und $\vartheta$ bezeichnen,

$$f(re^{\vartheta i})=\varphi(r,\vartheta)+i\psi(r,\vartheta).$$

Und daher wird nunmehr

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(r,\vartheta)}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta=\frac{\pi}{k}f(re^{-k}),\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vartheta\psi(r,\vartheta)}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta=\pi[f(re^{-k})-f(0)]$$

oder einfacher

$$\int_0^{\infty}\frac{\varphi(r,\vartheta)}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta=\frac{\pi}{2k}f(re^{-k}),\quad \int_0^{\infty}\frac{\vartheta\psi(r,\vartheta)}{k^2+\vartheta^2}d\vartheta=\frac{\pi}{2}[f(re^{-k})-f(0)].$$

Schreibt man in der letzten Beziehung $k=0$, so ergiebt sich

$$\int_0^{\infty}\frac{\psi(r,\vartheta)\,d\vartheta}{\vartheta}=\frac{\pi}{2}[f(r)-f(0)],$$

und folglich ist auch

$$\int_0^{\infty}\frac{\psi(r,\vartheta)\,d\vartheta}{\vartheta(k^2+\vartheta^2)}=\frac{\pi}{2k^2}[f(r)-f(re^{-k})].$$

Sei beispielsweise $f(x)=\lg(1+x)$; alsdann lässt sich,

solange $r^2 < 1$, der Logarithmus von $1 + x$ in eine convergirende Reihe entwickeln, und demnach gelten, weil hier

$$\lg(1 + re^{\vartheta i}) = \lg(1 + r\cos\vartheta + ri\sin\vartheta)$$

$$= \tfrac{1}{2}\lg[1 + 2r\cos\vartheta + r^2] + i \operatorname{arc\,tang}\frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}$$

ist, die Beziehungen

$$\int_0^\infty \frac{\lg(1 + 2r\cos\vartheta + r^2)}{k^2 + \vartheta^2}\,d\vartheta = \frac{\pi}{k}\lg(1 + re^{-k})$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\vartheta \operatorname{arc\,tang}\dfrac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}\,.\,d\vartheta}{k^2 + \vartheta^2} = \frac{\pi}{2}\lg(1 + re^{-k}),$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tang}\dfrac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}}{k^2 + \vartheta^2}\,d\vartheta = \frac{\pi}{2k^2}\lg\frac{1 + r}{1 + re^{-k}}.$$

Aus der erstern dieser Formeln lässt sich leicht der Fall $r > 1$ entwickeln. Denn schreibt man in der genannten Gleichung jetzt $\frac{1}{r}$ statt $r$, so kommt nach einer einfachen Reduction

$$\int_0^\infty \frac{\lg(1 + 2r\cos\vartheta + r^2)}{k^2 + \vartheta^2}\,d\vartheta = \frac{\pi}{k}\lg(r + e^{-k}),\quad r > 1.$$

II. Multipliciren wir die Reihen $\varphi(r, \vartheta)$ und $\psi(r, \vartheta)$ beziehlich durch $\cos p\vartheta$ und $\sin p\vartheta$, wo $p$ irgend eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ bedeutet, und integriren wir alsdann zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$; so folgt mit Beachtung der in §. 92. erwähnten Beziehungen

$$\int_0^\pi \cos p\vartheta \cos n\vartheta\, d\vartheta = 0, \frac{\pi}{2} \quad\text{und}\quad \int_0^\pi \sin p\vartheta \sin n\vartheta\,.\,d\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}$$

je nachdem $n$ und $p$ verschieden, oder gleich sind,

$$\int_0^\pi \frac{f(re^{\vartheta i}) + f(re^{-\vartheta i})}{2}\cos p\vartheta\, d\vartheta = \frac{\pi}{2} a_p r^p$$

und

$$\int_0^\pi \frac{f(re^{\vartheta i})-f(re^{-\vartheta i})}{2i}\sin p\vartheta\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\, a_p\, r^p.$$

Wie man sieht, ist dies eigentlich nur eine Erweiterung der früher in §. 95. gegebenen Lehren über die Coefficientenbestimmung in den Sinus- und Cosinusreihen für den Fall, dass diese bloss aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen.

Als Beispiel wollen wir wieder die Function $\lg(1+x)$ nehmen. Vermöge der ersten Formel erhalten wir alsdann für $r^2 < 1$ und $p > 0$ die Beziehung

$$\int_0^\pi \lg(1+2r\cos\vartheta+r^2)\cos p\vartheta\, d\vartheta = \pi r^p a_p = \pi r^p \left(\pm\frac{1}{p}\right),$$

je nachdem nämlich $p$ ungerade, oder gerade ist. Auch für $p = 0$ bleibt die Formel in Kraft, weil in diesem Falle $a_p$ mit Null zusammenfällt.

Wird $r > 1$, so setze man wieder $\frac{1}{r}$ statt $r$; dadurch kommt

$$\int_0^\pi \lg(1+2r\cos\vartheta+r^2)\cos p\vartheta\, d\vartheta = \left|\begin{array}{ll}\pi r^{-p} a_p, & p>0,\\ \pi\lg r^2, & p=0\end{array}\right.$$ *).

III. Die in §. 78. entwickelte und selbst für $p = 0$ noch gültig bleibende Gleichung $8^a$.

$$\int_0^\infty \frac{\cos p\psi\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^{\frac{p}{2}}(l^2+\vartheta^2)} = \frac{\pi}{2l(k+l)^p},\quad \psi = \operatorname{arc\,tang}\frac{\vartheta}{k}$$

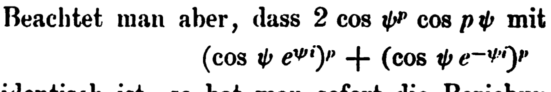
nimmt für $l = \frac{1}{q}$, $k = 1$ die Gestalt

$$\int_0^\infty \frac{\cos p\psi\, d\vartheta}{(1+\vartheta^2)^{\frac{p}{2}}(1+q^2\vartheta^2)} = \frac{\pi}{2q}\left(\frac{q}{q+1}\right)^p$$

an. Und hieraus folgt, wenn man $\vartheta = \operatorname{tang}\psi$ setzt,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos p\psi\cos\psi^{p-2}\, d\psi}{1+q^2\operatorname{tang}\psi^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi^p\cos p\psi\, d\psi}{\cos\psi^2+q^2\sin\psi^2} = \frac{\pi}{2q}\left(\frac{q}{q+1}\right)^p.$$

*) Vergleiche §. 4, 3.





Beachtet man aber, dass $2\cos\psi^p \cos p\psi$ mit

$$(\cos\psi\, e^{\psi i})^p + (\cos\psi\, e^{-\psi i})^p$$

identisch ist, so hat man sofort die Beziehung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\psi\, e^{\psi i})^p + (\cos\psi\, e^{-\psi i})^p}{\cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2}\, d\psi = \frac{\pi}{q}\left(\frac{q}{q+1}\right)^p.$$

Nun seien in Gleichung 1. für $x$ nach und nach die Werthe $x = \cos\psi e^{\psi i}$ und $x = \cos\psi e^{-\psi i}$ gesetzt; alsdann ergiebt sich, wenn man die beiden hieraus entstehenden Reihen durch Addition verbindet, darauf das Resultat mit $\frac{d\psi}{\cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2}$ multiplicirt und endlich zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ integrirt,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos\psi e^{\psi i}) + f(\cos\psi e^{-\psi i})}{\cos\psi^2 + q^2 \sin\psi^2}\, d\psi = \frac{\pi}{q} \sum_0^n a_n \left(\frac{q}{q+1}\right)^n = \frac{\pi}{q} f\left(\frac{q}{q+1}\right),$$

also für $q = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\cos\psi e^{\psi i}) + f(\cos\psi e^{-\psi i})]\, d\psi = \pi f(\tfrac{1}{2}).$$

Setzt man beispielsweise mit Serret*), von dem diese Formeln zuerst bewiesen sind,

$$f(x) = e^{2mx} \text{ und } 2\psi = \vartheta, \ (m = \text{const.}),$$

so kommt

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{e^{2m\cos\frac{\vartheta}{2}^2} e^{mi\sin\vartheta} + e^{2m\cos\frac{\vartheta}{2}^2} e^{-mi\sin\vartheta}}{\cos\frac{\vartheta}{2}^2 + q^2 \sin\frac{\vartheta}{2}^2}\, d\vartheta$$

$$= e^m \int_0^{\pi} \frac{e^{m\cos\vartheta} \cos(m\sin\vartheta)}{\cos\frac{\vartheta}{2}^2 + q^2 \sin\frac{\vartheta}{2}^2}\, d\vartheta = \frac{\pi}{q}\, e^{\frac{2mq}{q+1}},$$

---

*) Liouville Journal. T. 8, p. 489 etc. Sur quelques formules relatives à la théorie des intégrales Eulériennes.

h.

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{m\cos\vartheta}\cos(m\sin\vartheta)}{\cos\frac{\vartheta}{2}^2 + q^2\sin\frac{\vartheta}{2}^2}\, d\vartheta = \frac{\pi}{q}\, e^{m\cdot\frac{q-1}{q+1}}$$

d, wenn $q = 1$,

$$\int_0^{\pi} e^{m\cos\vartheta}\cos(m\sin\vartheta)\, d\vartheta = \pi^{*}).$$

§. 112.

**7. Liouville'sches Theorem.**

Bezeichnet $a$ eine positive Constante und $f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)$ ıe solche, übrigens beliebige Function von $x$, dass die beiden tegrale

$$P = \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \log x \frac{dx}{x} \text{ und } Q = \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x}$$

en Sinn behalten: so besteht nach Liouville die bemerkens-rthe Gleichung

$$P = Q \log a^{**}).$$

t der grössten Leichtigkeit lässt sich die Wahrheit derselben rch das in §. 23., II. beobachtete Verfahren nachweisen. der That, sei $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = y$, so wird für $x = 0$ und $x = \infty$ neue Veränderliche $y = \infty$. Es findet daher zwischen sen beiden Grenzwerthen von $y$ ein Minimum $= 2$ Statt. n ist

$$x = \frac{ay}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{y^2 - 4}, \quad dx = \left(\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2 - 4}}\right) dy,$$

l daher hat man

---

*) Vergleiche §. 95., Gl. 5.

**) Liouville Journal. Aug. 1869; p. 300—301. Extrait d'une lettre essée à M. Besgue par Liouville.

$$P = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \lg x \frac{dx}{x} = \int_\infty^2 f(y)\left[\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\right] \frac{\lg\left(\frac{a}{2}y - \frac{a}{2}\sqrt{y^2-4}\right)}{\frac{a}{2}y - \frac{a}{2}\sqrt{y^2-4}}$$

$$+ \int_2^\infty f(y)\left[\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\right] \frac{\lg\left(\frac{a}{2}y + \frac{a}{2}\sqrt{y^2-4}\right) dy}{\frac{a}{2}y + \frac{a}{2}\sqrt{y^2-4}}$$

oder durch Vereinfachung

$$P = 2 \log a \int_2^\infty f(y) \frac{dy}{\sqrt{y^2-4}}$$

$$+ \int_2^\infty f(y) \frac{dy}{\sqrt{y^2-4}} \lg\left[\left(\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}\sqrt{y^2-4}\right)\left(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\sqrt{y^2-4}\right)\right]$$

$$= 2 \log a \int_2^\infty f(y) \frac{dy}{\sqrt{y^2-4}}$$

und

$$Q = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x} = 2 \int_2^\infty f(y) \frac{dy}{\sqrt{y^2-4}},$$

mithin ist, wie zu zeigen verlangt wird, $P = Q \log a$.

Einfacher als vorhin führt jedoch die Anwendung der Substitution $\log x = u + \lg a$, d. i. $x = a e^u$ zum Beweise des Liouville'schen Theoremes. Auf diesem Wege erhält man nämlich sofort

$$P = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \log x \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^\infty f(e^u + e^{-u}) u\, du$$

$$+ \log a \int_{-\infty}^\infty f(e^u + e^{-u})\, du,$$

d. h., weil $f(e^u + e^{-u}).u$ eine ungerade Function von $u$ ist und demnach $\int_{-\infty}^{+\infty} f(e^u + e^{-u})\, u\, du$ verschwindet,

$$P = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \log x \frac{dx}{x} = \log a \int_{-\infty}^\infty f(e^u + e^{-u})\, du$$

d

$$Q = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^\infty f(e^u + e^{-u})\, du.$$

Dieser letztere Gedankengang ist aber noch mit dem an-
rn Vortheil verknüpft, sogleich ersichtlich zu machen, dass
ch

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right) \log x \frac{dx}{x} = \log a \int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x}$$

in muss, wenn $f\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right)$ zu den geraden Functionen von
gehört.

Bezeichnet dagegen $f\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right)$ eine ungerade Function
n $x$, so muss für das Stattfinden der Liouville'schen Rela-
n $f$ mit einer andern ungeraden Function $\varphi$ von $x$, also
r den einfachsten Fall mit $\frac{x}{a} \pm \frac{a}{x}$ durch Multiplication ver-
nden sein. Alsdann besteht wieder die Gleichung

$$\int^\infty \left(\frac{x}{a} \pm \frac{a}{x}\right) f\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right) \log x \frac{dx}{x} = \log a \int_0^\infty \left(\frac{x}{a} \pm \frac{a}{x}\right) f\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x},$$

türlich immer unter der stillschweigenden Voraussetzung,
s die Integrale nicht sinnlos werden.

Führt man in die vorstehenden Integrale statt $x$ die neue
änderliche $y = x^{\frac{1}{n}}$ ein, so zeigt sich sofort, dass

$$\int^\infty f\left(\frac{x^n}{a} + \frac{a}{x^n}\right) \log x \frac{dx}{x} = \frac{1}{n} \log a \int_0^\infty f\left(\frac{x^n}{a} + \frac{a}{x^n}\right) \frac{dx}{x}$$

, wenn $f$ eine gerade Function ausdrückt, auch

$$\int^\infty f\left(\frac{x^n}{a} - \frac{a}{x^n}\right) \lg x \frac{dx}{x} = \frac{1}{n} \log a \int^\infty f\left(\frac{x^n}{a} - \frac{a}{x^n}\right) \frac{dx}{x}$$

Beispiel. Der in §. 99. bewiesenen Gleichung 9. zufolge besteht die Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{a^2}+\frac{a^2}{x}\right)} x^{\mu-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2\,\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos 2ay\, dy}{\left(\frac{1}{a^2}+y^2\right)^{\mu+1}},$$

d. g. für $\mu = -\frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{a^2}+\frac{a^2}{x}\right)} \frac{dx}{x} = 2a \int_0^\infty \frac{\cos 2ay\, dy}{\sqrt{1+a^2y^2}} = 2\int_0^\infty \frac{\cos 2y\, dy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Nun ist aber nach §. 75.

$$\int_0^\infty \frac{\cos c\vartheta\, d\vartheta}{(k^2+\vartheta^2)^n} = \frac{\pi\, c^{2n-1}}{2^{2n-1}\,[\Gamma(n)]^2} \int_1^\infty e^{-kcx}\,(x^2-1)^{n-1}\, dx,$$

demnach im gegenwärtigen Falle

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2y\, dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi\,.\,2^0}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-2y}}{\sqrt{y^2-1}}\, dy.$$

Mithin gilt weiter die Relation

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x^n}{a^2}+\frac{a^2}{x^n}\right)} \log x\, \frac{dx}{x} = \frac{4\log a}{n^2} \int_1^\infty \frac{e^{-2y}\, dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

## §. 113.

### 8. Cauchy'sche Formel*).

Sei $z = re^{\vartheta i}$, und $f(z)$ bezeichne eine solche Function von $z$, welche nebst ihrer Derivirten $f'(z)$ für jeden unter einer gewissen Grenze $R$ befindlichen Werth des Moduls $r$ endlich und continuirlich bleibt — und die ausserdem bei constant bleibendem Modul für $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \alpha + 2\pi$ dieselben Werthe erwirbt.

Da $f(z)$ eine Function von $r$, $\vartheta$ ausdrückt, so können wir ihre partiellen Differentialquotienten nach $r$ und $\vartheta$ bilden.

*) Vergl. die Werke von Moigno, Sturm und Serret über Infinitesimalrechnung.

· werden dieselben durch folgende Gleichungen vor-

$$\frac{\partial f(z)}{\partial r} = \frac{df(z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial r} = f'(z)\, e^{\vartheta i}$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \vartheta} = \frac{df(z)}{dz}\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = f'(z)\, r i\, e^{\vartheta i}.$$

st

$$\frac{\partial f(z)}{\partial r} = \frac{1}{ri}\frac{\partial f(z)}{\partial \vartheta}.$$

aussetzung gemäss aber sind $f(z)$ und $f'(z)$ endlich
ig, so lange der Modul $r$ kleiner, als eine gewisse
$R$ bleibt; Gleiches muss demnach auch von den par-
erivirten nach $r$ und $\vartheta$ gelten. Daraus folgt weiter,
nn man die letztere Gleichung in Bezug auf $r$ zwi-
n Grenzen 0 und $r$ integrirt, das entstehende Resultat
multiplicirt und hierauf von $\vartheta = \alpha$ bis $\vartheta = \alpha + 2\pi$
, die Beziehung gilt

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} d\vartheta \int_0^r \frac{\partial f(z)}{\partial r}\, dr = \int_0^r \frac{dr}{ri} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial \vartheta}\, d\vartheta.$$

$$dr = f(z) - f(0), \quad \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial \vartheta}\, d\vartheta = f[re^{(\alpha+2\pi)i}] - f[re^{\alpha i}],$$

über die Function $f$ gemachten Voraussetzung zu-
0.
ch Substitution dieser Werthe in 1. folgt daher

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} d\vartheta\, [f(z) - f(0)] = 0,$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(re^{\vartheta i})\, d\vartheta.$$

an $\alpha = 0$, so hat man noch

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\vartheta i})\, d\vartheta,$$

und für $\alpha = -2\pi$ entspringt leicht

$$\text{I}^b. \qquad f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{-\vartheta i})\, d\vartheta.$$

Nimmt man ferner an, dass $f(z) = F(x + re^{\vartheta i})$ ist, wo $x$ eine von $z$ unabhängige veränderliche Grösse bezeichnet, so wird für $z = 0$ $f(0)$ in $F(x)$ übergehen, und man erhält nun die Gleichungen

$$\text{II.} \qquad \begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+2\pi} F(x + re^{\vartheta i})\, d\vartheta, \\ F(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(x + re^{\vartheta i})\, d\vartheta. \end{cases}$$

Sie beweisen, dass jede beliebige Function $F(x)$ einer reellen oder imaginären Veränderlichen $x$ durch ein bestimmtes Integral ersetzt werden kann, wenn die Function $F(x + re^{\vartheta i})$ und ihre Derivirte für alle diejenigen Werthe von $re^{\vartheta i}$, deren Modul kleiner, als eine gewisse Grenze $R$ ist, endlich und stetig bleiben und wenn die Werthe der Function $F(x + re^{\vartheta i})$ für die Argumente $\vartheta$ und $\vartheta + 2\pi$ dieselben sind.

Um die grosse Brauchbarkeit dieser Formeln durch einige Beispiele zu erläutern, wollen wir $f(z)$ der Reihe nach mit $\frac{1}{1-z}$, $e^{az}$, $\lg(1-z)$ identificiren.

1. Die Function $f(z) = \frac{1}{1-z}$, sowie ihre Derivirte $f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ werden für $z = 1$ unendlich, was aber nur bei einem der Einheit gleichen Modul eintreten kann; sie bleiben hingegen endlich und stetig, wenn der Modul $r$ von $z$ kleiner als 1 ist. Setzen wir also $r < 1$, so wird vermöge der Beziehungen I$^a$. und I$^b$.:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 - re^{\vartheta i}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 - re^{-\vartheta i}};$$

mithin entstehen durch Addition und Subtraction dieser beiden Integrale die Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - r\cos\vartheta}{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}\, d\vartheta = 2\pi \text{ und } \int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1 - 2r\cos\vartheta + r^2} = 0.$$

n ihnen ist die letzte selbstverständlich; denn bewegt
n der Bogen $\vartheta$ von 0 bis $2\pi$, so erwirbt die Function
$\frac{\sin\vartheta}{1-2r\cos\vartheta+r^2}$ im ersten und vierten und ebenso im zweiten
d dritten Quadranten numerisch dieselben Werthe, und
glich setzt sich das Integral aus paarweis einander auf-
benden Elementen zusammen.

Zur Kenntniss dieser Gleichungen kann man übrigens
h in folgender Weise gelangen. Erwägt man nämlich,
s für $r < 1$ die Function $\frac{1}{1-z}$ mit der convergirenden
ihe

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \text{in inf.}$$

ntisch ist, so folgt für $z = re^{\vartheta i}$ durch Integration der-
ben zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1-re^{\vartheta i}} = \int_0^{2\pi} \frac{1-re^{-\vartheta i}}{(1-re^{\vartheta i})(1-re^{-\vartheta i})}\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{1-r\cos\vartheta}{1-2r\cos\vartheta+r^2}\, d\vartheta$$

$$ir \int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1-2r\cos\vartheta+r^2} = \sum_0^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} (\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)\, d\vartheta = 2\pi,$$

l demnach entspringen durch Trennung des Reellen und
aginären die obigen Gleichungen.

2. Wird $f(z)$ mit $e^{az}$, wo $a$ constant, identificirt, so
l $f(z)$ und $f'(z)$ für jeden Modul endlich und stetig; folg-
ergiebt sich

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{are^{\vartheta i}}\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ar\cos\vartheta + ari\sin\vartheta}\, d\vartheta,$$

, wenn man $ar = m$ schreibt und das Reelle vom Imagi-
en sondert,

$$= \int_0^{2\pi} e^{m\cos\vartheta} \cos(m\sin\vartheta)\, d\vartheta, \quad 0 = \int_0^{2\pi} e^{m\cos\vartheta} \sin(m\sin\vartheta)\, d\vartheta.$$

h hier ist wieder die letztere Gleichung evident. Und stellt
n endlich noch die erstere in der folgenden Form dar

$$2\pi = \int_0^{\pi} e^{m\cos\vartheta} \cos(m \sin\vartheta)\, d\vartheta + \int_{\pi}^{2\pi} e^{m\cos\vartheta} \cos(m \sin\vartheta)\, d\vartheta$$

und beachtet, dass durch die Substitution $\vartheta = \pi - \vartheta_1$ das zweite Integral in das erste übergeht, so entsteht die Poisson'sche Formel

$$\int_0^{\pi} e^{m\cos\vartheta} \cos(m \sin\vartheta)\, d\vartheta = \pi.$$

3. Wählen wir jetzt für die Function $f(z)$ den Logarithmus von $1 - z$, so wird für $z = 1$, also auch $r = 1$, nicht nur $f(z)$, sondern auch $f'(z) = -\frac{1}{1-z}$ unendlich. Dieser Fall aber kann niemals eintreten, wenn der Modul $r < 1$ ist. Setzen wir daher $r < 1$ voraus, so bleibt nur noch die Frage zu beantworten, ob $\lg(1-z)$ zu den periodischen Functionen von $\vartheta$ gehört. Zu dem Behufe sei

$$1 - z = 1 - r\cos\vartheta - ri\sin\vartheta = \varrho(\cos t + i \sin t);$$

alsdann werden die Grössen $\varrho$ und $t$ definirt durch die Gleichungen

$$\varrho \cos t = 1 - r\cos\vartheta, \quad \varrho \sin t = - r \sin\vartheta,$$

d. h.

$$r = \sqrt{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}, \quad \cos t = \frac{1 - r\cos\vartheta}{\sqrt{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}},$$

$$\sin t = -\frac{r\sin\vartheta}{\sqrt{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}} \text{ *)}.$$

Heisst nun für $\vartheta = \alpha$ der entsprechende Bogen $t$ $\beta$, so werden, wenn $\vartheta$ von $\alpha$ bis $\alpha + 2\pi$ continuirlich sich bewegt, $\cos t$ und $\sin t$ stetig sein müssen, und folglich schreitet der Bogen $t$ selbst in unendlich kleinen Intervallen fort. Ist überdies $r < 1$, so wird der Cosinus von $t$ beständig positiv sein, also, wenn man den veränderlichen Bogen $t$ von einem festen Punkte eines Kreises an misst, der Endpunkt von $t$ immer entweder im ersten, oder vierten Quadranten dieser Kreislinie sich befinden müssen. Nun erwerben $\cos t$ und $\sin t$ für $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \alpha + 2\pi$ wieder ihren Anfangswerth, folglich muss $t$ wieder $= \beta$ sein, wenn $\vartheta$ den Werth $\alpha + 2\pi$ annimmt.

*) Der Bogen $t$ ist natürlich der kleinste Bogen, welcher diese Gleichungen befriedigt.

Alle Bedingungen für die Anwendung der Formel I$^a$. werden daher bei Voraussetzung der Gleichung $f(z)=\lg(1-z)$ erfüllt. Mithin ist

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg(1-re^{\vartheta i})\,d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\sqrt{1-2r\cos\vartheta+r^2}\,d\vartheta$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\text{arc tang}\,\frac{r\sin\vartheta}{1-r\cos\vartheta}\,d\vartheta,$$

d. g.

$$\int_0^{2\pi}\lg(1-2r\cos\vartheta+r^2)d\vartheta=0 \text{ und } \int_0^{2\pi}\text{arc tang}\frac{r\sin\vartheta}{1-r\cos\vartheta}d\vartheta=0, r<1.$$

## VI. Kapitel.

## Anwendung bestimmter Integrale in der Reihenlehre.

### §. 114.

### Vorerinnerungen.

Die Theorie der Fourier'schen Reihen veranschaulicht in einem vorzüglichen Grade den ausserordentlichen Nutzen, welchen die Lehre von den unendlichen Reihen unter Umständen aus der Theorie der bestimmten Integrale zu ziehen vermag. Denn gerade mittelst der in den Paragraphen 86. und 87. dargestellten Theoreme Dirichlet's ist es zuerst diesem genialen Forscher gelungen, die Convergenz der trigonometrischen Reihen ausser allen Zweifel zu setzen und zugleich ihre Summe anzugeben. Einen ebenso wichtigen Dienst hat dann später Dirichlet der Theorie der Kugelfunctionen erzeigt, indem er es wieder war, welcher durch eine mit seinem in der Lehre von den Fourier'schen Reihen befolgten Gedankengange nahe verwandte Methode zuerst die Convergenz der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\int_0^{\pi}d\vartheta'\sin\vartheta'\int_0^{2\pi}P_nf(\vartheta',\varphi')\,d\varphi'$$

mit aller wissenschaftlichen Strenge nachwies*). In dieser Reihe bedeutet $n$ eine ganze Zahl und $P_n$ den Coefficienten von $\alpha^n$, welcher aus der Entwicklung des Radicals

$$\frac{1}{\sqrt{[1 - 2\alpha(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi' - \varphi) + \alpha^2]}}$$

nach Potenzen von $\alpha$ hervorgeht. Ihre Summe ferner ist de[illegible]er Function $f(\vartheta, \varphi)$ gleich für alle Werthe von $\vartheta$ und $\varphi$, welche [illegible] zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ sich befinden; die Function $f$ selbst ist völlig willkürlich, nur [illegible] die einzige Bedingung hat sie zu erfüllen, innerhalb der angezeigten Grenzen von $\vartheta$ und $\varphi$ niemals unendlich zu werden. Dieses schöne und für die mathematische Physik äusserst wichtige Resultat werden wir später in der Dirichlet'schen Weise darstellen. Gegenwärtig wollen wir uns mit Betrachtungen von ganz elementarer Natur beschäftigen, nämlich im Vorbeigehen an einige für die Reihenlehre interessanten Folgerungen erinnern, welche aus gewissen im Frühern entwickelten Formeln mit Leichtigkeit sich ziehen lassen. Vorher aber wollen wir die Bemerkung nicht unterdrücken, dass auch die Theorie der sogenannten Potenz- und Facultätenreihen einen bedeutenden Grad von Eleganz und Strenge gewinnt, wenn man bei ihrem Studium die durch die Theorie der bestimmten Integrale gebotenen Hülfsmittel nicht verschmäht. Man vergleiche nur in dieser Hinsicht die beiden Abhandlungen Schlömilch's: „Ueber die Potenzreihen und deren Reste“**) und „Ueber Facultätenreihen“***).

*) Dirichlet. Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données. Crelle. Journal. Bd. 17. S. 35—56.

**) Zeitschrift für Mathematik und Physik. Jahrg. I. S. 129.

***) Ebendaselbst. Jahrg. IV. S. 390.

### . Summationen verschiedener Reihen mittelst bestimmter Integrale.

## §. 115.

### Methode, gegründet auf die Darstellung des allgemeinen Gliedes $u_n$ einer Reihe unter der Form $u_n = v_n \int_\alpha^\beta f_n(x)\, dx$.

Unter den Methoden, welche von den Mathematikern zur ffindung des Werthes einer vorgelegten endlichen oder un- lichen Reihe erdacht worden sind, behauptet die folgende n der hervorragendsten Plätze.

Sei nämlich

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

solche endliche oder unendliche convergirende Reihe, n allgemeines Glied $u_n$ in zwei Factoren $v_n$ und $w_n$ zer- werden kann, von denen der eine $w_n$ durch ein bestimmtes gral $w_n = \int_\alpha^\beta f_n(x)\, dx$ darstellbar ist. Unter dieser Voraus- ıng nimmt dieselbe offenbar die Form

$$s = \int_\alpha^\beta dx\, [v_1 f_1(x) + v_2 f_2(x) + \ldots + v_n f_n(x) + \ldots]$$

Lässt sich nun die Summe $\varphi(x)$ der Reihe $\Sigma\, v_n f_n(x)$ ben, so wird augenscheinlich

$$s = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx.$$

1. Zur nähern Erläuterung dieser Methode wollen wir ıchst die Summe der Reihe

$$s = \sum_{n=0}^{n=n} \frac{x^{\alpha+\beta n}}{a + bn},$$

velcher $\alpha$, $\beta$, $a$ und $b$ positive Grössen bedeuten sollen, ıgeben versuchen.

Nach einer in §. 25. gemachten Bemerkung ist der Bruch $\frac{1}{a+bn}$ mit dem Integrale $\int_0^1 y^{a+bn-1}\, dy$ gleichbedeutend. Die e $s$ lässt sich demnach auch so schreiben:

$$s = \sum_0^n x^{\alpha+n\beta} \int_0^1 y^{a+bn-1}\, dy = x^\alpha \int_0^1 dy\, y^{a-1} \sum_0^n (x^\beta y^b)^n;$$

aber

$$\sum_0^n (x^\beta y^b)^n = 1 + x^\beta y^b + (x^\beta y^b)^2 + \ldots = \frac{1-(x^\beta y^b)^{n+1}}{1-x^\beta y^b},$$

folglich

$$s = \sum_0^n \frac{x^{\alpha+n\beta}}{a+nb} = x^\alpha \int_0^1 y^{a-1} \frac{1-(x^\beta y^b)^{n+1}}{1-x^\beta y^b}\, dy.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich offenbar für $n = \infty$, wenn $x < 1$*); denn nun wird die jetzt convergirende Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{x^{\alpha+n\beta}}{a+nb} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{a-1}\, dy}{1-x^\beta y^b}.$$

Man kann diesem Integrale leicht eine andere Gestalt geben, indem man statt der Veränderlichen $y$ eine neue Variable $z^\beta = x^\beta y^b$ einführt. So nämlich ergiebt sich ohne Mühe

$$\sum_0^\infty \frac{x^{\alpha+n\beta}}{a+bn} = \frac{\beta}{b}\, x^{\alpha-\frac{\beta}{b}a} \int_0^x \frac{z^{\frac{\beta}{b}a-1}\, dz}{1-z^\beta},$$

eine Form, die man unmittelbar dadurch gewinnen kann, dass man die geometrische Reihe $\sum_0^\infty (z^\beta)^n = \frac{1}{1-z^\beta}$, $z < 1$ zuvörderst mit $z^{\frac{a}{b}-1}\, dz$ multiplicirt, darauf zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = x$ integrirt und schliesslich dem erzielten Resultate den Factor $x^{\alpha-\frac{a}{b}\beta}$ beifügt.

2. Ein dem so eben erörterten ganz analoges Verfahren

*) Eigentlich braucht nur $x^\beta < 1$ zu sein, woraus folgt, dass man dem $\beta$ auch negative Werthe beilegen kann; für $\alpha$ sind augenscheinlich negative Werthe immer zulässig.

lässt sich augenscheinlich auch bei den Reihen in Anwendung bringen, deren allgemeines Glied die Gestalt $\frac{x^{\alpha+\beta n}}{(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)}$ besitzt. Denn man hat

$$\frac{x^{\alpha+n\beta}}{(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)} = \frac{x^{\alpha+\beta n}}{b}\left[\frac{1}{a+nb} - \frac{1}{a+(n+1)b}\right]$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta n}}{b}\int_0^1 y^{a+bn-1}(1-y^b)\,dy,$$

also

$$\sum_0^n \frac{x^{\alpha+n\beta}}{[a+nb][a+(n+1)b]} = \frac{x^\alpha}{b}\int_0^1 y^{a-1}(1-y^b)\frac{1-(x^\beta y^b)^{n+1}}{1-x^\beta y^b}\,dy.$$

Setzt man hier beispielsweise $x = 1$, so erhält man

$$\sum_0^n \frac{1}{[a+nb][a+(n+1)b]} = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+(n+1)b}\right] = \frac{n+1}{a[a+(n+1)b]},$$

demnach für $n = \infty$, für welchen Fall die obige Reihe noch convergirt,

$$\sum_0^\infty \frac{1}{[a+nb][a+(n+1)b]} = \frac{1}{ab}.$$

Der specielle Fall $x = 1$ lässt sich übrigens auf die einfachste Weise durch die Summation der einzelnen Glieder

$$\frac{1}{b}\left[\frac{1}{a+bn} - \frac{1}{a+(n+1)b}\right],\ n = 0, 1, 2, \ldots n,$$

und für ein über jede Grenze hinaus wachsendes $n$ durch nachfolgenden Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen erledigen.

**3.** Besteht der Nenner des allgemeinen Gliedes aus drei Factoren $a + nb$, $a + (n + 1)b$ und $a + (n + 2)b$, so hat man offenbar diese Beziehungen:

$$\frac{x^{\alpha+n\beta}}{[a+bn]\,[a+(n+1)b]\,[a+(n+2)b]}$$

$$= \frac{x^{\alpha+n\beta}}{2b}\left\{\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)} - \frac{1}{(a+\overline{n+1}.b)(a+\overline{n+2}.b)}\right],$$

$$= \sum_0^n \frac{x^{a+n\beta}}{2b[a+nb][a+(n+1)b]} - \sum_0^n \frac{x^{a+n\beta}}{2b[a+\overline{n+1}.b][a+(n+2)b]}$$

$$= \frac{x^a}{2b^2}\int_0^1 y^{a-1}(1-y^b)\frac{1-(x^\beta y^b)^{n+1}}{1-x^\beta y^b}dy - \frac{x^a}{2b^2}\int_0^1 y^{a+b-1}(1-y^b)\frac{1-(x^\beta y^b)^{n+1}}{1-x^\beta y^b}dy$$

$$= \frac{x^a}{2b^2}\int_0^1 y^{a-1}(1-y^b)^2 \frac{1-(x^\beta y^b)^{n+1}}{1-x^\beta y^b}dy.$$

Ist folglich wieder $x < 1$*), so wird für $n = \infty$

$$\sum_0^\infty \frac{x^{a+n\beta}}{[a+bn][a+(n+1)b][a+(n+2)b]} = \frac{x^a}{2b^2}\int_0^1 \frac{y^{a-1}(1-y^b)^2 dy}{1-x^\beta y^b}.$$

Und ist $x = 1$, so gilt diese Gleichung

$$\sum_0^\infty \frac{1}{[a+nb][a+(n+1)b][a+(n+2)b]} = \frac{1}{2b^2}\int_0^1 y^{a-1}(1-y^b)\,dy,$$

d. g. mit Benutzung der in §. 60. bewiesenen Formel

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}dx = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}$$

$$\sum_0^\infty \frac{1}{[a+nb][a+(n+1)b][a+(n+2)b]} = \frac{1}{2ab(a+b)}.$$

Auch diese Beziehung hätte man in der einfachsten Weise durch blosse Vereinigung der gleichnamigen Glieder in den beiden Reihen

$$\sum_0^n \frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)} \quad \text{und} \quad \sum_0^n \frac{1}{[a+\overline{n+1}b][a+(n+2)b]}$$

mit nachfolgendem Uebergang zum Unendlichen erzielen können. Denn man findet auf diesem Wege sofort die Gleichung

*) Vergl. die Anmerkung S. 358.

$$\sum_0^n \frac{1}{[a+nb]\,[a+(n+1)b]\,[a+(n+2)b]}$$

$$=\frac{1}{2b}\left[\frac{1}{a\,(a+b)}-\frac{1}{(a+nb)\,(a+\overline{n+1}.b)}\right].$$

Will man dies letztere Resultat aus dem obigen Integrale

$$\frac{x^a}{2b^2}\int_0^1 y^{a-1}\,(1-y^b)^2\,\frac{1-(x^\beta y^b)^{n+1}}{1-x^\beta y^b}\,dy$$

ableiten, so hat man zu beachten, dass ausser der Gleichung

$$\frac{1}{2b^2}\int_0^1 y^{a-1}\,(1-y^b)\,dy=\frac{1}{2ab\,(a+b)}$$

noch die Relation

$$\frac{1}{2b^2}\int_0^1 y^{a+\overline{n+1}b-1}\,(1-y^b)dy=\frac{1}{2b^2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{b}+n+1\right)}{\frac{a+(n+1)b}{b}(a+\overline{n+2}.b)\,\Gamma\left(\frac{a}{b}+n+1\right)}$$

$$=\frac{1}{2b}\,\frac{1}{[a+(n+1)b]\,[a+(n+2)b]}$$

gilt.

Wie man endlich in dieser Weise weiter gehen kann, ist unmittelbar einleuchtend. Wir verlassen daher diesen Gegenstand, wenden uns vielmehr zur Summation der allgemeineren Reihe

$$4. \qquad s=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{A_n\,x^n}{(a+nb)\,(a+nb+1)\ldots(a+nb+p-1)},$$

die wir natürlich convergent voraussetzen und in der $p$ eine absolute ganze Zahl, $A_n$ eine beliebige, $b$ und $a$ dagegen positive Constanten bezeichnen sollen.

Das allgemeine Glied $u_n$ dieser Reihe ist ersichtlich in folgender Form darstellbar:

$$u_n=A_n\,x^n\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1 y^{a+nb-1}\,(1-y)^{p-1}\,dy=A_n\,x^n\,\frac{\Gamma(a+nb)}{\Gamma(a+nb+p)}.$$

Mithin wird

$$s = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 y^{a-1} (1-y^b)^{p-1} dy \sum_0^\infty A_n (x y^b)^n.$$

Heisst folglich $\varphi(x)$ die Summe der einfacheren Reihe $\sum_0^\infty A_n x^n$, so wird

$$\sum_0^\infty \frac{A_n x^n}{(a+nb)(a+nb+1)\dots(a+nb+p-1)} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{p-1}\varphi(xy^b)dy.$$

Wie Külp in seiner Differential- und Integralrechnung (S. 319—322) bemerkt, verdankt man Schlömilch die Summirung dieser Reihe.

Setzt man behufs eines besondern Falles $\varphi(x) = (1+x)^\alpha$, so ist $A_n = \binom{\alpha}{n} = \alpha_n$ und folglich für $x^2 < 1$

$$\sum_0^\infty \frac{\alpha_n x^n}{(a+nb)\dots(a+nb+p-1)} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{p-1} (1+y^b x)^\alpha dy.$$

Wie man sieht, kann hier durch Entwicklung des Binoms $(1-y)^{p-1}$ das vorstehende Integral wegen der Natur des $p$ immer auf eine endliche Reihe von Integralen der Form $\int_0^1 y^m (1+xy^b)^\alpha dx$ zurückgeführt werden.

Bekanntlich convergirt die binomische Reihe auch noch für $x=1$, sofern nur $\alpha > -1$; für $x = -1$ dagegen muss $\alpha > 0$ sein.

Wählt man $b = 1$ und $\alpha = -(a+p)$, so ist

$$\int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{p-1} (1+xy)^\alpha dy = \frac{1}{(1+x)^a} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(p)}{\Gamma(a+p)} \text{ *)},$$

demnach für $x^2 < 1$

$$\sum_0^\infty \frac{-(a+p)_n x^n}{(a+n)(a+n+1)\dots(a+n+p-1)}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^a} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+p)} = \frac{1}{(1+x)^a} \cdot \frac{1}{(a+p-1)(a+p-2)\dots a}.$$

Und nimmt man $x = -1$, $\alpha > 0$, so entspringt

*) Vergl. §. 80, Gl. $7^a$.

$$\sum_0^{\infty} \frac{\alpha_n x^n}{(a+n)(a+n+1)\dots(a+n+p-1)}$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(p+\alpha)}{\Gamma(p)\,\Gamma(a+\alpha+p)} = \frac{1}{(p-1)!}\cdot\frac{\Gamma(a)}{(a+\alpha)\dots(a+\alpha+p-2)(a+\alpha+p-1)}$$

5. Als eine letzte Anwendung der im Vorhergehenden erörterten Summationsmethode wählen wir noch die Aufgabe, den Werth $s$ der Reihe

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}\cos n\varphi = \cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi + \dots,$$

welche bekanntlich immer convergirt, so lange $\varphi$ keinem geraden Vielfachen der Zahl $\pi$ gleich ist*), anzugeben.

Beachtet man hier die Beziehung

$$\frac{1}{n}\int_0^{\infty} e^{-nx}\,dx,$$

so entspringt sogleich

$$\sum_1^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n} = \int_0^{\infty} dx\left[e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}\cos 2\varphi + \dots + e^{-nx}\cos n\varphi + \dots\right].$$

Nun ist aber nach der in §. 95. unter 1. angeführten Formel

$$\sum_1^{\infty} e^{-nx}\cos n\varphi = \frac{e^{-x}\cos\varphi - e^{-2x}}{1-2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}},$$

folglich

$$\sum_1^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n} = \int_0^{\infty} e^{-x}\,\frac{\cos\varphi - e^{-x}}{1-2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}}.$$

Und weil ferner

$$\int \frac{e^{-x}\cos\varphi - e^{-2x}}{1-2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}}\,dx = \tfrac{1}{2}\int\frac{d(1-2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x})}{1-2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\lg\left[1-2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}\right] + \text{const.},$$

also

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,\frac{\cos\varphi - e^{-x}}{1-2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}}\,dx = -\lg\left(2\sin\tfrac{1}{2}\varphi\right)$$

*) Vergl. z. B. Stern's Analysis §. 119, S. 227.

ist, so hat man schliesslich

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\lg (2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi).$$

## §. 116.

### Parseval's Methode.*)

Aus der Theorie der Fourier'schen Reihen ist bekannt, dass jede endlichbleibende Function $f(x)$ innerhalb des Intervalles $(0, \pi)$ durch eine nach Cosinus der Vielfachen von $x$ fortschreitende Reihe sich darstellen lässt, wenn die Coefficienten der Gleichung

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

gemäss bestimmt werden. Mit Rücksicht hierauf kann man sofort eine Relation begründen, die unter dem Namen der Parseval'schen Formel bekannt und die Quelle einer Summationsmethode unendlicher Reihen ist.

Sei nämlich

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots$$

und

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + b_n \cos nx + \ldots;$$

alsdann folgt durch Multiplication der Function $f(x)$ mit $\frac{2}{\pi} \varphi(x)\, dx$ oder umgekehrt und nachherige Integration zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \pi$ die Beziehung

$$5.\quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \varphi(x)\, dx = \tfrac{1}{2} a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$$

Lässt sich demnach das allgemeine Glied $u_n$ einer Reihe $\sum_0^{\infty} u_n$ in zwei Factoren $a_n$ und $b_n$ zerlegen, von denen jeder durch ein bestimmtes Integral von der Form $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \begin{matrix} f(x) \\ \varphi(x) \end{matrix} \cos nx\, dx$ darstellbar ist, nimmt also die Reihe die Gestalt

*) Vergl. Catalan. Traité élémentaire des séries. Paris 1860.

$$s = \sum_0^\infty u_n = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$$

an, so besteht für die Summe $s$ derselben die Gleichung

$$s = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, \varphi(x)\, dx + \tfrac{1}{2} a_0 b_0.$$

Sei beispielsweise folgende unendliche Reihe

$$s = \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{5.7} + \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{9.11} + \frac{1}{7^2} \cdot \frac{1}{13.15} + \ldots,$$

deren allgemeines Glied offenbar die Form

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

besitzt, zu summiren.

Nach §. 83., 3. ist der Factor $a_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$ durch das bestimmte Integral $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{\pi x}{4}\right) \cos(2n+1)\, x\, dx$ ausdrückbar, und ebenso leicht findet sich, dass

$$b_n = \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{\pi}{4} \sin \tfrac{1}{2} x\right) \cos(2n+1)\, x\, dx$$

ist. Beachtet man nun ferner, dass die Darstellungen der Functionen $f(x) = -\frac{\pi}{4} x$ und $\varphi(x) = -\frac{\pi}{4} \sin \frac{1}{2} x$ durch eine Cosinusreihe in dieser Gestalt erscheinen:

$$-\frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots$$

und

$$-\frac{\pi}{4} \sin \frac{x}{2} = -\tfrac{1}{2} + \frac{\cos x}{1.3} + \frac{\cos 2x}{3.5} + \frac{\cos 3x}{5.7} + \ldots,$$

dass also in der Reihe 5. mit Ausnahme des nullten alle Glieder von geradem Range verschwinden; so wird offenbar

$$s = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi^2}{16} x \sin \frac{x}{2}\, dx - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{8} \int_0^\pi x \sin \frac{x}{2}\, dx - \frac{\pi^2}{8}.$$

Aber

$$\int_0^\pi x \sin \frac{x}{2}\, dx = \Big[-2x \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \tfrac{1}{2} x\Big]_0^\pi = 4.$$

mithin

$$s = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

§. 117.

**Summation einiger reciproken Potenzreihen mittelst der Formel**

$$\frac{1}{s^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-sx}\, x^{a-1}\, dx.$$

Die wichtige Formel

$$\text{I.} \qquad \frac{1}{s^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-sx}\, x^{a-1}\, dx$$

besitzt die interessante Eigenschaft, dass sich mittelst ihrer ohne Mühe alle die niedlichen Sätze über reciproke Potenzreihen beweisen lassen, welche Stern in seiner algebraischen Analysis auf elementarem Wege abgeleitet hat. Um diese Eigenthümlichkeit der genannten Relation nicht ganz mit Stillschweigen zu behandeln, wollen wir die Richtigkeit einiger jener Sätze und zwar der nachstehenden in der angedeuteten Weise darthun.*)

Schliesst man die Einheit nicht nur als Basis, sondern auch als Exponent von der Betrachtung aus; so ist die Summe der

1. reciproken Potenzen aller ganzen Zahlen $= 1$,
2. reciproken Potenzen aller geraden Zahlen $= \log 2$,
3. reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen $4n+3 = \frac{\pi}{8} - \frac{\log 2}{2}$,
4. reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n+3 = \frac{1}{4} \log 2$,
5. reciproken geraden Potenzen aller Zahlen $4n+2 = \frac{\pi}{8}$.**)

1. Nehmen wir in der Formel I. für $s$ zunächst alle ganzen Zahlen $2, 3, 4, \ldots$, so wird

$$\sum_2^\infty \frac{1}{s^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1}\, dx \sum_2^\infty e^{-sx} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-2x}\, x^{a-1}\, dx}{1 - e^{-x}}.$$

---

*) Man sehe auch Grunert's Archiv. Thl. 41, S 220—231.
**) Stern a. a. O. Note X. S. 446—447.

etzt man nun für $a$ ebenfalls die Reihe $a = 2, 3, \ldots,$ springt

$$\vdots = \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{1-e^{-x}} dx \sum_1^\infty \frac{x^a}{a!} = \int_0^\infty \frac{(e^x-1)e^{-2x}}{1-e^{-x}} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.^{*})$$

kann diesen Satz leicht verallgemeinern, indem man die positiven ganzen Zahlen $p+1,\ p+2,\ p+3, \ldots,$ $> 0$, wählt.**) Denn so gewinnt man vorerst die ung

$$\frac{1}{(p+s)^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} \frac{e^{-(p+1)x}}{1-e^{-x}} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-px}\, x^{a-1}}{e^x - 1} dx$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(p+s)^a} = \int_0^\infty e^{-px} dx = \frac{1}{p}.$$

Nun setze man in I. für alle geraden Zahlen. Da- kommt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-2x}\, x^{a-1}}{1-e^{-2x}} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{e^{2x}-1},$$

h für $a = 2, 3, 4, \ldots$

$$\sum \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n)^a} = \int_0^\infty \frac{(e^x-1)\, dx}{e^{2x}-1} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\, dx}{1+e^{-x}} = \lg 2.$$

Wenn wir jetzt in I. anstatt $s$ alle Zahlen von der $4n+3$ substituiren, so erhalten wir zunächst die Be- g

$$\frac{1}{(4n+3)^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-3x}}{1-e^{-4x}} x^{a-1} dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^x\, x^{a-1}\, dx}{e^{4x}-1},$$

mnach wird

---

*) Dieser Satz ist von Jacob Steiner. Vergl. Crelle. Journal. Bd. 13.

**) Stern a. a. O. S. 434.

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^{2r+1}}=\int_0^{\infty}\frac{e^x}{e^{4x}-1}\cdot\frac{e^x+e^{-x}-2}{2}\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^{2x}-1}-\int_0^{\infty}\frac{e^x\,dx}{e^{4x}-1}.$$

Aber

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{e^{2x}-1}=\tfrac{1}{2}\int\frac{e^{-2x}\,dx}{1-e^{-2x}}=\tfrac{1}{4}\lg\left(1-e^{-2x}\right)+\text{const.}$$

und

$$\int\frac{e^x\,dx}{e^{4x}-1}=-\tfrac{1}{2}\int\frac{e^x(1-e^{-2x}+1+e^{2x})dx}{1-e^{4x}}=-\tfrac{1}{2}\int\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}-\tfrac{1}{2}\int\frac{e^x\,dx}{1-e^{2x}}$$

$$=-\tfrac{1}{2}\text{ arc tang } e^x-\frac{1}{2i}\text{ arc tang }(i\,e^x)+\text{const.},$$

d. g. wegen $\text{arc tang } vi=\frac{1}{2i}\log\frac{1-v}{1+v}$:

$$\int\frac{e^x\,dx}{e^{4x}-1}=-\tfrac{1}{2}\text{ arc tang } e^x+\tfrac{1}{4}\log\frac{1-e^x}{1+e^x}+\text{const.}$$

Daher

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{e^{2x}-1}-\int\frac{e^x\,dx}{e^{4x}-1}=\tfrac{1}{2}\text{ arc tang } e^x+\tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)^2+\text{const.}$$

$$=\tfrac{1}{2}\text{ arc tang } e^x+\tfrac{1}{2}\lg\frac{1+e^x}{e^x}+\text{const.}$$

und somit schliesslich

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^{2x}-1}-\int_0^{\infty}\frac{e^x\,dx}{e^{4x}-1}=\frac{\pi}{8}-\frac{\log 2}{2}.$$

4. Schreibt man hingegen in der ersten der Formeln 3. statt $a$ allmählich $a=2, 4, 6\ldots$ und vereinigt alsdann die einzelnen Resultate, so gewinnt man diese Gleichung:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^{2r}}=\int_0^{\infty}\frac{e^x\,dx}{e^{4x}-1}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-2x}\,dx}{e^{-2x}+1}$$

$$=\Big[-\tfrac{1}{4}\log\left(1+e^{-2x}\right)\Big]_0^{\infty}=\tfrac{1}{4}\log 2.$$

5. Die Voraussetzung $s = 2, 6, 10, \ldots 4n+2, \ldots$ endlich liefert vermöge der Formel I. vorerst die Relation

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(4n+2)^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, e^{-2x}}{1-e^{-4x}}\, dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{2x}\, x^{a-1}}{e^{4x}-1}\, dx,$$

und hieraus fliesst für $a = 2, 4, 6, \ldots$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(4n+2)^{2r}} = \int_0^\infty \frac{e^{2x}}{e^{4x}-1} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+1}$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} e^x\right]_0^\infty = \frac{\pi}{8}.$$

## §. 118.

### Weitere Anwendungen der Gammafunctionen in der Reihenlehre.

In §. 80. haben wir auf Grund des Theoremes $I^b$. gezeigt, dass die wichtige Gauss'sche Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für den Fall $x = 1$ und $\gamma > \alpha + \beta$ immer durch Gammafunctionen darstellbar ist. Ausser dieser existiren aber noch manche andere Reihen, welche ebenfalls eine Reduction auf Gammafunctionen und unter gewissen Umständen mittelst dieser wieder eine Zurückführung auf einfachere Formen gestatten. Wir wollen daher gegenwärtig noch einige Augenblicke bei diesem Gegenstande verweilen und in dieser Hinsicht zunächst folgende Beziehung entwickeln.*)

I. Sei nämlich

1. $A_0 x^n + A_1 x^{n-1}(1-x) + A_2 x^{n-2}(1-x)^2 + \ldots + A_n (1-x)^n = \varphi(x)$,

wobei $A_0, A_1, \ldots$ beliebige Constanten und $n, n-1, \ldots$ ganze Zahlen bedeuten sollen. Wird die Reihe 1. durch $x^{\alpha-n-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx$ multiplicirt und darauf zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ integrirt; so entspringt unter der Annahme $\alpha - n > 0$, $\beta > 0$ sofort die Gleichung

*) Vergl. Limbourg. Théorie de la fonction Gamma, page 120 etc.

$$2.\quad A_0 \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + A_1 \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + A_2 \frac{\Gamma(\alpha-2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \dots$$

$$+ A_n \frac{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-n-1}(1-x)^{\beta-1}\varphi(x)\,dx.$$

Nun ist, weil $n$ eine ganze Zahl ausdrückt,

$$\Gamma(\alpha-n) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n)}\Gamma(\alpha-n) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)},$$

$$\Gamma(\beta+n) = \beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)\,\Gamma(\beta);$$

mithin erhält man aus 2. die andere Relation

$$3.\quad A_0 + A_1\frac{\beta}{\alpha-1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}A_2 + \dots + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n)}A_n$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^{\alpha-n-1}(1-x)^{\beta-1}\varphi(x)\,dx.$$

Setzt man beispielsweise in der Reihe 1. alle Coefficienten von gerader Rangstelle $= +1$, alle $A$ mit ungeradem Index hingegen $= -1$; so ergiebt sich für die Summe $\varphi(x)$ der geometrischen Reihe $x^n \sum_{n=0}^{n=n}\left(-\frac{1-x}{x}\right)^n$ der Ausdruck

$$\varphi(x) = x^{n+1} + (-1)^n(1-x)^{n+1},$$

und folglich entspringt vermöge der Gleichung 3. die Beziehung

$$1 - \frac{\beta}{\alpha-1} + \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)} + \dots + (-1)^n\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\partial x + (-1)^n\int_0^1 x^{\alpha-n-1}(1-x)^{\beta-1}\partial x\right]$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + (-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,\frac{\Gamma(\alpha-n)\,\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha-n+\beta+n+1)}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + (-1)^n\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)(\alpha+\beta)}.$$

Ein ferneres Beispiel zu den jetzigen Betrachtungen liefert die Annahme, dass die $A$ in der Reihe 1. mit den Binomialcoefficienten der $n^{ten}$ Potenz zusammenfallen. Alsdann wird augenscheinlich die Reihe 1. die Entwicklung des Productes

$$x^n\left[1 + \frac{1-x}{x}\right]^n$$

bilden und $\varphi(x) = 1$ sein. Mithin gilt jetzt die Gleichung

$$1 + n_1 \frac{\beta}{\alpha-1} + n_2 \frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)} + \ldots + n_n \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha-n)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta-n)},$$

d. g. wieder mit Benutzung der obigen Formel für $\Gamma(\alpha-n)$, sowie der ähnlichen Relation

$$\Gamma(\alpha+\beta-n) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\ldots(\alpha+\beta-n)}:$$

$$1 + \sum_{r=1}^{r=n} n_r \frac{\beta.(\beta+1)\ldots(\beta+r-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r)} = \frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\ldots(\alpha+\beta-n)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}.$$

Behufs einer letzten Anwendung der Gleichung 3. wollen wir die Reihe 1. mit der folgenden identificiren

$$\varphi(x) = \sum_{r=0}^{r=n} n_r \frac{x^{n-r}\,(1-x)^r}{2^r}.$$

Unter dieser Annahme wird offenbar

$$\varphi(x) = x^n \sum_0^n n_r \left(\frac{1-x}{2x}\right)^r = x^n \left[1 + \frac{1-x}{2x}\right]^n = \left(\frac{1+x}{2}\right)^n,$$

demnach

$$1 + n_1 \frac{\beta}{\alpha-1} \cdot \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot n_2 \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha-1.\alpha-2} + \ldots + \frac{n_n}{2^n} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{2^n} \int_0^1 x^{\alpha-n-1}\,(1-x)^{\beta-1}\,(1+x)^n\,dx.$$

Setzen wir nun hierin wieder $\beta = n+1$, so wird das Integral in $\int_0^1 x^{\alpha-n-1}\,(1-x^2)^n\,dx$ übergehen, also nach §. 60. mit $\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}+1\right)}$ gleichbedeutend werden. Aber

$$\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+n+1\right) = \left(\frac{\alpha-n}{2}+n\right)\left(\frac{\alpha-n}{2}+n-1\right)\ldots\times$$
$$\frac{\alpha-n}{2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}\right) = \frac{\alpha+n}{2} \cdot \frac{\alpha+n-2}{2} \ldots \frac{\alpha-n}{2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}\right),\quad \Gamma(n+1) = n!,$$

und somit wird schliesslich

$$1 + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{n_r}{2^r} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+r-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r)} = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+1)\,\alpha}{(\alpha+n)(\alpha+n-2)(\alpha+n-4)\ldots(\alpha-n)}.$$

II. Die in §. 77. gepflogenen Betrachtungen haben uns gelehrt, dass es unter Umständen sehr zweckmässig ist, wenn man die Bedeutung der Gammafunction bloss als bestimmtes Integral fallen lässt und statt dessen unter ihr eine Grösse versteht, für welche die Relation $a\,\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ überall in Kraft bleibt, was bekanntlich vermöge der Gauss'schen Definitionsgleichung der Function Gamma immer angeht. Von dieser Bemerkung wollen wir auch jetzt Gebrauch machen, um einen sehr allgemeinen Ausdruck für $\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}$ zu erzielen, mit dessen Hülfe sich ohne Mühe gewisse Reihen summiren lassen.

Bezeichnen nämlich $\alpha$ und $\beta$ irgend welche positiven oder negativen Grössen, so hat man kraft der vorhin erwähnten Voraussetzung immer die identische Gleichung

$$1.\qquad \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\;\Gamma(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}\;\Gamma(\alpha+\beta)$$
$$= \Gamma(\alpha+\beta)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\;\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\;\Gamma(\beta)}\right].$$

Die Brüche rechts besitzen hier ersichtlich folgendes Merkmal; das Argument $\alpha+\beta$ ihres gemeinsamen Zählers $\Gamma(\alpha+\beta)$ ist um eine Einheit niedriger, als das Argument des Zählers im ursprünglichen Ausdrucke, und die Argumente ihrer ebenfalls aus zwei Gammafunctionen bestehenden Nenner ergänzen einander zu $\alpha+\beta+1$, dem Argument des Zählers links. Jedes einzelne Glied der rechten Seite vorstehender Gleichung aber gestattet wieder dieselbe Behandlung wie der ursprüngliche Ausdruck, mithin hat man auch folgende Beziehung

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)} = \Gamma(\alpha+\beta-1)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)\;\Gamma(\beta+1)}\right.$$
$$\left. + 2\;\frac{1}{\Gamma(\alpha)\;\Gamma(\beta)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta-1)}\right].$$

Da nun von jedem dieser neuen Glieder in Bezug auf die vorhergehenden ganz ähnliche Bemerkungen wie vorhin gelten, demnach die Recursionsformel 1. eine abermalige Anwendung findet, und da überhaupt dieser Process beliebig oft wiederholt werden kann; so schliesst man leicht, dass bei einer $n$maligen Wiederholung des angezeigten Verfahrens schliesslich die Gleichung

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)} = \Gamma(\alpha+\beta-n+1)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma(\beta+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha-n+2)\,\Gamma(\beta)}+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha-n+3)\,\Gamma(\beta-1)}+\ldots\right]$$

$$=\Gamma(\alpha+\beta-n+1)\sum_{r=0}^{r=n} n_r\,\frac{1}{\Gamma(\alpha-n+r+1)\,\Gamma(\beta-r+1)}$$

erscheinen wird, eine Beziehung, welche ohne die geringste Mühe durch vollständige Induction zur Gewissheit sich erheben lässt. Daraus aber fliesst weiter, wenn man die Gleichung durch $\frac{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-n+1)}$ multiplicirt und die Relationen

$$\Gamma(\alpha-n+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)};$$

$$\Gamma(\alpha+\beta-n+1)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\ldots(\alpha+\beta-n+1)};$$

$$\Gamma(\beta-r+1)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\beta(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-r+1)};$$

$$\Gamma(\alpha-n+1)=\frac{\Gamma(\alpha-n+r+1)}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\ldots(\alpha-n+r)}$$

berücksichtigt, dass

$$1+\frac{n}{1}\,\frac{\beta}{\alpha-n+1}+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{\beta(\beta-1)}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)}+\ldots=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta-n+1)}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta-n+1)(\alpha+\beta-n+2)\ldots(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta)}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\ldots(\alpha-1)\,\alpha}$$

oder einfacher geschrieben

$$2.\quad \sum_{r=0}^{r=n} n_r\,\frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-r+1)}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\ldots(\alpha-n+r)}=\prod_{r=1}^{r=n}\frac{\alpha+\beta-n+r}{\alpha-n+r}$$

ist.

Vertauscht man in der letzten Gleichung einerseits $\beta$ mit $-\beta$, anderseits $\alpha$ mit $-\alpha$, so hat man diesen Fällen entsprechend

$$2^a.\ \sum_0^n(-1)^r\,n_r\,\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+r-1)}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\ldots(\alpha-n+r)}=\prod_1^n\frac{\alpha-\beta-n+r}{\alpha-n+r},$$

$$2^b.\ \sum_0^n(-1)^r\,n_r\,\frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-r+1)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+n-r)}=\prod_1^n\frac{\alpha+n-\beta-r}{\alpha+n-r}.$$

Die gleichzeitige Substitution von $-\alpha$ statt $\alpha$ und $-\beta$ anstatt $\beta$ in Gleichung 2. dagegen giebt die Relation

$$2^c. \quad \sum_0^n n_r \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+r-1)}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+n-r)} = \prod_1^n \frac{\alpha+\beta+n-r}{\alpha+n-r}.$$

Und schreibt man hierin $\alpha - n$ an Stelle von $\alpha$, so kommt

$$2^d. \quad \sum_0^n n_r \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+r-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r)} = \prod_1^n \frac{\alpha+\beta-r}{\alpha-r}.$$

Indem man ferner in den Gleichungen $2^b$. und $2^d$. die beliebige Grösse $\beta$ mit der ganzen Zahl $n$ identificirt, erhält man die Beziehungen

$$\sum_0^n (-1)^r \frac{1}{r!} \frac{[n.(n-1)\ldots(n-r+1)]^2}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha+n-r)} = \prod_1^n \frac{\alpha-r}{\alpha+n-r}$$

und

$$\sum_0^n \frac{1}{r!} \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(r-1)^2]}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r)} = \prod_1^n \frac{\alpha+n-r}{\alpha-r},$$

mithin gilt auch diese Gleichung

$$1 = \sum_0^n (-1)^r \cdot \frac{1}{r!} \frac{[n(n-1)\ldots(n-r+1)]^2}{(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-r)} \cdot \sum_0^n \frac{1}{r!} \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(r-1)^2]}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r)}.$$

## 2. Einige Theoreme über den Zusammenhang gewisser Reihen.

### §. 119.

**Zusammenhang der Reihen** $f(a) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^a}$ **und** $f(1-a) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^{1-a}}$.

Die in §. 68. entwickelte Euler'sche Gleichung

$$\int_0^\infty x^{a-1} \sin \vartheta x \, dx = \frac{\Gamma(a)}{\vartheta^a} \sin \frac{a\pi}{2}, \; 1 > a > 0; \; \vartheta > 0,$$

sowie das in §. 89. bewiesene Dirichlet'sche Theorem II. hat Schlömilch zum Beweise einer von ihm schon 1849 gefundenen interessanten Beziehung zwischen den überhaupt für jedes positive $a > 0$ convergirenden Reihen

$$f(a) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^a} \text{ und } f(1-a) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^{1-a}}, \quad 1 > a > 0$$

benutzt, die wir jetzt entwickeln wollen.*)

Schreibt man nämlich in dem obigen Integrale statt $\vartheta$ nach und nach alle ungeraden Zahlen von 1 bis $4n+1$, so entspringt durch Vereinigung sämmtlicher Resultate die Gleichung

$$\Gamma(a) \sin\frac{a\pi}{2}\left[\frac{1}{1^a} - \frac{1}{3^a} + \frac{1}{5^a} - \ldots + \frac{1}{(4n+1)^a}\right]$$

$$= \int_0^\infty x^{a-1}\, dx \,[\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \ldots + \sin(4n+1)x],$$

d. g. mit Benutzung der bekannten Formel

$$\sum_0^{2n} (-1)^r \sin(2r+1)x = \frac{\sin 2(2n+1)x}{2\cos x} : \text{**)}$$

$$\Gamma(a) \sin\frac{a\pi}{2} \sum_0^{2n} (-1)^r \frac{1}{(2r+1)^a} = \int_0^\infty \frac{\sin 2(2n+1)x}{2\cos x} x^{a-1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2^a}\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{2\cos\frac{x}{2}} x^{a-1} dx \text{ ***)} = \frac{1}{2^a}\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\sin\frac{x}{2}\, x^{a-1}\, dx.$$

Beachtet man nun, dass die Gründe, auf denen das oben erwähnte Dirichlet'sche Theorem beruht, unverändert fortbestehen, wenn die dortige Constante $a$ über jede Grenze hinaus zunimmt und dass hierdurch bloss der Unterschied zwischen $a = l\pi$ und $a \,(=)\, l\pi$ verschwindet: so sieht man sofort, dass auch für $a = \infty$ jener Lehrsatz Dirichlet's noch gültig bleibt, sofern nur die entstehende Reihe den convergenten angehört.

---

*) Zeitschrift für Mathematik u. Physik. Jahrgg. 3. S. 130 — 131.
**) Vergl. §. 81, Anmerkung *).
***) Siehe §. 5, 4; §. 14.

Dies ist hier der Fall, denn bei unendlich werdendem $n$ geht das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \sin\frac{x}{2}\, x^{a-1}\, dx$ über in

$$\pi \sum_0^\infty \sin\tfrac{1}{2}(s\pi)\cdot(s\pi)^{a-1} = \pi^a\left[\frac{1}{1^{1-a}} - \frac{1}{3^{1-a}} + \frac{1}{5^{1-a}} - \frac{1}{7^{1-a}} + \cdots\right].$$

Man hat daher den Satz Schlömilch's:

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^a f(a)\, \Gamma(a) \sin\frac{a\pi}{2} = f(1-a),\ 1 > a > 0.$$

Wie Schlömilch bemerkt hat, lässt sich das so eben benutzte Verfahren überhaupt bei jedem Integrale $\int_a^b f(x) \sin \vartheta x\, dx$, dessen Werth $\psi(\vartheta)$ bekannt ist, zur Anwendung bringen, vorausgesetzt natürlich, dass beim Unendlichwerden der einen oder der andern Integrationsgrenze die entstehende Reihe nicht divergirt. Man hat alsdann sofort

$$\psi(1) - \psi(3) + \psi(5) - \psi(7) + in\ inf.$$

$$= \lim \tfrac{1}{2} \int_{2a}^{2b} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \sin\frac{x}{2}\, f\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Den Grenzwerth des Integrales aber wird man unmittelbar wieder vermöge des Dirichlet'schen Satzes entdecken; für ein von Null verschiedenes $a$ ist freilich vorerst eine Zerfällung des Integrales in zwei andere von 0 bis $2a$ und von 0 bis $2b$ erforderlich.

Lassen wir z. B. nach Schlömilch's Vorgange das Integral $\psi(\vartheta)$ mit dem folgenden

$$\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}\, \vartheta\, e^{-\left(\frac{\vartheta}{2\alpha}\right)^2} = \int_0^\infty x\, e^{-\alpha^2 x^2} \sin \vartheta x\, dx\, ^{*})$$

zusammenfallen, so entspringt

*) Vergl. §. 108, 4.

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}\left[e^{-\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2} - 3\,e^{-\left(\frac{3}{2\alpha}\right)^2} + 5\,e^{-\left(\frac{5}{2\alpha}\right)^2} - \ldots\right]$$

$$= \lim \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \sin\frac{x}{2}\, e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{4}}\, \frac{x}{2}\, \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\left[e^{-\frac{\alpha^2\pi^2}{4}} - 3\,e^{-\frac{9\alpha^2\pi^2}{4}} + 5\,e^{-\left(\frac{5\alpha\pi}{2}\right)^2} - \ldots\right]$$

r einfacher geschrieben

$$\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^3 \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)\, e^{-\left(\frac{2n+1}{2\alpha}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3} \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)\, e^{-\left[\frac{(2n+1)\alpha\pi}{4}\right]^2}.$$

s Product der Exponenten von

$$e^{-\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2} = q \text{ und } e^{-\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^2} = r,$$

h. das Product der Logarithmen von $q$ und $r$ ist augen-einlich dem Quadrate von $\frac{\pi}{4}$ gleich. Mit Rücksicht hierauf st sich demnach der vorstehende Satz auch in folgender ssung aussprechen.

Wenn die echten Brüche $q$ und $r$ der Art gewählt sind, s

$$\lg q \cdot \lg r = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

, so findet die Beziehung Statt:

$$\sqrt[4]{\left(\lg\frac{1}{q}\right)^3} \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)\, q^{(2n+1)^2}$$

$$= \sqrt[4]{\left(\lg\frac{1}{r}\right)^3} \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)\, r^{(2n+1)^2}.$$

ese Relation ähnelt sehr einer andern, die Cauchy gegeben t und deren Richtigkeit von Abel mittelst elliptischer Func-nen nachgewiesen ist.*) Besitzen nämlich die echten üche $q$ und $r$ die Eigenschaft, dass

*) Note sur quelques formules elliptiques in: Oeuvres compl., me I., p. 299—308 oder Crelle. Journal. Bd. 4, S. 85.

$$\lg q \cdot \lg r = \pi^2$$

ist, so gilt die Gleichung*)

$$\sqrt[4]{\lg \frac{1}{r}} \cdot [\tfrac{1}{2} + r + r^4 + r^9 + r^{16} + \ldots] = \sqrt[4]{\lg \frac{1}{q}} \cdot [\tfrac{1}{2} + q + q^4 + q^9 + q^{16} + .].$$

Man gelangt — wie ich jetzt zu zeigen versuchen will — zu diesem Satze sehr einfach, wenn man erwägt, dass der von Schlömilch zur Herleitung seiner im Obigen mitgetheilten Relationen befolgte Gedankengang ebenfalls bei dem Integrale

$$\psi(n) = \int_a^b f(x) \cos nx \, dx$$

Anwendung findet. Setzt man nämlich für $n$ zunächst al[le] ganzen Zahlen von 1 bis $n$, so ergiebt sich sofort, dass

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \ldots + \psi(n) = \int_a^b f(x) dx \left[ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right]$$

$$= -\tfrac{1}{2} \int_a^b f(x) \, dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} f(2x) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \, dx$$

und demnach bei einer unendlichen convergirenden Reihe

$$\sum_1^\infty \psi(n) = -\tfrac{1}{2} \int_a^b f(x) \, dx + \lim \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} f(2x) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \, dx$$

ist.

Nimmt man hier beispielsweise das Laplace'sche Integral**)

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \, e^{-\frac{n^2}{4p}} = \int_0^\infty e^{-px^2} \cos nx \, dx,$$

so erhält man augenblicklich

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \sum_1^\infty e^{-\frac{n^2}{4p}} = -\tfrac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{p}} + \lim \int_0^\infty e^{-4px^2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \, dx$$

$$= -\tfrac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{p}} + \frac{\pi}{2} + \pi \sum_1^\infty e^{-4pn^2\pi^2}.$$

---

*) Abel a. a. O. p. 308.

**) Siehe §. 97., 1.

Nun ist, wenn man $e^{-\frac{1}{4p}} = q$ und $e^{-4p\pi^2} = r$ setzt,

$$\lg q \,.\, \lg r = \pi^2,$$

mithin nach einer einfachen Reduction

$$\sqrt[4]{\lg \frac{1}{q}} \left[\tfrac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} q^{n^2}\right] = \sqrt[4]{\lg \frac{1}{r}} \left[\tfrac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} r^{n^2}\right],$$

w. z. b. w.

## §. 120.

### Dirichlet's Theorem über den Zusammenhang der Reihen $\sum\limits_{0} c_s \cos s a$, $\sum\limits_{s=0} c_s \cos \frac{2 s^2 \pi}{n}$ und $\sum\limits_{s=1} c_s \sin \frac{2 s^2 \pi}{n}$ *).

Nach den in §. 69. angestellten Betrachtungen sind bekanntlich die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos (x^2) \cos 2 v x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\cos v^2 + \sin v^2\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin (x^2) \cos 2 v x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\cos v^2 - \sin v^2\right]$$

Folgerungen der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i),$$

die ihrerseits wieder aus der Euler'schen Formel

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(k+\vartheta i)x} x^{a-1} \, dx = \frac{\Gamma(a)}{(k + \vartheta i)^a}$$

hervorging. Jener Gleichung, d. h. der beiden Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \cos (x^2) \, dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} \sin (x^2) \, dx$ werden wir uns jetzt bedienen zur Ableitung eines äusserst eleganten, die Summation gewisser goniometrischen Reihen betreffenden Dirichlet'schen Theo-

*) P. G. Lejeune-Dirichlet. Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies. Crelle. Journal. Bd. 17, S. 57–67.

remes. Den numerischen Werth $\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ der genannten Integrale werden wir jedoch nicht als bekannt voraussetzen, weil er als ganz beiläufiges Resultat unserer Untersuchungen erscheinen wird. Wir nennen vielmehr

$$1. \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\, dx = a, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\, dx = b,$$

schreiben also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2}\, dx = a + bi.$$

Operiren wir nun mit dieser Gleichung in der frühern Weise, so ergiebt sich, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) \cos 2\nu x\, dx = a \cos(\nu^2) + b \sin(\nu^2)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) \cos 2\nu x\, dx = b \cos(\nu^2) - a \sin(\nu^2)$$

ist.

In diesen Gleichungen wollen wir $x$ mit $\frac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$ und $\nu$ mit $s\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ vertauschen, wo $\alpha$ eine neue Veränderliche und $n$ und $s$ positive Constanten bezeichnen sollen, die wir behufs der folgenden Untersuchung überdies als ganze Zahlen voraussetzen werden. Durch Ausführung der genannten Operationen gewinnen wir ersichtlich die folgenden Beziehungen

$$2. \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) \cos s\alpha\, d\alpha = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left[a \cos\frac{2s^2\pi}{n} + b \sin\frac{2s^2\pi}{n}\right], \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) \cos s\alpha\, d\alpha = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left[b \cos\frac{2s^2\pi}{n} - a \sin\frac{2s^2\pi}{n}\right]. \end{cases}$$

Nun sei

$$3. \quad F(\alpha) = c_0 + c_1 \cos\alpha + c_2 \cos 2\alpha + \ldots + c_s \cos s\alpha + \ldots = \Sigma c_s \cos s\alpha$$

eine endliche oder unendliche Cosinusreihe, die aber für den letzten Fall als convergent vorausgesetzt wird und alsdann eine continuirliche Function $F(\alpha)$ darstellen soll. Werden jetzt die vorhergehenden Gleichungen 2. durch die constanten

Coefficienten $c_0, c_1, c_2 \ldots$ der Reihe 3. multiplicirt und darauf addirt, so entspringen mit Rücksicht auf 3. die Beziehungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) F(\alpha)\, d\alpha = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left[a \sum c_s \cos\frac{2s^2\pi}{n} + b \sum c_s \sin s^2 \frac{2\pi}{n}\right]$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) F(\alpha) d\alpha = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left[b \sum c_s \cos s^2 \frac{2\pi}{n} - a \sum c_s \sin s^2 \frac{2\pi}{n}\right],$$

die wir abkürzend in folgender Weise schreiben wollen

$$4. \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) F(\alpha)\, d\alpha = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left[a\, G + b\, H\right], \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) F(\alpha)\, d\alpha = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left[b\, G - a\, H\right]. \end{cases}$$

Um die Werthe dieser Integrale zu ermitteln, werden wir die Integrationen zunächst von $-(4k+1)\pi$ bis $(4k+1)\pi$ erstrecken, wo $k$ irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet. Jedes dieser beiden neuen Integrale denken wir uns hierauf wieder in $4k+1$ andere zwischen den Grenzen $(2h-1)\pi$ und $(2h+1)\pi$ zerlegt, in denen für $h$ nach und nach alle ganzen Zahlen von $-2k$ bis $+2k$ zu setzen sind. Die Transformation dieser Theilintegrale in zweckmässige Formen und ihre nachherige Vereinigung wird uns dann Ausdrücke liefern, die für ein über jede Grenze hinaus wachsendes $k$ zu den Werthen der vorgelegten Integrale 4. führen.

Da nun für $\alpha = 2h\pi + \beta$ wegen $F(2h\pi + \beta) = F(\beta)$

$$\int_{(2h-1)\pi}^{(2h+1)\pi} \cos\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) F(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos\frac{n(2h\pi+\beta)^2}{8\pi} F(\beta)\, d\beta$$

und

$$\int_{(2h-1)\pi}^{(2h+1)\pi} \sin\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) F(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\frac{n(2h\pi+\beta)^2}{8\pi} F(\beta)\, d\beta$$

ist, so wird

$$\int_{-(4k+1)\pi}^{(4k+1)\pi} \cos\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) F(\alpha)\, d\alpha = \sum_{-2k}^{2k} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \frac{n(2h\pi+\beta)^2}{8\pi} F(\beta)\, d\beta$$

und

$$\int_{-(4k+1)\pi}^{(4k+1)\pi} \sin\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) F(\alpha)\, d\alpha = \sum_{-2k}^{2k} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin \frac{n(2h\pi+\beta)^2}{8\pi} F(\beta)\, d\beta.$$

Aber

$$\sum_{-2k}^{2k} \cos \frac{n(\beta+2h\pi)^2}{8\pi} = \sum_{-2k}^{0} \cos \frac{n(\beta+2h\pi)^2}{8\pi} + \sum_{1}^{2k} \cos \frac{n(\beta+2h\pi)^2}{8\pi}$$

$$= \sum_{1}^{2k} \left[\cos \frac{n(\beta+2h\pi)^2}{8\pi} + \cos \frac{n(\beta+2h\pi)^2}{8\pi}\right] + \cos \frac{n\beta^2}{8\pi}$$

$$= \cos \frac{n\beta^2}{8\pi} + 2 \sum_{1}^{2k} \cos \frac{n(\beta^2+4h^2\pi^2)}{8\pi} \cos \frac{hn\beta}{2},$$

und eine ganz ähnliche Behandlung der Summe $\sum_{-2k}^{2k} \sin \frac{n(\beta+2h\pi)^2}{8\pi}$ zeigt, dass sie mit der folgenden

$$\sin \frac{n\beta^2}{8\pi} + 2 \sum_{1}^{2k} \sin \frac{n(\beta^2+4h^2\pi^2)}{8\pi} \cos \frac{n\beta^2}{8\pi}$$

übereinstimmt.

Nun ist

$$\cos \frac{n(\beta^2+4h^2\pi^2)}{8\pi} = \cos \frac{n\beta^2}{8\pi}, \text{ oder } = \cos\left(\frac{n\beta^2}{8\pi} + \frac{n\pi}{2}\right)$$

und

$$\sin \frac{n(\beta^2+4h^2\pi^2)}{8\pi} = \sin \frac{n\beta^2}{8\pi}, \text{ oder } = \sin\left(\frac{n\beta^2}{8\pi} + \frac{n\pi}{2}\right),$$

je nachdem nämlich $h$ zu den geraden, oder ungeraden Zahlen gehört; denn hat man $h = 2r$, so bezeichnet $h^2$ eine Zahl von der Form $4\mu$, und ist $h = 2r + 1$, so besitzt $h^2$ die Form $4\mu + 1$.

Sondert man daher in den vorstehenden Summen die Glieder, welche einem geraden $h$ entsprechen, von denen, in welchen $h$ mit einer ungeraden Zahl zusammenfällt: so erhält man

$$\cos\frac{n\beta^2}{8\pi} + 2\sum_1^{2k}\cos\frac{n(\beta^2+2h^2\pi^2)}{8\pi}\cos\frac{hn\beta}{2}$$

$$= \cos\frac{n\beta^2}{8\pi}\,[1 + 2\cos n\beta + 2\cos 2n\beta + \ldots + 2\cos nk\beta]$$

$$+ \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{n\beta^2}{8\pi}\right)\left[2\cos\frac{n\beta}{2} + 2\cos\frac{3n\beta}{2} + \ldots + 2\cos\frac{2k-1}{2}n\beta\right]$$

und

$$\sin\frac{n\beta^2}{8\pi} + 2\sum_1^{2k}\sin\frac{n(\beta^2+2h^2\pi^2)}{8\pi}\cos\frac{hn\beta}{2}$$

$$= \sin\frac{n\beta^2}{8\pi}\,[1 + 2\cos n\beta + \ldots + 2\cos nk\beta]$$

$$+ \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{n\beta^2}{8\pi}\right)\left[2\cos\frac{n\beta}{2} + 2\cos\frac{3n\beta}{2} + \ldots + 2\cos\frac{2k-1}{2}n\beta\right].$$

Nach §. 81. aber gelten die Relationen

$$1 + 2\cos n\beta + \ldots + 2\cos nk\beta = \frac{\sin(2k+1)\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{n\beta}{2}};$$

$$2\left(\cos\frac{n\beta}{2} + \cos\frac{3n\beta}{2} + \ldots + \cos\frac{(2k-1)n\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{(4k+1)n\beta}{4}}{\sin\frac{n\beta}{4}} - \frac{\sin\frac{(2k+1)n\beta}{2}}{\sin\frac{n\beta}{2}},$$

mithin wird

$$\int_{-(4k+1)\pi}^{(4k+1)\pi}\cos\frac{n\alpha^2}{8\pi}F(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi}\cos\frac{n\beta^2}{8\pi}\,\frac{\sin(2k+1)\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{n\beta}{2}}\,F(\beta)\,d\beta$$

$$+\int_{-\pi}^{+\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{n\beta^2}{8\pi}\right)\left[\frac{\sin(4k+1)\frac{n\beta}{4}}{\sin\frac{n\beta}{4}} - \frac{\sin\frac{(2k+1)n\beta}{2}}{\sin\frac{n\beta}{2}}\right]F(\beta)\,d\beta,$$

d. h., weil die Function $F(\beta)$ und die aus den Sinus und Cosinus gebildeten Ausdrücke durch Vertauschung von $\beta$ mit $-\beta$ unverändert bleiben,

$$\int_{-(4k+1)\pi}^{(4k+1)\pi} \cos\frac{n\alpha^2}{8\pi} F(\alpha)\,d\alpha = 2\int_0^{\pi} d\beta\, F(\beta)\,\frac{\sin(4k+1)\frac{n\beta}{4}}{\sin\frac{n\beta}{4}} \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{n\beta^2}{8\pi}\right)$$

$$+\,2\int_0^{\pi} d\beta\, F(\beta)\,\frac{\sin(2k+1)\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{n\beta}{2}}\left[\cos\frac{n\beta^2}{8\pi} - \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{n\beta^2}{8\pi}\right)\right],$$

und ebenso

$$\int_{-(4k+1)\pi}^{(4k+1)\pi} \sin\frac{n\alpha^2}{8\pi} F(\alpha)\,d\alpha = 2\int_0^{\pi} d\beta\, F(\beta)\,\frac{\sin(4k+1)\frac{n\beta}{4}}{\sin\frac{n\beta}{4}} \sin\left[\frac{n\pi}{2}+\frac{n\beta^2}{8\pi}\right]$$

$$+\,2\int_0^{\pi} d\beta\, F(\beta)\,\frac{\sin(2k+1)\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{n\beta}{2}}\left[\sin\frac{n\beta^2}{8\pi} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{n\beta^2}{8\pi}\right)\right].$$

Die Integrale rechts aber lassen sich leicht in andere, für die Anwendung des in §. 89. erörterten Dirichlet'schen Theoremes II. geeignete Formen umsetzen. Denn schreibt man in den ersten dieser Integrale $\gamma$ anstatt $\frac{1}{4}\,n\beta$ und in den zweiten $\frac{1}{2}\,n\beta = \gamma$, so entspringt

$$\int_{-(4k+1)\pi}^{(4k+1)\pi} \cos\frac{n\alpha^2}{8\pi} F(\alpha)\,d\alpha = \frac{8}{n}\int_0^{\frac{n\pi}{4}} \frac{\sin(4k+1)\gamma}{\sin\gamma} \cos\left[\frac{n\pi}{2}+\frac{2\gamma^2}{n\pi}\right] F\left(\frac{4\gamma}{n}\right) d\gamma$$

$$+\,\frac{4}{n}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)\gamma}{\sin\gamma}\left[\cos\frac{\gamma^2}{2n\pi} - \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\gamma^2}{2n\pi}\right)\right] F\left(\frac{2\gamma}{n}\right) d\gamma$$

und

$$\int_{-(4k+1)\pi}^{(4k+1)\pi} \cos\frac{n\alpha^2}{8\pi} F(\alpha)\,d\alpha = \frac{8}{n}\int_0^{\frac{n\pi}{4}} \frac{\sin(4k+1)\gamma}{\sin\gamma} \sin\left[\frac{n\pi}{2}+\frac{2\gamma^2}{n\pi}\right] F\left(\frac{4\gamma}{n}\right) d\gamma$$

$$+\,\frac{4}{n}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)\gamma}{\sin\gamma}\left[\sin\frac{\gamma^2}{2n\pi} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\gamma^2}{2n\pi}\right)\right] F\left(\frac{2\gamma}{n}\right) d\gamma.$$

Nennen wir nun $g$ und $g_1$ die grössten bezüglich in $\frac{n}{4}$ und $\frac{n}{2}$ enthaltenen ganzen Zahlen; so ist für ein über jede Grenze hinaus wachsendes $k$ einerseits

$$\lim \int_0^{\frac{n\pi}{4}} \frac{\sin(4k+1)\gamma}{\sin\gamma} \cos\left[\frac{n\pi}{2} + \frac{2\gamma^2}{n\pi}\right] F\left(\frac{4\gamma}{n}\right) d\gamma$$

$$= \frac{\pi}{2} \cos\frac{n\pi}{2} \cdot F(0) + \pi \sum_1^g \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{2s^2\pi}{n}\right) F\left(\frac{4s\pi}{n}\right),$$

wenn $n$ nicht durch 4 aufgeht, dagegen

$$\lim \int_0^{\frac{n\pi}{4}} \frac{\sin(4k+1)\gamma}{\sin\gamma} \cos\left[\frac{n\pi}{2} + \frac{2\gamma^2}{n\pi}\right] F\left(\frac{4\gamma}{n}\right) d\gamma$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{2} \cdot F(0) + \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{2g^2\pi}{n}\right) F\left(\frac{4g\pi}{n}\right)\right]$$

$$+ \pi \sum_1^{g-1} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{2s^2\pi}{n}\right) F\left(\frac{4s\pi}{n}\right),$$

wenn $n \equiv 0 \pmod{4}$, Beziehungen, welche wir kurz durch

$$\frac{\pi}{2} \cos\frac{n\pi}{2} F(0) + \pi \sum \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{2s^2\pi}{n}\right) F\left(\frac{4s\pi}{n}\right)$$

andeuten wollen, und ebenso ist in abkürzender Schreibweise

$$\lim \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)\gamma}{\sin\gamma} \left[\cos\frac{\gamma^2}{2n\pi} - \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\gamma^2}{2n\pi}\right)\right] F\left(\frac{2\gamma}{k}\right) d\gamma$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\cos 0 - \cos\frac{n\pi}{2}\right] F(0) + \pi \sum \left[\cos\frac{s^2\pi}{2n} - \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{s^2\pi}{2n}\right)\right] F\left(\frac{2s\pi}{n}\right).$$

Andererseits aber gelten ganz ähnliche Ausdrücke für das Sinusintegral, indem hier nur der Cosinus durch den Sinus zu ersetzen ist. Durch Multiplication dieser verschiedenen Ausdrücke beziehungsweise mit $\frac{8}{n} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$ und $\frac{4}{n} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$ entspringen demnach nunmehr die Gleichungen

$$aG+bH=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\left(1+\cos\frac{n\pi}{2}\right)F(0)+4\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\sum\cos\left(\frac{n\pi}{2}+s^2\frac{2\pi}{n}\right)F\left(\frac{4s\pi}{n}\right)$$

$$+2\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\sum\left[\cos\frac{s^2\pi}{2n}-\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{s^2\pi}{2n}\right)\right]F\left(\frac{2s\pi}{n}\right)$$

und

$$bG-aH=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\sin\frac{n\pi}{2}F(0)+4\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\sum\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{2s^2\pi}{n}\right)F\left(\frac{4s\pi}{n}\right)$$

$$+2\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\sum\left[\sin\frac{s^2\pi}{2n}-\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{s^2\pi}{2n}\right)\right]F\left(\frac{2s\pi}{n}\right).$$

Ein Blick auf diese Beziehungen aber genügt, um das folgende schöne Theorem Dirichlet's aussprechen zu können.

Setzt man die Summe der endlichen oder unendlichen Cosinusreihe

$$F(\alpha)=c_0+c_1\cos\alpha+c_2\cos 2\alpha+\ldots$$

als bekannt voraus, so lassen sich mittelst der continuirlichen Function $F(\alpha)$ immer die Summen $G$ und $H$ der beiden Reihen

$$G=c_0+c_1\cos\left(1^2.\frac{2\pi}{n}\right)+c_2\cos\left(2^2.\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots$$

und

$$H=c_1\sin\left(1^2.\frac{2\pi}{n}\right)+c_2\sin\left(2^2.\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots$$

bestimmen.

## §. 121.

**Die Gauss'schen Summen $\sum_1^{n-1}\cos\frac{2s^2\pi}{n}$ und $\sum_1^{n-1}\sin\frac{2s^2\pi}{n}$ als specielle Fälle des Dirichlet'schen Theoremes dargestellt. Werthermittlung der Integrale $a$ und $b$.**

Das Dirichlet'sche Theorem enthält als besondere Fälle jene berühmten Gleichungen, welche Gauss zuerst in seinen Disquisitiones arithmeticae, art. 356. aufgestellt und die er dann später in allgemeiner Weise zum Gegenstande einer besondern Abhandlung gemacht hat.

Bezeichnen nämlich $p=4m+1$ und $q=4m+3$ absolute Primzahlen, so folgt aus der Lehre von der Kreistheilung, dass

$$u = \sum_{s=0}^{s=p-1} \cos \frac{2s^2\pi}{p} \text{ und } v = \sum_{s=0}^{s=q-1} \sin \frac{2s^2\pi}{q}$$

st, wo $u$ und $v$ durch die beiden Gleichungen

$$u^2 = p \text{ und } v^2 = q$$

efinirt werden. Nur unentschieden bleibt dabei, welches der
orzeichen $\pm$ von $\sqrt{p}$ und $\sqrt{q}$ hier in Betracht kommt.
Vählt man specielle Werthe für $p$ und $q$, so zeigt sich, dass
nmer das Pluszeichen gilt, aber die Schwierigkeit, in der
reistheilung einen allgemeinen Beweis dafür zu geben, ver-
nlasste Gauss zur Abfassung der berühmten Abhandlung:
ummatio quarundam serierum singularium*), in welcher die
ben berührte Frage nach dem Vorzeichen der Wurzelgrössen
re vollständige Erledigung fand. Gestützt auf seine im Vor-
rgehenden mitgetheilten Betrachtungen hat dann später
irichlet einen neuen Beweis jener Gauss'schen Gleichungen
liefert**), und diesem ist endlich wieder im Crelle'schen
urnale***) von Dirichlet ein sehr vereinfachter und von ihm
seinen Vorlesungen über Zahlentheorie benutzter Beweis
nzugefügt†).

Setzen wir die Reihe $F(\alpha)$ als endliche voraus, und neh-
en wir überdies noch an, dass sämmtliche Coefficienten $c$
f die Einheit reducirt werden; so ist

$$(\alpha) = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\frac{\sin(2n-1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

d die Function $F\left(\frac{2t\pi}{n}\right)$ wird augenscheinlich den Werth
ull besitzen für eine durch $n$ nicht theilbare ganze Zahl $t$.
den obigen Gleichungen fallen daher die mit $F\left(\frac{4s\pi}{n}\right)$ und

---

*) Siche Gauss Werke Bd. 2., S. 11 ff.

**) a. a. O. S. 57—67. Sur l'usage etc.

***) Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitesimale
la Théorie des Nombres. Journal Bd. 21. S. 134 ff.

†) Man findet die Reproduction des Dirichlet'schen Vortrages in den
n Dedekind herausgegebenen Vorlesungen Dirichlet's über Zahlen-
eorie. Suppl. I. S. 318 ff.

$\left(\frac{2s\pi}{n}\right)$ multiplicirten Glieder fort, und ausserdem ist $F(0) = $ … $n$.

Mithin entstehen jetzt die Beziehungen

$$aG + bH = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\left(1 + \cos\frac{n\pi}{2}\right).n = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}\left(1 + \cos\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$bG - aH = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\sin\frac{n\pi}{2}.n = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}\sin\frac{n\pi}{2},$$

und hieraus fliesst für $n = 1$ wegen $G = 1$, $H = 0$:

$$a = b = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Für ein beliebiges endliches $n$ ist daher

$$G + H = \sqrt{n}\left(1 + \cos\frac{n\pi}{2}\right) \text{ und } G - H = \sqrt{n}\,.\sin\frac{n\pi}{2},$$

d. g.

$$G = \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\left[1 + \cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right],\quad H = \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\left[1 + \cos\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

Nun lässt sich jede ganze Zahl in einer der Formen $4\mu$, $4\mu + 1$, $4\mu + 2$, $4\mu + 3$ darstellen; setzt man also in den letztern Gleichungen für $n$ diese Formen, so folgt

$$\sum_0^{n-1}\cos\left(\frac{2s^2\pi}{n}\right) = \sqrt{n},\quad \sum_0^{n-1}\sin\frac{2s^2\pi}{n} = \sqrt{n},\quad n = 4\mu;$$

$$\sum_0^{n-1}\cos\frac{2s^2\pi}{n} = \sqrt{n},\quad \sum_0^{n-1}\sin\frac{2s^2\pi}{n} = 0,\quad n = 4\mu \ldots$$

$$\sum_0^{n-1}\cos\frac{2s^2\pi}{n} = 0,\quad \sum_0^{n-1}\sin\frac{2s^2\pi}{n} = 0,\quad n = 4\mu \ldots$$

$$\sum_0^{n-1}\cos\frac{2s^2\pi}{n} = 0,\quad \sum_0^{n-1}\sin\frac{2s^2\pi}{n} = \sqrt{n},\quad n = 4 \ldots$$

## §. 122.

…ätsgesetz in der Theorie der quadratisc…

Gauss'schen Summen … sie –

r Zahlen äusserst wichtigen Legendre'schen Reciprocitäts-setzes in der Theorie der quadratischen Reste führen. Mit r von Dirichlet im Crelle'schen Journale*) gegebenen Dar-ellung dieses vierten Gauss'schen Beweises jenes Fundamen-lgesetzes wollen wir uns jetzt beschäftigen; wir fürchten icht, dass man uns tadeln werde. Des bessern Verständnisses alber schicken wir jedoch zuvörderst folgende Bemerkungen oraus.

Bezeichnet $p$ eine absolute ungerade Primzahl, so muss de durch $p$ nicht aufgehende ganze Zahl $x$ bei der Division it $p$ einen der Reste $1, 2, 3, \ldots, p-1$ liefern. Dividirt an nun die zweiten Potenzen dieser Zahlen durch $p$, so zeigt ch, dass die Quadrate zweier Zahlen $r$ und $p-r$, deren umme $p$ ist, denselben Rest geben. Den Benennungen der hlentheorie zufolge sind daher $r^2$ und $(p-r)^2$ in Bezug auf n Modul $p$ congruent, eine Beziehung, welche man in r Form

$$r^2 \equiv (p-r)^2 \text{ (mod. } p)$$

ıreibt und die der Gleichung

$$r^2 - (p-r)^2 = \text{einem Multiplum von } p = Mp$$

uivalent ist.

Offenbar fliesst nun aus dem Gesagten sogleich weiter, ss der Rest jeder Zahl $x^2$ mit einem der Reste aus der Reihe , $2^2, 3^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ zusammenfallen muss. Diese Reste, lche wir durch $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ andeuten wollen, müssen mer sämmtlich verschieden oder incongruent sein; denn ren z. B. die Reste $a_r$ und $a_s$ zweier Zahlen $r^2$ und $s^2$ aus r Reihe $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ gleich, so müsste

$$r^2 \equiv s^2 \text{ (mod. } p),$$

lglich $r^2 - s^2 = (r+s)(r-s)$ durch $p$ theilbar sein. Nun nn aber, weil $r+s$ höchstens $= \frac{p-1}{2} + \frac{p-3}{2} = p-2$ d ebenfalls $r - s < p$ ist, keiner dieser Factoren durch $p$ fgehen, mithin ist die Congruenz $r^2 \equiv s^2$ (mod. $p$) unmöglich.

*) Bd. 17. S. 65 ff. — Vergl. ferner die Vorlesungen Dirichlets über hlentheorie von Dedekind. Suppl. I.

Die Reihe $1, 2, \ldots, p-1$ enthält ersichtlich ausser den Resten $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ auch noch die $\frac{p-1}{2}$ Zahlen $b_1$, $b_2, \ldots, b_{\frac{p-1}{2}}$. Hat man nun irgend eine durch $p$ nicht theilbare ganze Zahl $q$, so muss sie entweder mit einem der $a$, oder mit einem der $b$ nach dem Modul $p$ congruent sein, d. h. sie genügt entweder der Congruenz

$$x^2 \equiv q \pmod{p},$$

oder es ist nicht der Fall. Findet das Erstere Statt, so wird $q$ ein quadratischer Rest von $p$ genannt; im letztern Falle hingegen heisst $q$ quadratischer Nichtrest von $p$.

In Betreff beider Arten von Resten führen wir die folgenden Sätze an. — Bezeichnen $q$ und $q_1$ quadratische Reste, d. h. also werden die Congruenzen

$$x^2 \equiv q \pmod{p} \text{ und } x_1{}^2 \equiv q_1{}^2 \pmod{p}$$

befriedigt, so besteht auch die Congruenz

$$(xx_1)^2 \equiv qq_1 \pmod{p}.$$

Das Product zweier quadratischen Reste ist demnach wieder ein quadratischer Rest.

Wird die Reihe $1, 2, \ldots, p-1$ mit einer zu $p$ relativen Primzahl $q$ multiplicirt; so müssen, abgesehen von der Ordnung, die Producte $1q, 2q, \ldots, (p-1)q$ in Bezug auf $p$ wieder die Reste $1, 2, \ldots, p-1$ hervorbringen, indem irgend zwei dieser Producte $rq$ und $sq$ nur dann nach dem Modul $p$ congruent sein können, wenn $r$ und $s$ zusammenfallen. Ist folglich $q$ ein quadratischer Rest, so sind nach dem vorhin bewiesenen Satze die $\frac{p-1}{2}$ Zahlen $aq$ quadratische Reste, und daher müssen die $\frac{p-1}{2}$ Zahlen $bq$ quadratische Nichtreste sein. Mithin ist das Product aus einem quadratischen Reste in einen quadratischen Nichtrest ebenfalls ein Nichtrest.

Wenden wir nun diese Wahrheiten auf die Reihe $1^2q$, $2^2q, \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 q$ an, so muss sie, je nachdem $q$ ein quadratischer Rest oder Nichtrest ist, mit der Reihe der $a$, oder der $b$ die nämliche Bedeutung besitzen.

Nach diesen vorgängigen Bemerkungen können wir nunmehr zu dem uns gesteckten Ziele schreiten.

Da $p$ eine ungerade Zahl vorstellt, so hat man die beiden Gleichungen

$$\sum_0^{p-1}\cos\frac{2s^2\pi}{p}=\sqrt{p},\quad \sum_0^{p-1}\sin\frac{2s^2\pi}{p}=0,$$

wenn $p$ von der Form $4\mu+1$ ist, und

$$\sum_0^{p-1}\cos\frac{2s^2\pi}{p}=0,\quad \sum_0^{p-1}\sin\frac{2s^2\pi}{p}=\sqrt{p}$$

für ein $p$ von der Form $4\mu+3$.
Multipliciren wir also die Sinusreihe durch $i$, addiren hierauf das Resultat zu der Cosinusreihe, und beachten wir, dass $i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}=+1$, oder $=+i$ ist, je nachdem man $p\equiv 1 \pmod{4}$, oder $p\equiv 3 \pmod{4}$ hat; so erhalten wir statt der obigen Beziehungen die eine Gleichung

$$\sum_0^{p-1} e^{\frac{2s^2\pi}{p}i}=\sqrt{p}\; i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}.$$

Bedenken wir aber, dass $e^{\frac{2r^2\pi i}{p}}=e^{\frac{2(p-r)^2\pi i}{p}}$ ist, so können wir

$$\sum_0^{p-1} e^{\frac{2s^2\pi i}{p}}=1+e^{\frac{2\pi}{p}i}+e^{2^2\cdot\frac{2\pi}{p}i}+\ldots+e^{(p-1)^2\frac{2\pi}{p}i}$$

in der Gestalt $1+2\sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{\frac{2s^2\pi i}{p}}$ schreiben; mithin ist

$$1+2\sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{\frac{2s^2\pi i}{p}}=\sqrt{p}\,.\,i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

oder noch einfacher

$$1+2\sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{a_s\frac{2\pi i}{p}}=\sqrt{p}\,.\,i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2},$$

weil die Vielfachen von $2\pi i$ in den verschiedenen Exponenten der Zahl $e$ unberücksichtigt bleiben können, also auch statt der

Quadrate der $s$ die ihnen nach dem Modul $p$ congruenten Zahlen $a$ gesetzt werden dürfen.

Ebenso wie vorhin ergiebt sich ferner, dass

$$P = \sum_1^{p-1} e^{2s^2 \frac{q}{p} \pi i} = 1 + 2 \sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{\frac{2s^2 q \pi i}{p}}.$$

Nun stimmt dem Obigen zufolge die Reihe $1^2 q, 2^2 q, \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 q$ entweder mit der Reihe $a$, oder der $b$ überein, je nachdem $q$ quadratischer Rest oder Nichtrest in Bezug auf $p$ ist. Daher hat man diesen Fällen entsprechend

$$P = 1 + 2 \sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{a_s \frac{2\pi i}{p}}, \text{ oder } P = 1 + 2 \sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{b_s \frac{2\pi i}{p}}.$$

Weil aber die geometrische Reihe $\sum_1^{p-1} e^{\frac{2s\pi i}{p}} = -1$ die Summe der beiden Reihen

$$\sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{a_s \frac{2\pi i}{p}} \text{ und } \sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{b_s \frac{2\pi i}{p}}$$

darstellt, so wird

$$1 + 2 \sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{b_s \frac{2\pi i}{p}} = -1 - 2 \sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{a_s \frac{2\pi i}{p}}.$$

Die beiden Werthe von $P$ kann man daher, wenn $\delta$ die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem $q$ quadratischer Rest oder Nichtrest von $p$ ist, durch die neue Gleichung

$$P = \delta \left(1 + 2 \sum_1^{\frac{p-1}{2}} e^{a_s \frac{2\pi i}{p}}\right) = \delta \sqrt{p} \,.\, i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$$

ausdrücken.

Bedeutet nun $q$ ebenfalls eine ungerade Primzahl, so folgt unmittelbar aus der Gleichung für $P$ durch blosse Vertauschung von $p$ mit $q$ die ähnliche Beziehung

$$\sum_{t=0}^{t=q-1} e^{\frac{2t^2\pi p i}{q}} = \varepsilon \sqrt{q}\, i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

in der also $\varepsilon = +1$, oder $= -1$, je nachdem $p$ quadratischer Rest oder Nichtrest von $q$ ist. Durch Multiplication dieser Reihe mit der vorhergehenden und durch Hinzufügung des Factors $1 = e^{\frac{4qpts\pi i}{qp}}$ ergiebt sich mithin die Gleichung

$$\sum_{s=0}^{s=p-1} \sum_{t=0}^{t=q-1} e^{(qs+tp)^2 \frac{2\pi i}{pq}} = \delta \varepsilon \sqrt{pq}\, i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

eine Beziehung, in der die Doppelsumme sofort in eine einfache Summe sich verwandelt, wenn man statt der Grössen $qs + tp$ ihre nach dem Modul $pq$ genommenen Reste substituirt. Diese Reste nämlich müssen sämmtlich verschieden sein, weil, wenn $qs+tp \equiv qs'+t'p$ (mod. $pq$) sein, also $q(s-s')+p(t-t')$ durch $pq$ aufgehen soll, wegen der Grenzen $(0, p-1)$ von $s$ und $s'$ und $(0, q-1)$ von $t$ und $t'$ nothwendig zu gleicher Zeit $s = s'$, $t = t'$ sein muss. Die Zahlen $qs + tp$ liefern demnach in Bezug auf den Modul $pq$ die sämmtlichen Reste $0, 1; 2, 3, \ldots, pq-1$, und sonach besteht jetzt die Gleichung

$$\sum_{s=0}^{s=pq-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\pi i}{pq}} = \delta \varepsilon \sqrt{pq}\, i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$

Nach dem Obigen aber ist

$$\sum_{0}^{pq-1} e^{\frac{2s^2\pi i}{pq}} = \sqrt{pq} \,.\, i^{\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2},$$

mithin gilt die Relation

$$\delta\varepsilon = i^{-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{pq-1}{2}\right)^2},$$

d. g. wegen

$$\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2 - \left\{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2\right\} = \left(\frac{pq-1}{2}\right)^2 - \left\{\frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2}\right\}^2$$

$$2 \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}\left[\frac{(p+1)(q+1)}{2} - 1\right] = \frac{p^2-1}{2} \cdot \frac{q^2-1}{2} - \frac{(p-1)(q-1)}{2},$$

$$i^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}[(q+1)(p+1)-2]} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}:$$

$$\delta\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Sind nun beide Primzahlen $p$ und $q$ von der Form $4\mu+1$ oder ist die eine $\equiv +1$, die andere $\equiv -1 \pmod{4}$, so müssen $\delta$ und $\varepsilon$ gleiche Vorzeichen besitzen, d. h. die eine Primzahl $p$ ist quadratischer Rest oder Nichtrest der andern $q$, wenn $q$ zu den quadratischen Resten oder Nichtresten von $p$ gehört.

Dagegen haben $\delta$ und $\varepsilon$ verschiedene Vorzeichen, sofern beide Primzahlen bei der Division durch 4 den Rest 3 (oder $-1$) geben. In diesem Falle ist daher die eine quadratischer Rest oder Nichtrest der andern, wenn diese quadratischer Nichtrest oder Rest jener ist.

Der Ausspruch dieser wechselseitigen Beziehungen zwischen zwei absoluten Primzahlen bildet den Inhalt des Reciprocitätsgesetzes.

### 3. Entwicklung einer willkürlichen Function nach Kugelfunctionen.

#### §. 123.

**Entwicklung des Radicals $(1 - 2\alpha \cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach steigender Potenzen von $\alpha$.**

In §. 114. haben wir die wichtige Untersuchung angedeutet, welche Dirichlet über die Reihe

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \int_0^{\pi} \partial\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^{2\pi} P_n f(\vartheta', \varphi')\, \partial\varphi'$$

angestellt hat. Mit der Darstellung dieser sinnreichen Betrachtungen Dirichlet's wollen wir uns jetzt beschäftigen. Zu dem Behufe aber ist es nöthig, einige vorläufigen, auf den Coefficienten $P_n$ von $\alpha^n$ in der Entwicklung des Radicals

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi' - \varphi)) + \alpha^2}}$$

bezüglichen Erörterungen vorauszuschicken.

Bezeichnen $R$ und $\varrho$ zwei von einem Pole $O$ ausgehende Radienvectoren, welche mit der Polarachse $Ox$ beziehungsweise die Winkel $\vartheta'$ und $\vartheta$ einschliessen, und deren Ebenen $(Rx)$, $(\varrho x)$ mit der Polarebene die Winkel $\varphi'$ und $\varphi$ bilden;

heist ferner $\gamma$ der Winkel zwischen $R$ und $\varrho$: so entsteht ein körperliches Dreieck, für welches bekanntlich die Beziehung gilt

1. $\cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi' - \varphi)$.

Mittelst derselben können wir daher unserm Radical die Form $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2}}$ geben. Setzen wir nun voraus, dass $\alpha$ einen positiven oder negativen echten Bruch ausdrückt, so kann die Wurzelgrösse $[1 - (2\cos\gamma - \alpha)\,\alpha]^{-\frac{1}{2}}$ stets nach Potenzen von $\alpha$ entwickelt werden. Denn weil immer einem bekannten trigonometrischen Satze zufolge $a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2$ ist, so muss $1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2$ stets positiv sein, und ausserdem ist bei hinlänglich kleinem $\alpha$ numerisch $2\alpha\cos\gamma - \alpha^2 < 1$ *). Nun besteht aber für $z^2 < 1$ die Gleichung

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}z + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m.1.2.3\ldots m} z^m + \ldots\ldots,$$

mithin wird

$$[1 - \alpha(2\cos\gamma - \alpha)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m\,1.2.3\ldots m} [\alpha(2\cos\gamma - \alpha)]^m.$$

Und entwickelt man hierin die verschiedenen Potenzen von $2\alpha\cos\gamma - \alpha^2$ nach der Binomialformel und vereinigt alle Glieder, welche den Factor $\alpha^n$ enthalten; so gewinnt man für diesen zu $\alpha^n$ gehörigen Coefficienten den Ausdruck

$$2.\quad P_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\Big[\cos\gamma^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos\gamma^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.4(2n-1)(2n-3)}\cos\gamma^{n-4} - \ldots\Big].$$

Der Coefficient $P_n$ von $\alpha^n$ stellt folglich eine ganze Function des $n^{ten}$ Grades von $\cos\gamma$ vor, und diese Eigenschaft des Coefficienten $P_n$ pflegt man in der schriftlichen Darstellung kurz durch $P_n(\cos\gamma)$ anzudeuten.**) Wie man sieht, gehören sämmtliche Exponenten des Argumentes $\cos\gamma$ zu den

*) Man beachte, dass $\gamma$ zwischen 0 und $\pi$ liegt. — Für $\gamma = 0, \pi$ geht die Wurzelgrösse in den Quotienten $\frac{1}{1 \mp \alpha}$ über, ist also wegen der Natur des $\alpha$ in eine convergirende geometrische Reihe entwickelbar.

**) $P_n$ spielt also bei dieser Dirichlet'schen Bezeichnungsweise die Rolle eines Functionszeichens.

geraden, oder ungeraden Zahlen, je nachdem $n \equiv 0$, oder $\equiv 1$ (mod. 2) ist.

Ausser der obigen lassen sich für $P_n$ noch verschiedene anderen Formen auffinden. Wir begnügen uns jedoch hier damit, nur noch einige derselben anzuführen, und zwar wählen wir zunächst die beiden Dirichlet'schen Formen, welche sogleich durch eine einfache Transformation von $\cos\gamma$ entspringen.

Schreibt man nämlich $1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2$ in der Gestalt

$$1-2\alpha+4\alpha\sin\frac{\gamma}{2}^2+\alpha^2=(1-\alpha)^2\left[1+\frac{4\alpha\sin\frac{\gamma}{2}^2}{(1-\alpha)^2}\right], \text{ so wird,}$$

$$[1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{1-\alpha}\sum_0^\infty(-1)^m\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m.1.2\ldots m}\left[\frac{4\alpha\sin\frac{\gamma}{2}^2}{(1-\alpha)^2}\right]^m$$

$$=\sum_0^\infty(-1)^m\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots m}\frac{\left(2\alpha\sin\frac{\gamma}{2}^2\right)^m}{(1-\alpha)^{2m+1}}.$$

Nun ist

$$\frac{\left(2\alpha\sin\frac{\gamma}{2}^2\right)^m}{(1-\alpha)^{2m+1}}=\left(2\alpha\sin\frac{\gamma}{2}^2\right)^m\left[1+\frac{2m+1}{1}\alpha+\frac{(2m+1)(2m+2)}{1.2}\alpha^2\right.$$

$$\left.+\frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)}{1.2.3}\alpha^3+\ldots+\frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)\ldots(2m-r)}{1.2.3\ldots r}\alpha^r+\ldots\right],$$

der Factor $\left(2\alpha\sin\frac{\gamma}{2}^2\right)^m$ und das Glied

$$\frac{(2m+1)(2m+2)\ldots[2m-(n-m)]}{1.2.3\ldots(n-m)}\alpha^{n-m}$$

verbinden sich daher, solange $m$ den Werth $n$ nicht überschreitet, zu dem Producte $2^m\frac{(2m+1)(2m+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots(n-m)}\alpha^n$. Daraus aber fliesst weiter, dass die Glieder, welche in der Summe $\sum_0^\infty(-1)^m\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{m!}\frac{\left(2\alpha\sin\frac{\gamma}{2}^2\right)^m}{(1-\alpha)^{2m+1}}$ den Coefficienten von $\alpha^n$ bilden, in der Form

$$(-1)^m\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{m!}\frac{(2m+1)(2m+2)\ldots(n+m)}{1.2\ldots(n-m)}2^m\sin\frac{\gamma}{2}^{2m} \text{ oder,}$$

wenn man den Zähler und Nenner dieses Ausdruckes mit $2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2m = 2^m \Gamma(m+1)$ multiplicirt, in dieser Gestalt

$$(-1)^m \frac{\Gamma(n+m+1)}{[\Gamma(m+1)]^2 \,\Gamma(n-m+1)} \sin\frac{\gamma}{2}^{2m}$$

erscheinen werden. Setzt man folglich für $m$ nach und nach die Zahlen $0, 1, 2, 3 \ldots$, so kommt

$$3.\ P_2(\cos\gamma) = 1 - \frac{(n+1)n}{1^2}\sin\frac{\gamma}{2}^2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2 \,.\, 2^2}\sin\frac{\gamma}{2}^4 - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{2n!}{(n!)^2}\sin\frac{\gamma}{2}^{2n}.$$

Anstatt der Substitution $\cos\gamma = 1 - 2\sin\frac{\gamma}{2}^2$ hätte man offenbar $\cos\gamma$ auch durch den gleichgeltenden Ausdruck $2\cos\frac{\gamma}{2}^2 - 1$ ersetzen können. Dadurch wäre alsdann $(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ in

$$(1+\alpha)^{-1}\left[1 - \frac{4\alpha\cos\frac{\gamma}{2}^2}{(1+\alpha)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{1.2\ldots m}\,\frac{\left(2\alpha\cos\frac{\gamma}{2}^2\right)}{(1+\alpha)^{2m+1}}$$

übergegangen, und demnach würden jetzt die Glieder, aus deren Vereinigung $P_n$ entspringt, die Form

$$(-1)^{n-m}\frac{\Gamma(n+m+1)}{[\Gamma(m+1)]^2\,\Gamma(n-m+1)}\cos\frac{\gamma}{2}^{2m}$$

besitzen. Hieraus aber schliesst man weiter, dass

$$4.\ P_n(\cos\gamma) = (-1)^n\left[1 - \frac{(n+1)n}{1^2}\cos\frac{\gamma}{2}^2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1^2 \,.\, 2^2}\cos\frac{\gamma}{2}^4 - \right]$$

ist. Wie man indess augenblicklich erkennt, resultirt diese Beziehung am einfachsten aus der dritten durch Vertauschung von $\alpha$ mit $-\alpha$ und $\gamma$ mit $\pi - \gamma$. — Wir gehen jetzt zu einer Darstellung von $P_n$ über, in welcher die einzelnen Glieder nach den Cosinus der Vielfachen von $\gamma$ fortschreiten und aus der man sofort erkennt, dass $P_n$ immer zwischen $\pm 1$ sich befinden muss· Man erhält diese Form, wenn man $1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2$ in die beiden Factoren $1 - \alpha e^{\gamma i}$ und $1 - \alpha e^{-\gamma i}$ zerlegt und beide nach der Binomialformel entwickelt. Die Ausführung der Rechnung zeigt alsdann, dass wegen

$$(1-\alpha e^{\gamma i})^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2^m.m!}\alpha^m e^{m\gamma i},$$

$$(1-\alpha e^{-\gamma i})^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2^m.m!}\alpha^m e^{-m\gamma i},$$

also

$$(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2^m.m!}\alpha^m e^{m\gamma i}$$

$$\times \sum_0^\infty \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2^m.m!}\alpha^m e^{-m\gamma i}$$

5. $\frac{1}{2}P_n(\cos\gamma) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\cos n\gamma + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{1}{2}\cos(n-2)\gamma$

$$+\frac{1.3\ldots(2n-5)}{2.4\ldots(2n-4)}\frac{1.3}{2.4}\cos(n-4)\gamma+\ldots$$

$$=\sum_{s=0}^{s=n'}\frac{1.3\ldots(2s-1)}{2.4\ldots2s}\frac{1.3\ldots[2(n-s)-1]}{2.4.6\ldots2(n-s)}\cos(n-2s)\gamma$$

ist, wo $n'=\frac{n}{2}$, oder $=\frac{n-1}{2}$ sein wird, je nachdem $n$ zu den geraden, oder ungeraden Zahlen gehört. Die Coefficienten der Cosinns in diesem Ausdrucke sind sämmtlich positiv, sein absolut grösster Werth findet demnach für $\gamma=0$ Statt. Da nun für diesen Fall die Wurzelgrösse $(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ in

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^n+\ldots$$

übergeht, also $P_n=1$ wird, so kann offenbar $P_n$ niemals numerisch grösser, als 1 sein.

## §. 124.

### Darstellung von $P_n$ durch bestimmte Integrale.

Dem Obigen zufolge besteht die Beziehung

1. $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}} = P_0+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\ldots+P_n\alpha^n+\ldots$

Wird in dieser Gleichung $\alpha$ durch den Ausdruck $e^{\psi i}$ ersetzt, wo $\psi$ einen von $\gamma$ unabhängigen und wie dieser zwischen 0 und $\pi$ befindlichen Bogen bezeichnet; so verwandelt sich

die rechte Seite derslben in $G+Hi$, wenn man zur Abkürzung

$$P_0 + P_1 \cos\psi + P_2 \cos 2\psi + \ldots + P_n \cos n\psi + \ldots = G$$

und

$$P_1 \sin\psi + P_2 \sin 2\psi + \ldots + P_n \sin n\psi + \ldots = H$$

schreibt. Die linke Seite der Gleichung 1. dagegen ist mit

$$\left\{e^{\psi i}\left[e^{-\psi i} + e^{\psi i} - 2\cos\gamma\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} = \left[2(\cos\psi - \cos\gamma)\right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\psi}{2}}$$

identisch, und sonach wird, wenn $\psi < \gamma$, also $\cos\psi - \cos\gamma > 0$ ist,

$$G = \frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}, \quad H = -\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}};$$

für $\gamma < \psi$, mithin für $\cos\psi - \cos\gamma < 0$ hingegen hat man

$$G = \frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}, \quad H = \frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}.$$

Nun sahen wir in der Lehre von den Fourier'schen Reihen, dass beim Statthaben der Reihen für $G$ und $H$ die Coefficienten $P$ durch die Formeln bestimmt werden

$$P_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi G\,d\psi, \quad P_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi G\cos n\psi\,d\psi = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma G\cos n\psi\,d\psi$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi G\cos n\psi\,d\psi$$

und

$$P_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi G\sin n\psi\,d\psi = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma G\sin n\psi\,d\psi + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi G\sin n\psi\,d\psi.$$

Ersetzt man also in diesen Beziehungen $G$ und $H$ durch die oben ermittelten Ausdrücke, so kommt

$$2.\quad P_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos n\psi\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\,d\psi + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\cos n\psi\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}\,d\psi$$

und

$$3.\quad P_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin n\psi\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\,d\psi + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin n\psi\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}\,d\psi.$$

Von diesen beiden Dirichlet'schen Formeln für $P_n$ muss offenbar die erstere für $n = 0$ auf die Hälfte reducirt werden und in der zweiten sind für $n$ alle ganzen Zahlen 1, 2, 3, . . zu wählen.

So unverfänglich der vorhin befolgte Gedankengang auf den ersten Blick auch erscheinen mag, so ist er doch bei näherer Ansicht nicht frei von Zweifeln. Denn dass für $\alpha = e^{\psi i}$ die Wurzelgrösse $(1 - 2\alpha \cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ mit Ausnahme des Falles $\psi = \gamma$, für welchen das Radical unendlich wird, noch immer in eine convergirende Reihe sich entwickeln lässt, ist — wenn auch thatsächlich der Fall — doch eine ganz unbewiesene Voraussetzung. Die Integralformeln 2. und 3. bedürfen daher auch noch einer nachträglichen Bestätigung ihrer Richtigkeit. Zu dem Zwecke benutzt Dirichlet folgendes Verfahren; er bildet unendliche nach Potenzen von $\alpha$ fortschreitende Reihen, in denen die verschiedenen Coefficienten der $\alpha$ aus den obigen Theilintegralen bestehen. Von diesen Reihen nun zeigt Dirichlet, dass sie convergiren und Summen besitzen, die bei der Vereinigung der einander entsprechenden Reihen unmittelbar zu dem Radical

$$(1 - 2\alpha \cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

sich ergänzen.

Behufs der nähern Erläuterung dieses Ideenganges sei zunächst

$$Q_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos n\psi \cos \frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\, d\psi;$$

alsdann ist offenbar $Q_n$ numerisch kleiner, als

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos \frac{1}{2}\psi\, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} = 1^{*)}.$$

*) Man hat

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2}\psi\, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} = \int \frac{d\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\gamma}\right) + \text{const.}$$

Bezeichnet folglich $\alpha$ einen echten positiven oder negativen Bruch, so muss die Reihe

$$\tfrac{1}{2} Q_0 + Q_1 \alpha + Q_2 \alpha^2 + \ldots + Q_n \alpha^n + \ldots$$

convergiren. Ihre Summe $S$ selbst aber findet sich leicht, wenn man statt der $Q$ die entsprechenden Integrale einführt; denn so kommt zuvörderst

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos \frac{1}{2} \psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} [\tfrac{1}{2} + \alpha \cos\psi + \alpha^2 \cos 2\psi + \alpha^3 \cos 3\psi + \ldots],$$

d. g. mit Beachtung der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1-\alpha^2}{1 - 2\alpha \cos\psi + \alpha^2} = \tfrac{1}{2} + \alpha \cos\psi + \alpha^2 \cos 2\psi + \ldots *)$$

$$S = \frac{1-\alpha^2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos \frac{1}{2}\psi \, d\psi}{(1 - 2\alpha\cos\psi + \alpha^2)\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}.$$

Setzt man nun $s \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{1}{2} \psi$, wo $s$ eine neue Variabele bezeichnet, so entspringt

$$S = \frac{1-\alpha^2}{\pi} \int_0^1 \frac{2 \sin \frac{\gamma}{2} \, ds}{[1 - 2\alpha(1 - 2s^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2) + \alpha^2]\sqrt{2(1 - 2\sin \frac{1}{2}\gamma^2 \cdot s^2 - \cos\gamma)}}$$

$$= \frac{1-\alpha^2}{\pi} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \cdot \frac{1}{(1-\alpha)^2 + 4\alpha \sin \frac{1}{2}\gamma^2 . s^2}.$$

Erinnert man sich aber der bekannten Formel

$$\int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x^2)\sqrt{\alpha - \gamma x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{\gamma a^2 - \alpha b^2}} \operatorname{arc tang} \frac{x\sqrt{\gamma a^2 - \alpha b^2}}{a\sqrt{\alpha - \gamma x^2}} + \text{const.},$$

so findet sich sogleich, dass

$$\int \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \cdot \frac{1}{(1-\alpha)^2 + 4\alpha s^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)\sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\alpha \sin \frac{1}{2}\gamma^2}} \operatorname{arc tg} \frac{s\sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma^2}}{(1-\alpha)\sqrt{1-s^2}} + \text{const.},$$

also

*) Vergl. §. 95.

$$S = \frac{1-\alpha^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(1-\alpha)\sqrt{(1-\alpha)^2+4\alpha(\sin\frac{1}{2}\gamma)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\ldots}}$$

ist.

In ganz ähnlicher Weise würde man nun die Summe der Reihe

$$\tfrac{1}{2} R_0 + R_1 \alpha + R_2 \alpha^2 + \ldots + R_n \alpha^n + \ldots,$$

wo

$$R_n = \frac{2}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi} \frac{\cos n\psi \sin \frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}},$$

finden, doch geschieht dies einfacher, indem man in diesem Integrale $\pi - \psi$ statt $\psi$ schreibt und die goniometrische Formel $\cos(\alpha + n\pi) = (-1)^n \cos\alpha$ berücksichtigt. So nämlich ergiebt sich sofort

$$\frac{2}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi} \frac{\cos n\psi \sin \frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}$$

$$= -\frac{2}{\pi}(-1)^n \int_{\pi-\gamma}^{0} \frac{\cos n\psi \cos\frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{2[\cos\gamma - \cos(\pi-\psi)]}} = (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi-\gamma} \frac{\cos n\psi \cos\frac{\psi}{2} \, d\psi}{\sqrt{2[\cos\psi - \cos(\pi-\gamma)]}},$$

und demnach ist $R_n \alpha^n$ eine Grösse, welche aus dem Integrale

$$Q_n \alpha^n = \frac{2}{\pi} \cdot \alpha^n \int_{0}^{\gamma} \frac{\cos n\psi \cos\frac{1}{2}\psi \, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}$$

durch Vertauschung von $\gamma$ mit $\pi - \gamma$ und von $\alpha$ mit $-\alpha$ entspringt. Daraus aber fliesst sogleich weiter, dass

$$\tfrac{1}{2} R_0 + R_1 \alpha + \ldots + R_n \alpha^n + \ldots$$

die Entwicklung des Radicals

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}$$

nach Potenzen von $\alpha$ bildet. Weil nun

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}} = \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 \alpha + P_2 \alpha^2 + \ldots$$

ist, so findet in der That für $P_n$ die Gleichung 2. Statt.

Um jetzt die Richtigkeit der Gleichung 3. nachzuweisen, untersuchen wir auch hier vorerst die Reihe, deren allgemeines Glied

$$-\frac{2\alpha^n}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin n\psi \sin \frac{1}{2}\psi\, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}$$

heisst, wo für $n$ bekanntlich alle ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... zu setzen sind. Die Summe $S_1$ dieser Reihe wird offenbar durch den Ausdruck

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin\frac{1}{2}\psi\, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\left[\alpha \sin\psi + \alpha^2 \sin 2\psi + \ldots\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin\frac{1}{2}\psi\, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} \cdot \frac{\alpha \sin\psi}{1 - 2\alpha\cos\psi + \alpha^2}$$

vorgestellt.*) Dieses Integral aber lässt sich mit Berücksichtigung der Beziehung

$$\frac{\alpha \sin\psi \sin\frac{1}{2}\psi}{1 - 2\alpha\cos\psi + \alpha^2} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1-\alpha)^2\cos\frac{\psi}{2}}{1 - 2\alpha\cos\psi + \alpha^2}$$

sofort auf zwei andere Integrale zurückführen, deren Werthe unmittelbar aus dem Obigen abgelesen werden können. Denn man hat nun für $S_1$ die Form

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{1}{2}\psi\, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} + \frac{(1-\alpha)^2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{\psi}{2}\, d\psi}{(1 - 2\alpha\cos\psi + \alpha^2)\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2}}.$$

Endlich überzeugt man sich sogleich, dass die Summe der Reihe, deren allgemeines Glied durch

$$\frac{2\alpha^n}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin n\psi \cos\frac{1}{2}\psi\, d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}$$

ausgedrückt wird, sich wieder durch Einführung der neuen Veränderlichen $\psi_1 = \pi - \psi$ in das vorstehende Integral aus

---

*) Vergl. §. 95, Schluss.

der vorhin untersuchten Reihe ableiten lässt. Man erhält nämlich hier wegen $\sin(a \pm n\pi) = (-1)^n \sin a$

$$\frac{2\,\alpha^n}{\pi}\int\limits_{\gamma}^{\pi}\frac{\sin n\psi \cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\psi)}}\,d\psi = -\frac{2}{\pi}(-\alpha)^n\int\limits_0^{\pi-\gamma}\frac{\sin n\psi \sin\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{2[\cos\psi-\cos(\pi-\gamma)]}},$$

und folglich ist die Summe der entstehenden Reihe mit

$$-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1+\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}$$

gleichbedeutend. Die Addition beider Reihen aber zeigt nun wieder, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}} - 1 = \alpha\,P_1 + \alpha^2\,P_2 + \alpha^3\,P_3 + \ldots$$

ist und dass somit die Gleichung 3. zu den richtigen gehört.

## §. 125.

### Fortsetzung.

Unentbehrlich und völlig hinreichend für die später folgenden Untersuchungen ist nur die Kenntniss der im Vorhergehenden abgeleiteten Dirichlet'schen Integrale; ohne Interesse dürfte es indess nicht sein, wenn wir auch jenem Integrale einige Worte widmen, durch welches $P_n$ zuerst von Laplace dargestellt wurde. Wir wollen daher dieses Integral jetzt entwickeln, und zwar werden wir uns mit Heine*) auf den Satz stützen, dass für ein positives $a$ und für ein reelles, oder rein imaginäres $b$, das im ersten Falle aber kleiner, als $a$ sein muss, immer die Beziehung gilt

$$1. \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

wo die Wurzel auf der rechten Seite mit dem Pluszeichen zu nehmen ist.

Von der Richtigkeit dieser Gleichung überzeugt man sich ohne Mühe durch folgende Betrachtung.

In §. 95, 1. haben wir gezeigt, dass für $-1 < r < 1$ stets

---

*) Man sehe dessen vorzügliches „Handbuch der Theorie der Kugelfunctionen", S. 11 etc.

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2} = \frac{\pi}{1-r^2}$$

ist. Diese Relation aber bleibt selbst für ein rein imaginäres $r$, dessen Modul kleiner, als 1 ist, in Kraft. Entwickelt man nämlich

$$(1-2r\cos\varphi+r^2)^{-1} = (1-re^{i\varphi})^{-1}(1-re^{-i\varphi})^{-1}$$

nach steigenden Potenzen von $re^{i\varphi}$ und $re^{-i\varphi}$, also nach Cosinus und Sinus von $\varphi$ und beachtet, dass bei der Entwicklung der Function $(1-2r\cos\varphi+r^2)^{-1}$ in eine trigonometrische Reihe die Sinusglieder nicht in Betracht kommen, weil sie für ein reelles $r$ mit $i$ multiplicirt, für ein rein imaginäres $r$ dagegen von $i$ befreit sind: so wird bei der Integration nach $\varphi$ zwischen den Grenzen 0 und $\pi$ nur das von $\varphi$ unabhängige Glied

$$1+r^2+r^4+\ldots = \frac{1}{1-r^2}$$

zur Bildung des Integrales beitragen.

Wie nun bei einiger Ueberlegung ohne grosse Schwierigkeit erhellt, wird sich auf das soeben erwähnte Integral die Form 1. reduciren lassen, wenn man zwei Constanten $p$, $r$ so zu bestimmen vermag, dass der Modul von $r < 1$ und

$$p(1+r^2) = a, \quad -2rp = b$$

ist. Offenbar kann dieser Forderung immer Genüge geschehen; denn da

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$r^2 + 2\frac{a}{b}r + 1 = 0$$

ausdrückt, das Product derselben also der Einheit gleich ist; so muss natürlich der Modul der einen kleiner, der der andern grösser, als 1 sein. Unsern Voraussetzungen zufolge aber ist $a^2-b^2$ stets positiv, demnach mod. $\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right) < 1$.

Wählt man mithin für $r$ diese Wurzel, so ergiebt sich sofort

$$\int_0^\pi \frac{\partial\varphi}{p(1-2r\cos\varphi+r^2)} = \frac{\pi}{\frac{b^2}{2(a-\sqrt{a^2-b^2})}\left[1-\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^2\right]} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Bei der Entwicklung der Function $\frac{1}{a+b\cos\varphi}$ in ein[illegible] Cosinusreihe $c_0 + c_1 \cos\varphi + \ldots$ stellt — wie unmittelb[illegible] einleuchtet — die Grösse $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$ das Glied $c_0$ vor, und eben[illegible] augenscheinlich findet das Nämliche bei der Entwicklung d[illegible] Function $[a+b\cos(\varphi-\varphi_1)]^{-1}$ nach Cosinus der Vielfach[illegible] von $\varphi-\varphi_1$ Statt, wo $\varphi_1$ unabhängig von $\varphi$ ist. Dara[illegible] aber fliesst weiter, dass durch Integration dieses Bruch[illegible] nach $\varphi$ zwischen den Grenzen 0 und $2\pi$ wegen

$$\int_0^{2\pi} c_m \cos m(\varphi-\varphi_1)\,\partial\varphi = 0,\ m > 0$$

die Gleichung entspringt

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{a+b\cos\varphi\cos\varphi_1+b\sin\varphi\sin\varphi_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Und hieraus kann man sogleich wieder die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}} \text{*)}$$

ableiten, wenn man $a = A$, $b\cos\varphi_1 = B$ und $b\sin\varphi_1 =$ [illegible] schreibt, wo also $B$ und $C$ zugleich reell, oder rein imagin[illegible] sind und die Wurzel aus der positiven Grösse $A^2 - B^2 -$ [illegible] mit dem Pluszeichen zu nehmen ist.

Mittelst des vorhin entwickelten Hülfssatzes nun ist [illegible]

---

*) Ausser dem Heine'schen Werke über Kugelfunct. möge au[illegible] Jacobi's Abhandl. „Ueber den Werth, welchen das bestimmte Integr[illegible]

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{1-A\cos\varphi-B\sin\varphi}$$

für beliebige imaginäre Werthe von $A$ und $B$ annimmt" in Crell[illegible] Journal Bd. 32, S. 8 nicht unberücksichtigt bleiben.

leicht, das Radical $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ bei reellem $x$ zunächst durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Beachtet man nämlich, dass

$$1-2\alpha x+\alpha^2=(1-\alpha x)^2+\alpha^2(1-x^2)$$

ist, so ergiebt sich, wenn man

$$a=1-\alpha x,\ b=\alpha\sqrt{x^2-1}$$

setzt und $\alpha$ hinlänglich klein wählt, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\partial\varphi}{1-\alpha x+\alpha\sqrt{x^2-1}\,.\cos\varphi};$$

denn unter der über $\alpha$ gemachten Voraussetzung ist $1-\alpha x>0$, und $\alpha\sqrt{x^2-1}$ besitzt entweder einen rein imaginären Werth, oder ist reell und alsdann wegen

$$a^2-b^2=1-2\alpha x+\alpha^2>0$$

kleiner als $a$, mit welchem Zeichen man auch die Wurzel $\sqrt{x^2-1}$ nehmen mag.

Entwickelt man nun aber $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ und die Grösse $1-\alpha x+\alpha\sqrt{x^2-1}\cos\varphi$ nach steigenden Potenzen von $\alpha$, so wird, wie unmittelbar aus dem Vorhergehenden erhellt, der Coefficient von $\alpha^n$, d. h. $P_n(x)$ dargestellt durch das bestimmte Integral

$$2.\qquad P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x-\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\,d\varphi.$$

Substituirt man in demselben statt $\varphi$ die neue Veränderliche $\varphi_1=\pi-\varphi$, so hat man augenscheinlich auch diese Gleichung

$$\pi P_n(x)=\int_0^\pi(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\,d\varphi.$$

Wird endlich $(x\pm\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n$ nach der Binomialformel entwickelt und ausserdem die aus den Elementen bekannte Relation

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\varphi^m\,d\varphi=0,\quad m\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ 2)$$

berücksichtigt, so erkennt man auf den ersten Blick, dass die ungeraden Potenzen von $\cos\varphi$, also auch $\sqrt{x^2-1}$ bei der Integration nach $\varphi$ zwischen den Grenzen 0 und $\pi$ verschwinden müssen. Die entstehende Function von $x$ gehört mithin zu den ganzen Functionen von $x$. Nun ist aber $P_n(x)$ dem Obigen zufolge ebenfalls eine ganze rationale Function von $x$, mithin gilt die Laplace'sche Gleichung 2. selbst dann noch, wenn $x$ als imaginäre Grösse auftritt. Denn sind zwei Functionen für alle reellen Werthe des Argumentes $x$ gleich, so muss auch für alle imaginären Werthe desselben die Gleichheit in Kraft bleiben.

Mit der grössten Leichtigkeit lässt sich vermöge der Gleichung 2. die von Dirichlet*) angeführte neue Reihe

$$3.\quad P_n(\cos\gamma) = \cos\frac{\gamma}{2}^{2n}\left[1-\binom{n}{1}^2\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}^2+\binom{n}{2}^2\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}^4 -\binom{n}{3}^3\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}^6+\ldots\right]$$

beweisen. Zu dem Behufe setze man wieder wie früher das obige $x=\cos\gamma$ und zerfälle $\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\varphi$ in die beiden Factoren $\cos\frac{\gamma}{2}+i\sin\frac{\gamma}{2}e^{i\varphi}$ und $\cos\frac{\gamma}{2}+i\sin\frac{\gamma}{2}e^{-i\varphi}$; entwickelt man nun die $n^{te}$ Potenz dieser Ausdrücke, so stellt sich $(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\varphi)^n$ als das Product der beiden Reihen

$$\cos\frac{\gamma}{2}^n\left[1+\binom{n}{1}\, i\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}e^{i\varphi}+\binom{n}{2}\left(i\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}e^{i\varphi}\right)^2+\ldots\right],$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}^n\left[1+\binom{n}{1}\, i\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}e^{-i\varphi}+\binom{n}{2}\left(i\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}e^{-i\varphi}\right)^2+\ldots\right]$$

dar, und sonach muss der Gleichung 2. zufolge die Beziehung 3. Statt finden.

Noch einfacher aber lässt sich die folgende, wie Heine erwähnt, schon von Euler**) gekannte Relation

$$4.\quad P_n(\cos\gamma)=\cos\gamma^n\left[1-\frac{n\,.\,(n-1)}{2^2}\operatorname{tang}\gamma^2 +\frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2^2\,.\,4^2}\operatorname{tang}\gamma^4-\ldots\right]$$

---

*) Crelle. Journal Bd. 17, S. 40.

**) Institutiones calculi integralis, Ed. III. Petrop. 1824, Vol. I, Sectio I., Cap. VI., prob. 33, S. 160.

vermittelst der Laplace'schen Gleichung erzielen. Denn entwickelt man $(x + \cos\varphi \sqrt{x^2 - 1})^n = (\cos\gamma + i \sin\gamma \cos\varphi)^n$ nach Newton's Lehrsatze, so folgt mit Beachtung der bekannten Formel $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi^r \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots r}$, oder $= 0$, je nachdem nämlich $r$ zu den geraden, oder ungeraden Zahlen gehört, dass

$$P_n(\cos\gamma) = \cos\gamma^n \Big[1 - n_2 \frac{1}{2} \operatorname{tg}\gamma^2 + n_4 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \operatorname{tg}\gamma^4 - \ldots$$
$$+ (-1)^r n_{2r} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2r-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2r} \operatorname{tg}\gamma^{2r} + \ldots\Big]$$

sein muss.

## §. 126.

### $P_n$ genügt einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung.

Zu den wichtigen Eigenschaften der Function $P_n$ gehört auch die von Laplace entdeckte, dass sie einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung Genüge leistet. Um diese zu erzielen, setzen wir für den Augenblick wieder $\cos\gamma = x$ und der Kürze halber

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \Sigma P_n \cdot \alpha^n.$$

Durch Derivation nach $x$ und $\alpha$ entspringt alsdann

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\tfrac{1}{2} \frac{-2\alpha}{(\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2})^3} = \alpha T^3;$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\tfrac{3}{2} \frac{\alpha(-2\alpha)}{(\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2})^5} = 3\alpha^2 T^5;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\tfrac{1}{2} \frac{(-2x + 2\alpha)}{(\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2})^3} = (x - \alpha) T^3;$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} = 3(x-\alpha) T^2 \frac{\partial T}{\partial \alpha} - T^3 = 3(x-\alpha)^2 T^5 - T^3.$$

Nun ist

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} = \alpha^2 T^3[-1 + 3T^2(1 - 2\alpha x + \alpha^2)] = 2\alpha^2 T^3$$

und

$$2x\frac{\partial T}{\partial x} - 2\alpha\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 2\alpha T^3[x - x + \alpha] = 2\alpha^2 T^3,$$

sonach

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - 2x\frac{\partial T}{\partial x} + 2\alpha\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0$$

oder

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial T}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Mit Benutzung des Werthes $T = \Sigma P_n \,.\, \alpha^n$ aber nimmt diese Beziehung die Form an

$$\sum\left[(1 - x^2)\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial P_n}{\partial x} + n(n+1)P_n\right]\alpha^n = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist also wieder eine nach Potenzen von $\alpha$ fortschreitende Reihe; offenbar kann sie nur dadurch mit Null zusammenfallen, dass jedes ihrer Glieder verschwindet. Setzt man demnach den Coefficienten von $\alpha^n$ der Null gleich, so entspringt die Differentialgleichung

$$1. \qquad (1 - x^2)\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial P_n}{\partial x} + (n+1)\,n\,P_n = 0^{*}).$$

In einer andern Gestalt zeigt sich dieselbe, wenn für $x = \cos\gamma$ der frühere Ausdruck

$$\cos\gamma = \cos\vartheta'\cos\vartheta + \sin\vartheta'\sin\vartheta\cos(\varphi' - \varphi)$$

gewählt und $\cos\gamma$ bloss als Function von $\vartheta$ und $\varphi$ aufgefasst wird. Dadurch nämlich verwandelt sich die vorstehende Differentialgleichung in

$$1^a. \qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial P_n}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta^2}\frac{\partial^2 P_n}{\partial\varphi^2} + (n+1)\,n\,P_n = 0.$$

Und zwar ergiebt sich diese Form leicht, wenn man beachtet, dass vermöge der Beziehungen:

$$x = \cos\vartheta'\cos\vartheta + \sin\vartheta'\sin\vartheta\cos(\varphi' - \varphi);$$

$$\frac{\partial x}{\partial\vartheta} = -\cos\vartheta'\sin\vartheta + \sin\vartheta'\cos\vartheta\cos(\varphi' - \varphi);$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2} = -\cos\vartheta'\cos\vartheta - \sin\vartheta'\sin\vartheta\cos(\varphi' - \varphi) = -x;$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \sin\vartheta'\sin\vartheta\sin(\varphi' - \varphi);\quad \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} = -\sin\vartheta'\sin\vartheta\cos(\varphi' - \varphi);$$

---

*) Ueber verschiedene Transformationen der hier vorkommenden Differentialgleichungen ist wieder Heine's Werk über Kugelfunctionen einzusehen.

$$\frac{\partial P_n}{\partial \vartheta} = \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial P_n}{\partial x}; \; \frac{\partial P_n}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial P_n}{\partial x}; \; \frac{\partial^2 P_n}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial P_n}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial P_n}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} = \frac{1}{\sin \vartheta^2}$$

der Ausdruck $(1 - x^2)\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial P_n}{\partial x}$ mit

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{\partial P_n}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta^2}\frac{\partial^2 P_n}{\partial \varphi^2} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \sin \vartheta'^2 \sin(\varphi' - \varphi)^2\right]\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin \vartheta^2}\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \, . \, \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right]\frac{\partial P_n}{\partial x}$$

identisch ist.

Hierdurch also ist bewiesen, dass unser $P_n$, welches — wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar einleuchtet — eine ganze rationale Function von $\cos \vartheta$, $\cos \varphi \sin \vartheta$, $\sin \varphi \sin \vartheta$ vorstellt, eine Lösung der partiellen Differentialgleichung $1^a$. oder vielmehr von

$$\text{I.} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + n(n+1)f = 0$$

liefert. Mithin steht $P_n$ zu ihr in einer ähnlichen Beziehung wie die Functionen sin und cos zu der einfacheren Gleichung

$$\frac{d^2 s}{d \vartheta^2} + n^2 s = 0,$$

deren allgemeines Integral bekanntlich durch den Ausdruck

$$s = a \cos n\vartheta + a_1 \sin n\vartheta$$

repräsentirt wird. Die Analogie lässt sich indess noch weiter treiben. Denn die Functionen $\sin n\vartheta$ und $\cos n\vartheta$ können, wenn man will, als ganze Functionen der Grössen $\sin \vartheta$ und $\cos \vartheta$ betrachtet werden; und beschreibt man mit dem Halbmesser $= 1$ aus dem Ursprunge eines rechtwinkligen Coordinatensystemes eine Kreislinie, so stellen $\sin \vartheta$ und $\cos \vartheta$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Peripheriepunktes in Polarcoordinaten dar, dessen Radiusvector mit der Abscissenachse den Winkel $\vartheta$ einschliesst. Ganz ebenso leicht aber findet man, wenn man mit dem Halbmesser $= 1$ aus dem Mittelpunkte eines orthogonalen Coordinatensystems eine Kugelfläche construirt, dass $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta \cos \varphi$, $\sin \vartheta \sin \varphi$ den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes dieser Fläche gleich sind, sofern $\vartheta$ der Winkel seines Radiusvectors mit der $x$-Achse ist,

und $\varphi$ den Winkel bedeutet, welchen die durch den Le[illegible] strahl und die Abscissenachse bestimmte Ebene mit der $x$ [illegible] Ebene bildet. Die nach Gauss eingeführte Benennung Kuge[illegible] function für $P_n$, überhaupt für jede ganze rationale Functi[illegible] $X_n$ von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$, welche die Differe[illegible] tialgleichung I. befriedigt, ist daher als eine sehr passe[illegible] zu betrachten.

Wegen des Indexes $n$ nennt man auch wohl die Ku[illegible] function $X_n$ eine Kugelfunction $n^{ter}$ Ordnung. Die ebenf[illegible] übliche Bezeichnung Laplace'sche Function endlich [illegible] Laplace zu Ehren, der mehrere der Haupteigenschaften [illegible] $P_n$ zuerst entdeckt hat, eingeführt.

## §. 127.

### Einige Sätze über Kugelfunctionen *).

Aus der oben gegebenen Definitionsgleichung für Kug[illegible]l- functionen entspringen fast ohne Mühe einige Sätze, die [illegible]ir des Interesses wegen hier anführen wollen und von den[illegible]n namentlich der eine für die nachfolgenden Betrachtungen v[illegible]n grösster Wichtigkeit ist.

1. Zunächst nämlich ergiebt sich auf den ersten Blic[illegible], dass irgend eine Kugelfunction $X_n$ der $n^{ten}$ Ordnung wied[illegible] eine Kugelfunction derselben Ordnung liefert, sofern sie [illegible] einer beliebigen Constanten $c$ multiplicirt wird. Denn man h[illegible]

$$0 = n(n+1)(X_n c) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial(X_n c)}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta^2}\frac{\partial^2(X_n [illegible]}{\partial\varphi^2}$$

2. Ebenso leicht beweist sich ferner der Satz, dass [illegible] Addition und Subtraction zweier Kugelfunctionen derselb[illegible] Ordnung wiederum auf eine Kugelfunction der nämlich[illegible] Ordnung führt.

3. Sind die Coefficienten irgend einer Kugelfunction [illegible] aus beliebigen von $\vartheta$ und $\varphi$ unabhängigen Grössen $\lambda, \mu, \nu,$ [illegible] zusammengesetzt, so entspringt durch Integration von $X_n$ n[illegible] $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ zwischen beliebigen von $\vartheta$ und $\varphi$ unabhängi[illegible]

---

*) Aus Dirichlet's Vorlesung: Ueber die Kräfte, welche im u[illegible] kehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirken. Wi[illegible] semester 1857—1858 entlehnt.

enzen eine Kugelfunction derselben Ordnung. Seien z. B. Coefficienten der Function $X_n$ von $\lambda$ abhängig, und $p$ und $q$ Integrationsgrenzen in Bezug auf $\lambda$; alsdann ist

$$\int_p^q X_n \, d\lambda$$

ıe Kugelfunction der $n^{ten}$ Ordnung. Denn erstens bleibt das tegral eine rationale ganze Function von cos $\vartheta$, sin $\vartheta$ cos $\varphi$, ı $\vartheta$ sin $\varphi$ und zweitens folgt aus

$$0 = n(n+1) X_n + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta^2}\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2},$$

ss

$$= n(n+1)\int_p^q \sin\vartheta\, X_n \, d\lambda + \int_p^q \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right] d\lambda + \int_p^q \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} d\lambda,$$

g., weil $p$ und $q$ von $\vartheta$ und $\varphi$ nicht abhängen,

$$= n(n+1)\sin\vartheta\int_p^q X_n d\lambda + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_p^q X_n d\lambda\right] + \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial^2\left(\int_p^q X_n \, d\lambda\right)}{\partial\varphi^2}.$$

4. Der für das Folgende wichtigste Satz endlich besteht in, dass wenn $X_n$ und $Y_m$ beziehlich Kugelfunctionen der und $m^{ten}$ Ordnung bezeichnen, wo $n$ und $m$ verschiedene ıze Zahlen vorstellen, immer die Gleichung gilt

$$\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin\vartheta \; X_n \; Y_m \; d\varphi = 0.$$

n der Wahrheit dieses Laplace'schen Theoremes*) werden uns ohne Mühe durch Innehaltung des folgenden Gedanken-ıges überzeugen.

Da nämlich $X_n$ und $Y_m$ beziehungsweise Kugelfunctionen $n^{ten}$ und $m^{ten}$ Ordnung ausdrücken sollen, so müssen sie ı Differentialgleichungen

$$0 = n(n+1)\sin\vartheta\; X_n + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right] + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}$$

l

$$0 = m(m+1)\sin\vartheta\; Y_m + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial Y_m}{\partial\vartheta}\right] + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 Y_m}{\partial\varphi^2}$$

*) Memoiren der Pariser Akademie aus dem Jahre 1782, S. 163; e Heine Kugelf. S. 264. — Mécanique céleste. Tome II., p. 31, siehe chlet in Crelle's Journale Bd. 17.

und $\varphi$ den Winkel bedeutet, welchen d
strahl und die Abscissenachse bestimmte
Ebene bildet. Die nach Gauss eingeführte
function für $P_n$, überhaupt für jede ga
$X_n$ von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta$ sin
tialgleichung I. befriedigt, ist dab
zu betrachten.

Wegen des Indexes $n$ nen
function $X_n$ eine Kugelfunctio
übliche Bezeichnung Lapl
Laplace zu Ehren, der m
$P_n$ zuerst entdeckt hat,

**Einige** ... quotien

Aus der ob ... $d\vartheta = -\int_0^\pi$ si
functionen ent
des Interesse
namentlich
grösster ... $d\varphi = Y_m \frac{\partial X_n}{\partial \varphi} - \int \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi}$ ...
1.
dass i
eine
ein

$$\int_0^{2\pi} Y_m \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2}\, d\varphi = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial Y_m}{\partial \varphi} \frac{\partial X_n}{\partial \varphi}\, d\varphi,$$

weil für irgend ein Vielfaches von $2\pi$
Functionen sin und cos und demnach a
Grössen $Y_m$, $\frac{\partial X_n}{\partial \varphi}$ unverändert bleiben. N
scheinlich jedes dieser neu gewonnenen I
man die Functionen $Y_m$ und $X_n$ mit ein
aber einer solchen Verwechselung von
tiplication der zweiten von den obigen D
durch $X_n\, \partial\vartheta\, \partial\varphi$ und nachherige Integ
Grenzen $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ und $\varphi = 0$, $\varphi$
muss auch die Beziehung bestehen

$$n(n+1) \int\int X_n Y_m \sin\vartheta\, \partial\vartheta\, \partial\varphi = m(m+1$$

Genüge leisten. Multipliciren wir nun die erste derselben durch $Y_m \partial\vartheta \,\partial\varphi$, und integriren wir in Bezug auf $\vartheta$ und $\varphi$ zwischen den oben erwähnten Grenzen, so kommt

$$n(n+1)\int\int X_n Y_m \sin\vartheta\partial\vartheta\partial\varphi = -\int\int \partial\vartheta\,\partial\varphi\, Y_m \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right]$$

$$-\int\int\frac{\partial\vartheta}{\sin\vartheta}\partial\varphi\, Y_m\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} = -\int\partial\varphi\int\partial\vartheta\, Y_m\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right] - \int\frac{\partial\vartheta}{\sin\vartheta}\int Y_m\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}\partial$$

Die theilweise Integration aber zeigt jetzt, dass

$$\int\partial\vartheta\, Y_m\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right] = Y_m\sin\vartheta\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta} - \int\sin\vartheta\,\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\,\frac{\partial Y_m}{\partial\vartheta}\partial\vartheta,$$

also, weil $X_n$ und $Y_m$ ganze Functionen der trigonometrischen Functionen sin und cos darstellen und demnach stetig sind, ja selbst continuirliche Differentialquotienten besitzen,

$$\int_0^\pi Y_m\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right]d\vartheta = -\int_0^\pi\sin\vartheta\,\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\,\frac{\partial Y_m}{\partial\vartheta}\,d\vartheta.$$

Ferner hat man

$$\int Y_m\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}\,d\varphi = Y_m\frac{\partial X_n}{\partial\varphi} - \int\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi}\,\frac{\partial X_n}{\partial\varphi}\,d\varphi,$$

sonach

$$\int_0^{2\pi} Y_m\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2}\,d\varphi = -\int_0^{2\pi}\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi}\,\frac{\partial X_n}{\partial\varphi}\,d\varphi,$$

weil für irgend ein Vielfaches von $2\pi$ die goniometrischen Functionen sin und cos und demnach auch das Product der Grössen $Y_m$, $\frac{\partial X_n}{\partial\varphi}$ unverändert bleiben. Nun ändert sich augenscheinlich jedes dieser neu gewonnenen Integrale nicht, wenn man die Functionen $Y_m$ und $X_n$ mit einander vertauscht. Da aber einer solchen Verwechselung von $Y_m$ mit $X_n$ eine Multiplication der zweiten von den obigen Differentialgleichungen durch $X_n\,\partial\vartheta\,\partial\varphi$ und nachherige Integration zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ und $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ entspricht; so muss auch die Beziehung bestehen

$$n(n+1)\int\int X_n\,Y_m\sin\vartheta\partial\vartheta\partial\varphi = m(m+1)\int\int X_n\,Y_m\sin\vartheta\partial\vartheta\partial\varphi,$$

g. wegen der Ungleichheit der beiden ganzen Zahlen $m$ d $n$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} X_n Y_m \sin\vartheta \, \partial\vartheta \, \partial\varphi = 0.$$

§. 128.

**weis der Dirichlet'schen Formel** $\int_0^a dx \int_0^x \varphi(x,y) dy = \int_0^a dy \int_y^a \varphi(x,y) dx.$

Die Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelinte- alen stützt sich unsern frühern Betrachtungen zufolge wesent- h auf die Voraussetzung constanter Integrationsgrenzen. nd also dieselben von den Veränderlichen abhängig, so ist h im Allgemeinen die einmal vorgeschriebene Ordnung der egrationen nicht mehr nach Belieben abzuändern. Von ssem Interesse und für das Folgende sehr wichtig ist nun r die Bemerkung Dirichlet's, dass eine Umkehrung der egrationsordnung immer gestattet ist, wenn das Doppel- egral eine der Formen besitzt

$$\int_0^a dx \int_0^x \varphi(x, y) \, dy, \quad \int_0^a dy \int_y^a \varphi(x, y) \, dx,$$

denen $a$ eine Constante bezeichnet; denn in einem Falle ser Art gilt die Gleichung

$$\int_0^a dx \int_0^x \varphi(x, y) \, dy = \int_0^a dy \int_y^a \varphi(x, y) \, dx.$$

n ihrer Richtigkeit überzeugt man sich sofort, wenn man beiden Integrale räumlich deutet.

Bezeichnen nämlich $x, y, \varphi(x, y)$ die rechtwinkligen ordinaten eines Punktes irgend einer Oberfläche, so lässt ch der Inhalt des Raumes, welcher von der Oberfläche, der $y$-Ebene und von den drei zu dieser winkelrechten Ebenen $= a$, $y = 0$, $y = x$ begrenzt wird, durch jede der obigen tegralformen ausdrücken. Denn zerlegt man diesen Raum rallel mit der $xz$-Ebene in unendlich dünne Schichten, so rd der Inhalt irgend einer von ihnen durch $dy \int_y^a \varphi(x, y) \, dx$, o das ganze Volumen durch das Integral

$$\int_0^a dy \int_y^a \varphi(x, y) \, dx$$

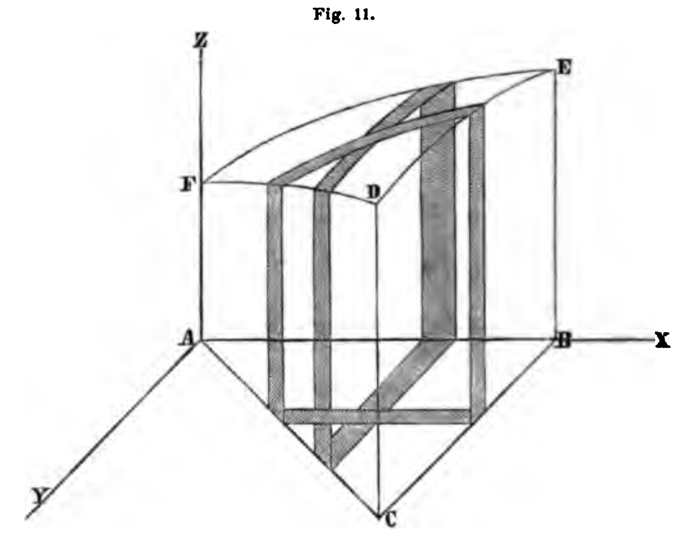
vorgestellt. Zerschneidet man dagegen den körperlichen Raum in Elementarschichten parallel zur $yz$-Ebene, so drückt $dx\int_0^x \varphi(x, y)\, dy$ den Inhalt irgend eines Elementarschnittes aus; die Summe aller Schichten wird sonach jetzt durch das Integral

$$\int_0^a dx \int_0^x \varphi(x, y)\, dy$$

repräsentirt.

Die Zuhülfenahme eines körperlichen Raumes beim Beweise der Dirichlet'schen Formel ist jedoch nicht einmal nöthig;

Fig. 11.




man kann sich vielmehr mit Heine*) auf das Gebiet der Ebene beschränken und diese in jedem Punkte mit einem Factor $\varphi(x, y)$ behaftet, der bei Voraussetzung einer materiellen Ebene z. B. die Dichtigkeit in den einzelnen Punkten bezeichnen würde, sich vorstellen. Zerfällt man nun das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck $ABC$ — die Projection des Oberflächenstückes $FDE$ auf die $xy$-Ebene —, dessen Eckpunkte die Coordinaten $x = 0$, $y = 0$; $x = a$, $y = 0$ und

---

*) Kugelfunctionen, S. 268. Man vergl. auch die später folgende Darstellung der geometrischen Bedeutung der Doppelintegrale.

$x = a$, $y = a$ besitzen, durch Parallelen zur $x$- und $y$-Achse in unendlich kleine Rechtecke; so wird $\int_y^a \varphi(x, y)\, dx$ irgend einen Parallelstreifen zur Achse der $x$, also $\int_0^a dy \int_y^a \varphi(x, y)\, dx$ den Inbegriff aller im Dreiecke befindlichen Elemente, d. h. bei Annahme einer materiellen Ebene die Masse des Dreieckes darstellen. Das Integral $\int_0^x \varphi(x, y)\, dy$ hingegen liefert einen mit der $y$-Achse parallelen Streifen und demnach

$$\int_0^a dx \int_0^x \varphi(x, y)\, dy$$

ebenfalls die Masse des Dreieckes.

## §. 129.

### Summation der Reihe $\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \int_0^\pi \partial\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^{2\pi} \partial\varphi' P_n . f(\vartheta', \varphi')$.

**1. Fall.** $\vartheta = 0$.

Nachdem wir uns in dem Vorhergehenden die für das Verständniss der jetzt folgenden Untersuchungen nöthigen Vorkenntnisse erworben haben, gehen wir nunmehr zu unserm eigentlichen Ziele, zur Summation der unendlichen Reihe über, deren allgemeines Glied $X_n$ die Form

$$X_n = \frac{1}{4\pi} (2n + 1) \int_0^\pi \partial\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^{2\pi} \partial\varphi' \,.\, P_n \,.\, f(\vartheta', \varphi')$$

besitzt. Die Grösse $P_n$ stellt dabei bekanntlich unsern obigen Coefficienten von $\alpha^n$ in der Entwicklung des Radicals

$$[1 - 2\alpha(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi' - \varphi)) + \alpha^2]^{-\frac{1}{2}}$$

nach steigenden Potenzen von $\alpha$ vor, und $f(\vartheta', \varphi')$ bedeutet eine zwischen den Grenzen $\vartheta' = 0$, $\vartheta' = \pi$ und $\varphi' = 0$, $\varphi' = 2\pi$ willkürlich gegebene, aber innerhalb derselben niemals unendlich werdende Function von $\vartheta'$ und $\varphi'$; die ganze Zahl $n$ endlich beginnt mit $n = 0$.

Da die Grössen $\vartheta'$ und $\varphi'$ von $\vartheta$ und $\varphi$ unabhängig sind,

so drückt offenbar $X_n$ eine Kugelfunction $n^{ter}$ Ordnung aus; unsere Aufgabe besteht demnach in der Beantwortung der Frage, ob die unendliche, aus den Kugelfunctionen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ gebildete Reihe convergirt, und, wenn dies der Fall ist, welchen Werth ihre Summe alsdann besitzt.

Um diese Frage zu entscheiden, werden wir einen ähnlichen Gedankengang innehalten, wie wir ihn bei der Theorie der Fourier'schen Reihen in Anwendung brachten, wir denken uns also zunächst die Reihe als eine endliche, als aus ihren $n+1$ ersten Gliedern bestehend, drücken deren Summe durch ein bestimmtes Integral aus und sehen nun nach, welchem Grenzwerthe dieses bei ohne Aufhören wachsendem $n$ zustrebt. Die hierauf bezüglichen Entwicklungen vereinfachen sich indess nicht wenig, wenn wir vorerst auf den besondern Fall $\vartheta = 0$ uns beschränken. Denn erstens wird dadurch $P_n$ nur von $\cos\gamma = \cos\vartheta'$ abhängig und tritt sonach vor das Integral nach $\varphi'$, was, wie wir sogleich sehen werden, von grossem Vortheil für die Ausführung der Rechnung ist, und zweitens lässt sich der allgemeinere Fall mit Leichtigkeit auf den angezeigten zurückführen.

Setzen wir nun der Kürze halber

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi')\, d\varphi' = F(\vartheta'),$$

und schreiben wir $\gamma$ statt des Buchstabens $\vartheta'$, so verwandelt sich $X_n$ in

$$\frac{1}{4\pi}(2n+1)\int_0^{\pi} d\gamma \sin\gamma\, P_n(\cos\gamma)\int_0^{2\pi} d\varphi' f(\gamma, \varphi')$$

$$= \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} d\gamma \sin\gamma\, P_n(\cos\gamma)\, F(\gamma),$$

und für die Summe $S$ der $n+1$ ersten Glieder unserer Reihe $X_0 + X_1 + X_2 + \ldots$ ergiebt sich der Ausdruck

$$S = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} d\gamma \sin\gamma\, F(\gamma)\, [P_0 + 3P_1 + 5P_2 + \ldots + (2n+1)P_n].$$

Offenbar lässt sich derselbe als eine Combination der beiden Reihen

$$T = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi d\gamma \sin\gamma\, F(\gamma)\,[P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n]$$

und

$$U = \int_0^\pi d\gamma \sin\gamma\, F(\gamma)\,[P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + n\,P_n]$$

auffassen, welche ihrerseits wieder mittelst der früher gefundenen Dirichlet'schen Integrale für die $P$ ohne grosse Mühe in die für unsern Zweck geeigneten Integralformen sich umsetzen lassen.

Betrachten wir nämlich zuvörderst die erste Reihe, so entspringt mit Benutzung der Gleichung

$$P_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos n\psi \cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\,d\psi + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\cos n\psi \sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}\,d\psi$$

ie Beziehung

$$\int_0^\pi d\gamma \sin\gamma\, F(\gamma)\Big\{\frac{1}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{1}{2}\psi\, d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}[1+2\cos\psi+2\cos 2\psi+\ldots+2\cos n\psi]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin\frac{1}{2}\psi\, d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}[1+2\cos\psi+2\cos 2\psi+\ldots+2\cos n\psi]\Big\},$$

h. wegen $1+2\cos\psi+2\cos 2\psi+\ldots+2\cos n\psi = \dfrac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$

$$T = \frac{1}{2.\pi}\int_0^\pi d\gamma \sin\gamma\, F(\gamma)\left[\int_0^\gamma \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sin\frac{\psi}{2}\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\right.$$

$$\left. + \int_\gamma^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sin\frac{\psi}{2}\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}\right].$$

araus aber fliesst mit Rücksicht auf die Dirichlet'sche Formel

$$\int_0^a dx \int_0^x \varphi(x,y)\,dy = \int_0^a dy \int_y^a \varphi(x,y)\,dx$$

ogleich weiter, dass

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\psi \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \cos\frac{\psi}{2}\int_\psi^\pi \frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\psi \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \sin\frac{\psi}{2}\int_0^\psi \frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}$$

ist, also in der Form

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\psi \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} \Pi(\psi)$$

dargestellt werden kann, wenn man zur Abkürzung

$$\Pi(\psi) = \cos\frac{\psi}{2}\int_\psi^\pi \frac{\sin\gamma\, F(\gamma)}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} d\gamma + \sin\frac{\psi}{2}\int_0^\psi \frac{\sin\gamma\, F(\gamma)}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}} d\gamma$$

schreibt. Nennt man nun $M$ den absolut grössten Werth welchen die Function $F(\gamma)$ innerhalb des Intervalls von $\gamma =$ bis $\gamma = \pi$ annimmt, so ist offenbar der numerische Werth des Integrales

$$\int_0^\pi \frac{\sin\gamma\, F(\gamma)}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} d\gamma$$

kleiner, als der des Integrales

$$M\int_0^\pi \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}},$$

also um so mehr kleiner, als der Zahlenwerth des Integrals

$$M\int_\psi^\pi \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} = \frac{M}{2}\left[2\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}\right]_\psi^\pi$$

$$= M\sqrt{2(\cos\psi + 1)} = 2M\cos\tfrac{1}{2}\psi.$$

Das Integral

$$\int_0^\psi \frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}$$

dagegen ist seinem Zahlenwerthe nach kleiner, als das Integral

$$M\int_0^{\psi}\frac{\sin\gamma\,d\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\psi)}}$$

$$=-\frac{M}{2}\int_0^{\psi}[2(\cos\gamma-\cos\psi)]^{-\frac{1}{2}}\,d\,[2(\cos\gamma-\cos\psi)]=2M\sin\frac{\psi}{2}.$$

Fasst man Beides zusammen, so schliesst man unmittelbar, dass die Function $\Pi(\psi)$ zu den endlichen Grössen gehört. Substituirt man daher in dem Integrale für $T$ statt $\psi$ die Veränderliche $2\psi$, so muss sich das Integral

$$T=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\psi\frac{\sin(2n+1)\psi}{\sin\psi}\,\Pi(2\psi)$$

dem in §. 86. bewiesenen Dirichlet'schen Theoreme zufolge mit unendlich werdendem $n$ der Grenze $\frac{1}{2}\,\Pi(0)$ nähern, d. h.

$$\lim T=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\gamma\,F(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{2(1-\cos\gamma)}}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}F(\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\,d\gamma.$$

## §. 130.

### Fortsetzung.

In ähnlicher Weise wie vorhin behandeln wir jetzt die Reihe

$$U=\int_0^{\gamma}d\gamma\sin\gamma\,F(\gamma)\,[P_1+2P_2+3P_3+\ldots+nP_n],$$

indem wir hier statt der $P$ die mittelst der Gleichung

$$P_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma}\frac{\sin n\psi\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\gamma)}}\,d\psi+\frac{2}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\frac{\sin n\psi\cos\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\psi)}}$$

zu bildenden Integralausdrücke substituiren und die Ordnung der einzelnen Integrationen wieder vermöge der Dirichlet'schen Formel umkehren. Da nun allgemein

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}d\gamma\sin\gamma\,F(\gamma)\int_0^{\gamma}\frac{\sin n\psi\sin\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\gamma)}}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}d\psi\sin n\psi\sin\tfrac{1}{2}\psi\int_{\psi}^{\pi}\frac{\sin\gamma\,F(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{2(\cos\psi-\cos\gamma)}}$$

und

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\gamma \sin\gamma\, F(\gamma)\int_\gamma^\pi \frac{\sin n\psi \cos\frac{1}{2}\psi\, d\psi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\psi \sin n\psi \cos\tfrac{1}{2}\psi \int_0^\psi \frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}$$

ist; so folgt, wenn man $n = 1, 2, \ldots, n$ setzt und die Bi dung der Reihe $U$ beachtet, dass

$$U = \frac{2}{\pi}\sum_1^n \int_0^\pi d\psi\, n \sin n\psi \left[\cos\tfrac{1}{2}\psi \int_0^\psi \frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}\right.$$

$$\left. - \sin\tfrac{1}{2}\psi \int_\psi^\pi \frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\right]$$

sein muss. Dieser Ausdruck lässt sich bequemer schreibe wenn man die Grösse innerhalb der Klammer $\Theta(\psi)$ nenn man gewinnt so die einfache Form

$$U = \frac{2}{\pi}\sum_1^n \int_0^\pi \Theta(\psi)\,.\, n \sin n\psi\, d\psi.$$

Indem man nun weiter beachtet, dass $n \sin n\psi\, d\psi$ m $-\frac{\partial \cos n\psi}{\partial\psi}d\psi$, also $\sum_1^n n \sin n\psi$ mit

$$-\sum_1^n \frac{\partial \cos n\psi}{\partial\psi} = -\frac{\partial \sum_1^n \cos n\psi}{\partial\psi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

gleichbedeutend ist, hat man auch

$$U = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Theta(\psi)\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\, d\psi.$$

Gelänge es uns aber jetzt darzuthun, dass

1⁰. dieses Integral der partiellen Integration u worfen, somit

$$U = -\frac{1}{\pi}\left[\Theta(\psi)\frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\right]_0^\pi + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial\Theta(\psi)}{\partial\psi}\frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\,d\psi$$

gesetzt werden darf, dass

2°. der vom Integralzeichen befreite Ausdruck mit Null zusammenfällt und dass endlich

3°. $\Theta'(\varphi) = \frac{\partial\Theta(\psi)}{\partial\psi}$ höchstens nur für eine beschränkte Anzahl von Werthen für $\psi$ innerhalb des Intervalles $(0, \pi)$ unendlich wird, während $\int_0^\psi \Theta'(\psi)\,d\psi$ fortwährend von $\psi = 0$ bis $\psi = \pi$ endlich und stetig bleibt: so würde uns offenbar auch hier das oben benutzte Dirichlet'sche Theorem das Mittel zur Auffindung des Grenzwerthes von $U$ für ein ohne Aufhören wachsendes $n$ bieten.*)

Diesen Nachweis nun können wir liefern. Denn da zunächst die vorhin definirte Function $\Theta(\psi)$ die nämlichen Integrale enthält, von welchen auch die Function $\Pi(\psi)$ abhängt, so gehört sie wie diese zu den endlichen Functionen, und ausserdem ist unmittelbar einleuchtend, dass sie für $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ verschwindet. Eine stetige Function von $\psi$ aber wird ferner $\Theta(\psi)$ sein, wenn die Differenz $\Theta(\psi+\varepsilon) - \Theta(\psi)$ mit dem ins Unendliche abnehmenden positiven $\varepsilon$ ebenfalls der Null sich nähert, d. h. wenn sowohl

$$\lim\left[\int_0^{\psi+\varepsilon}\frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2}\,(\cos\gamma - \cos(\psi+\varepsilon))} - \int_0^{\psi}\frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2}\,(\cos\gamma - \cos\psi)}\right] = 0,$$

als auch

$$\lim\left[\int_{\psi+\varepsilon}^{\pi}\frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2}\,(\cos(\psi+\varepsilon) - \cos\gamma)} - \int_{\psi}^{\pi}\frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2}\,(\cos\psi - \cos\gamma)}\right] = 0$$

Statt findet.

Zum Nachweise der Richtigkeit dieser Grenzgleichungen genügt die Betrachtung des ersten Falles, weil für den andern dasselbe Schlussverfahren anwendbar bleibt; wir beschränken daher unsere Erörterung auf diesen Fall.

*) Vergl. §. 88.

Schreiben wir nun die vorkommende Differenz in der Form

$$-\int_0^{\psi} F(\gamma)\,d\gamma \left[\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\psi)}} - \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2\,[\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon)]}}\right]$$

$$+\int_{\psi}^{\psi+\varepsilon} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma}{\sqrt{2\,[\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon)]}},$$

so ergiebt sich sofort, dass in dem ersten dieser Integrale der Factor von $F(\gamma)$ stets positiv bleibt, wenn $\gamma$ von 0 bis $\psi$ sich bewegt. Ist mithin wieder $M$ der absolut grösste Werth, welchen $F(\gamma)$ innerhalb des Intervalles $(0, \pi)$ erwirbt; so muss numerisch dies erste Integral kleiner, als

$$M\int_0^{\psi}\left[\frac{1}{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\psi)}} - \frac{1}{\sqrt{2\,[\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon)]}}\right]\sin\gamma\,d\gamma$$

$$= -M\left\{\sqrt{2\,(\cos\gamma-\cos\psi)} - \sqrt{2\,[\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon)]}\right\}_0^{\psi}$$

$$= 2\,M\left[\sin\tfrac{1}{2}\psi - \sin\tfrac{1}{2}(\psi+\varepsilon) + \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\sin\left(\psi+\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}\right]$$

sein. Mit abnehmendem $\varepsilon$ aber nähert sich dieser Ausdruck der Null, und demnach ist das Integral von 0 bis $\psi$ stetig.

Die Grösse $\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2\,(\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon))}}$ ändert ferner ihr Zeichen nicht zwischen den unendlich nahe liegenden Grenzen $\psi$ und $\psi+\varepsilon$, mithin wird auch das zweite der Integrale in der oben erwähnten Differenz ohne Rücksicht auf das Vorzeichen unter

$$M\int_{\psi}^{\psi+\varepsilon}\frac{\sin\gamma\,d\gamma}{\sqrt{2\,[\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon)]}} = -M\left[\sqrt{2\,[\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon)]}\right]_{\psi}^{\psi+\varepsilon}$$

$$= 2\,M\sqrt{\sin\tfrac{\varepsilon}{2}\,\sin\left(\psi+\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}$$

liegen, ist also ebenfalls eine continuirliche Function von $\psi$.

Aus Beidem zusammengenommen ergiebt sich daher der Satz, dass eine unendlich kleine Zunahme von $\psi$ einen eben solchen Zuwachs des Integrales

$$\int_0^{\psi} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}}$$

zur Folge hat, und dass somit dieses Integral eine stetige Function von $\psi$ ist.

Da nun — wie schon angedeutet — derselbe Gedankengang auf das Integral

$$\int_{\psi}^{\pi} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}$$

Anwendung findet und dieses dadurch gleichfalls als stetige Function von $\psi$ sich zu erkennen giebt, so muss auch die Function $\Theta(\psi)$ die Eigenschaft der Continuität besitzen.*) Daraus aber fliesst leicht weiter, dass das Integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial\Theta(\psi)}{\partial\psi} \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\, d\psi$$

niemals sinnlos wird, selbst dann nicht, wenn $\Theta'(\psi)$ für gewisse Werthe von $\psi$ innerhalb des Intervalles $(0, \pi)$ durch das Unendliche geht.

Sei nämlich $\psi_1$ ein solcher besonderer Werth von $\psi$, so wird, wenn man diese kritische Stelle von der Betrachtung vorläufig ausschliesst, also das singuläre Integral

$$\int_{\psi_1+\varepsilon}^{\psi_1+\delta} \Theta'(\psi) \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\, d\psi$$

bildet, in welchem $\delta$ und $\varepsilon$ unendlich klein werdende Grössen von demselben Vorzeichen bedeuten sollen, dieses mit unaufhörlich abnehmendem $\delta$ und $\varepsilon$ der Null sich nähern. Denn man kann die Grössen $\delta$ und $\varepsilon$ so klein wählen, dass $\Theta'(\psi)$ zwischen den Grenzen $\psi_1 + \varepsilon$ und $\psi_1 + \delta$ niemals das Zeichen wechselt und dass somit dem Maximum-Minimum-Satze zufolge

*) Das Gleiche gilt übrigens auch von der Function $\Pi(\psi)$, doch ist für die vorliegende Untersuchung diese Eigenschaft von $\Pi(\psi)$ unwesentlich.

$$\int\limits_{\psi_1+\varepsilon}^{\psi_1+\delta} \Theta'(\psi) \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} d\psi = R \int\limits_{\psi_1+\varepsilon}^{\psi_1+\delta} \Theta'(\psi) d\psi = R\,[\Theta(\psi+\delta) - \Theta(\psi+\varepsilon)]$$

gesetzt werden darf. Wegen der Endlichkeit von $R$ und der Stetigkeit der Function $\Theta(\psi)$ aber unterscheidet sich dieser Ausdruck zuletzt von Null um weniger, als ein beliebig kleines Quantum; das Integral

$$\int\limits_0^{\pi} \Theta'(\psi) \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} d\psi$$

wird daher für $\psi = \psi_1$ nicht sinnlos.

Ein Unendlichwerden von $\Theta'(\psi)$ aber muss jedesmal eintreten, wenn die stets endlich bleibende Function $F(\gamma)$ für [illegible] besondere Werthe von $\psi$ Unterbrechungen der Stetigkeit erleidet, was offenbar geschehen kann, weil $f(\vartheta', \varphi')$ innerhalb des für sie vorgeschriebenen Intervalles endliche Sprünge machen darf. Man überzeugt sich — wie mir scheint — von dieser Eigenschaft der Function $\Theta'(\psi)$ sogleich, wenn man beachtet, dass wenigstens die eine von den Derivirten der beiden Integrale

$$s = \int\limits_0^{\psi} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}} \text{ und } r = \int\limits_{\psi}^{\pi} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}},$$

also, wenn $\varepsilon$ eine positive der Null sich nähernde Grösse bezeichnet, mindestens der eine der Grenzwerthe von

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\psi} F(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma \left[\frac{1}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}} - \frac{1}{\sqrt{2[\cos\gamma - \cos(\psi+\varepsilon)]}}\right]$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\psi}^{\psi+\varepsilon} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2[\cos\gamma - \cos(\psi+\varepsilon)]}}$$

und

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\psi}^{\pi} \sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma \left[\frac{1}{\sqrt{2[\cos(\psi+\varepsilon) - \cos\gamma]}} - \frac{1}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}}\right]$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\psi}^{\psi+\varepsilon} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2[\cos(\psi+\varepsilon) - \cos\gamma]}}$$

für einen solchen besondern Werth von $\psi$ unendlich werden muss.

In der That, nehmen wir an, dass für den zwischen 0 und $\psi$ befindlichen Werth $\psi = \psi_1$ die Function $F(\gamma)$ eine endliche Discontinuität erleidet, sonst aber stetig ist; so haben wir bloss das Integral $s$ einer nähern Betrachtung zu unterwerfen. Zerlegen wir nun unsern Principien zufolge das Integral von 0 bis $\psi$ in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und $\psi_1$, $\psi_1$ und $\psi$; so wird, wenn wir $M$, $M_1$ und $M_2$ die zwischen dem Maximum und Minimum der Function $F(\gamma)$ innerhalb der Intervalle $(0, \psi_1)$, $(\psi_1, \psi)$, $(\psi, \psi + \varepsilon)$ befindlichen Factoren von bekannter Bedeutung nennen, das Integral $s$ mit

$$- 2 M \left[\sin \frac{\psi_1}{2} - \sin \tfrac{1}{2} (\psi_1 + \varepsilon) + \sqrt{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin\left(\psi_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]$$

$$- 2 M_1 \left[\sqrt{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin\left(\psi + \frac{\varepsilon}{2}\right)} + \sqrt{\sin \frac{\psi_1 + \psi}{2} \sin \frac{\psi - \psi_1}{2}}\right.$$

$$\left. - \sqrt{\sin \tfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi + \varepsilon) \sin \tfrac{1}{2}(\psi - \psi_1 + \varepsilon)}\right] + 2 M_2 \sqrt{\sin\frac{\varepsilon}{2} \sin\left(\psi + \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

gleichbedeutend. Und daher wächst, wie man sieht, das Verhältniss dieser Grösse zu $\varepsilon$ mit abnehmendem $\varepsilon$ über jede Grenze hinaus.

Da den vorhin gepflogenen Betrachtungen zufolge die partielle Integration des Integrales $U$ nicht auf Ungereimtheiten führt und da ausserdem jene Bedingungen sämmtlich erfüllt sind, welche die Anwendung des hier in Frage kommenden Dirichlet'schen Theoremes gestatten; so muss mit unaufhörlich wachsendem $n$ das Integral $U$ den Grenzwerth $\Theta'(0)$ darbieten. Zur endgültigen Erledigung unserer jetzigen Aufgabe ist daher nur noch die Bestimmung des Werthes von $\Theta'(0)$ erforderlich, und hierzu dient folgender Gedankengang.

Nennen wir die beiden in $\Theta(\psi)$ enthaltenen Integrale für den Augenblick wieder $r$ und $s$, setzen wir also

$$\Theta(\psi) = - r \sin \tfrac{1}{2} \psi + s \cos \tfrac{1}{2} \psi,$$

so entspringt

$$\Theta'(\psi) = - \tfrac{1}{2} r \cos \tfrac{1}{2} \psi - \frac{s}{2} \sin \tfrac{1}{2} \psi - \sin \tfrac{1}{2} \psi \frac{\partial r}{\partial \psi} + \cos \tfrac{1}{2} \psi \frac{\partial s}{\partial \psi}.$$

Nun ist augenscheinlich für $\psi = 0$

$$r = \int_0^\pi \frac{\sin\gamma\, F(\gamma)\, d\gamma}{\sqrt{2(1-\cos\gamma)}} = \int_0^\pi F(\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\, d\gamma,\ s = 0,$$

und demnach wird $\Theta'(0)$ mit

$$\frac{ds}{d\psi} - \frac{1}{2}\int_0^\pi F(\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\, d\gamma$$

identisch, wenn $\frac{dr}{d\psi}$ und $\frac{ds}{d\psi}$ für $\psi = 0$ endlich bleiben. Di[illegible] aber ist wirklich der Fall. Denn da offenbar für $\psi = 0$ [illegible] die Grenze bedeutet, welcher das Integral

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{F(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\varepsilon)}}$$

mit unendlich klein werdendem, positivem $\varepsilon$ sich nähert, [illegible] Function $\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\varepsilon)}}$ aber innerhalb des Intervalls (0[illegible] niemals das Zeichen wechselt; so ist dem Maximum-Minimu[illegible] Satze gemäss

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{F(\gamma)\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\varepsilon)}} = \frac{M}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\varepsilon)}}$$

$$= -M\left[\frac{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\varepsilon)}}{\varepsilon}\right]_0^\varepsilon = 2M\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\varepsilon}$$

und demnach $\left(\frac{ds}{d\psi}\right)_0$ endlich. Nähert sich aber $\varepsilon$ der Null, so fallen das Maximum und Minimum, sowie der Mittelwerth $M$ der Function $F(\gamma)$ innerhalb des Intervalles $(0, \varepsilon)$ ersichtlich mit $F(0)$ zusammen, so dass also für $\psi = 0$ die Beziehung gilt

$$\frac{ds}{d\psi} = F(0).$$

In ganz ähnlicher Weise wie vorhin überzeugt man sich ferner, dass auch $\frac{dr}{d\psi}$ für $\psi = 0$ zu den endlichen Grössen ge-

hört; die Angabe des Werthes $\left(\frac{dr}{d\psi}\right)_0$ selbst ist nicht erforderlich.

Das Resultat unserer Betrachtung spricht sich daher in der Gleichung aus

$$\Theta'(0) = F(0) - \tfrac{1}{2}\int_0^\pi F(\gamma) \cos \tfrac{1}{2}\gamma \, d\gamma,$$

und folglich ist auch für ein ohne Aufhören wachsendes $n$

$$\lim U = F(0) - \tfrac{1}{2}\int_0^\pi F(\gamma) \cos \tfrac{1}{2}\gamma \, d\gamma.$$

un fanden wir oben, dass der Grenzwerth von $T$ dem Integrale $\frac{1}{2}\int_0^\pi F(\gamma) \cos \frac{1}{2}\gamma \, d\gamma$ gleich war, mithin gilt für $n = \infty$ e Gleichung

$$\lim S = \lim (T + U) = F(0),$$

h., weil $F(\vartheta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi')\, d\varphi'$,

$$\lim S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \varphi')\, d\varphi'.$$

Hierdurch also ist bewiesen, dass die unendliche Reihe

$$R = \frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty (2n+1)\int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \, P_n \, f(\vartheta', \varphi'),$$

in welcher $P_n$ eine nur von $\cos \gamma = \cos \vartheta'$ abhängige rationale, ganze Function bezeichnet und in der die Function $f(\vartheta', \varphi')$ stets endlich bleibt, immer convergirt und das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \varphi')\, d\varphi'$$

zur Summe besitzt. Man nennt dies Integral den mittleren Werth der Function $f(0, \varphi')$, indem man überhaupt unter dem mittleren Werthe einer Function $\chi(\psi)$, wo $\psi$ zwischen $0$ und $2\pi$ liegt, das arithmetische Mittel aus den Ordinaten $\chi(0)$, $\chi\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $\chi\left(\frac{4\pi}{n}\right)$, ..., $\chi(2\pi)$ für $n = \infty$ versteht,

dieses aber mit dem Integrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(\psi)\,d\psi$ zusammenfällt. Offenbar wird der mittlere Werth von $f(0,\varphi')$ mit $f(0,\varphi')$ identisch, wenn $f(0,\varphi')$ unabhängig von $\varphi'$ ist.

## §. 131.

### 2. Fall. $\vartheta$ ist von Null verschieden.

Wenn man das im Vorhergehenden gefundene Resultat geometrisch deutet, so lässt sich hierauf gestützt ohne jedwede Rechnung die Convergenz der Reihe

$$\frac{1}{4\pi}\sum_0^{\infty}(2n+1)\int_0^{\pi}\partial\vartheta'\sin\vartheta'\int_0^{2\pi}\partial\varphi'\,P_n\,f(\vartheta',\varphi')$$

auch in dem allgemeinen Falle erkennen, in welchem $P_n(\cos\gamma)$ eine ganze Function von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$ und $\sin\vartheta\sin\varphi$ ausdrückt.

Zu dem Behufe denke man sich mit einem Halbmesser $= 1$ eine Kugelfläche beschrieben. Auf dieser erwähle man einen festen Punkt $A$ und lege durch diesen einen nur nach einer Richtung hin verlängerten Bogen eines grössten Kreises. Alsdann wird offenbar die Lage jedes andern Punktes $S$ der Kugel vollständig bestimmt sein, wenn man nicht bloss den Hauptkreisbogen $AS = \vartheta'$, der von 0 bis $\pi$ gehen soll, sondern auch den sphärischen Winkel $\varphi'$ kennt, den dieser Bogen $AS$ mit dem festen Bogen einschliesst und dem man alle Werthe von $\varphi' = 0$ bis $\varphi' = 2\pi$ beizulegen hat. Es ist ferner unmittelbar ersichtlich, dass in Bezug auf dieses sphärische Polarcoordinatensystem das Element der Kugelfläche durch $\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\varphi'$ ausgedrückt wird und dass, wenn die Function $f(\vartheta',\varphi')$ für alle Punkte der Oberfläche gegeben ist,

$$F(\vartheta') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta',\varphi')\,d\varphi'$$

das Mittel aus allen Werthen $f(\vartheta',\varphi')$ darstellt, welche auf einen mit dem sphärischen Radius $\vartheta'$ aus $A$ beschriebenen

Parallelkreis sich beziehen. Betrachtet man die Oberfläche als materiell, also $f(\vartheta', \varphi')$ als Dichtigkeit in den verschiedenen Punkten derselben, so ist $F(\vartheta')$ die mittlere Dichtigkeit eines solchen Parallelschnittes. Hängt demnach für $\vartheta' = 0$ die Grösse $f(\vartheta', \varphi')$ von $\varphi'$ nicht ab, so kann man sagen, dass die Summe der Reihe $R$ die Dichtigkeit im Ursprunge $A$ unseres Coordinatensystems ausdrückt. Bleibt hingegen für $\vartheta' = 0$ die Grösse $f(\vartheta', \varphi')$ eine Function von $\varphi'$, existiren mithin im Punkte $A$ unendlich viele Werthe von $f(\vartheta', \varphi')$; so wird man behaupten dürfen, dass die Summe der Reihe $R$ das Mittel aus allen Dichtigkeiten $f(\varepsilon, \varphi')$ ist, welche auf einem um $A$ mit dem unendlich kleinen sphärischen Radius $\varepsilon$ construirten Kreise Statt finden. Selbst in dem vorhin erörterten Falle bleibt übrigens diese Ausdrucksweise anwendbar.

Um nun von der so eben geführten Betrachtung ohne Mühe zu dem allgemeinen Falle fortzuschreiten, in welchem $\vartheta$ und $\varphi$ irgend welche beziehlich zwischen 0 und $\pi$, 0 und $2\pi$ liegenden Grössen bedeuten, genügt die aufmerksame Vergleichung des allgemeinen Gliedes

$$X_n = \frac{1}{4\pi}(2n+1)\int_0^\pi \partial\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^{2\pi} \partial\varphi' \, P_n(\cos\gamma) \, f(\vartheta', \varphi')$$

in dem Falle $\cos\gamma = \cos\vartheta'$ mit dem allgemeinen

$$\cos\gamma = \cos\vartheta' \cos\vartheta + \sin\vartheta' \sin\vartheta \cos(\varphi' - \varphi).$$

In beiden Fällen wird dasselbe ausser dem Factor $\frac{2n+1}{4\pi}$ durch ein über die Oberfläche der Kugel ausgedehntes Doppelintegral dargestellt, dessen Element immer als das Product zweier Factoren erscheint. Der eine von ihnen, das beiden Fällen gemeinsame Massenelement $\sin\vartheta' \, f(\vartheta', \varphi') \, d\vartheta' \, d\varphi'$, nämlich ist in dem Falle $\vartheta = 0$ mit $P_n(\cos\vartheta')$, d. h. mit einer gewissen Function der sphärischen Distanz $\vartheta'$ des Oberflächenelementes vom Ursprunge $A$ unseres Coordinatensystems multiplicirt, während in dem andern Falle der Factor $P_n(\cos\gamma)$ dieselbe Function des Abstandes $\gamma$ zweier Punkte vorstellt, deren Coordinaten $\vartheta'$, $\varphi'$ und $\vartheta$, $\varphi$ heissen und von denen der Punkt $(\vartheta, \varphi)$ als Ursprung der sphärischen Entfernung

gilt. Die Verschiedenheit beider Fälle ist also lediglich durch die Wahl des festen Punktes, von welchem an die sphärische Entfernung gerechnet wird, bedingt. Da nun die Convergenz der Reihe $R$ für den Fall, dass der Punkt $(\vartheta, \varphi)$ mit dem Ursprunge des Coordinatensystems zusammenfällt, bewiesen und ihre Summe bestimmt ist; so folgt unmittelbar, dass auch in dem allgemeinen Falle die Reihe $R$ convergiren und zur Summe das Mittel aus allen Werthen von $f(\vartheta', \varphi')$ besitzen muss, welche auf einem mit dem unendlich kleinen sphärischen Halbmesser $\varepsilon$ aus dem Punkte $(\vartheta, \varphi)$ beschriebenen Kreise sich befinden. Gehört nun der Punkt $(\vartheta, \varphi)$ nicht zu denen, um welche herum die für die ganze Ausdehnung der Kugelfläche willkürlich gegebene Function $f(\vartheta', \varphi')$ zu den discontinuirlichen zählt, so fällt der mittlere Werth

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi')\, d\varphi'$$

von $f(\vartheta', \varphi')$ mit der Function $f(\vartheta, \varphi)$ zusammen*).

Zur nähern Erläuterung dieses Satzes hat Dirichlet ein sehr einfaches Beispiel gegeben. Man denke sich nämlich auf der Kugelfläche irgend ein sphärisches Polygon construirt und setze voraus, dass die willkürliche Function $f(\vartheta', \varphi')$ für alle im Innern dieses Polygones befindlichen Punkte den Werth 1 besitze, für alle ausserhalb desselben liegenden Punkte dagegen der Null gleich sei. Der Factor $f(\vartheta', \varphi')$ in den Gliedern der Reihe $R$ ist daher im vorliegenden Falle durch die Zahl 1 zu ersetzen und die doppelte Integration bloss über alle Punkte innerhalb des sphärischen Polygones auszudehnen. Substituirt man nun in der Reihe $R$, deren Glieder also in der angegebenen Weise vollständig bestimmt sind, irgend welche Werthe $\vartheta$ und $\varphi$, so wird augenscheinlich die Summe der Reihe $= 1$, oder $= 0$, je nachdem der Punkt $(\vartheta, \varphi)$ innerhalb, oder ausserhalb des Polygons sich befindet. Liegt dagegen der Punkt $(\vartheta, \varphi)$ auf dem Umrisse des Polygons, so

*) Die Function $f(\vartheta, \varphi)$ kann offenbar beliebig viel Constanten enthalten, nur dürfen, wenn die Integrationsbuchstaben unverändert bleiben, in jenen Constanten die Grössen $\vartheta'$, $\varphi'$ nicht vorkommen, weil sonst bei der Integration nach $\vartheta'$ und $\varphi'$ gar leicht diese Constanten als Functionen von $\vartheta'$ und $\varphi'$ betrachtet werden könnten.

ist der mittlere Werth der Function $f(\vartheta', \varphi')$ für alle Punkte der unendlich kleinen um das Centrum $(\vartheta, \varphi)$ construirten Kreislinie ersichtlich $= \frac{1}{2}$ und demnach auch die Summe der Reihe $R = \frac{1}{2}$. Dabei ist jedoch stillschweigend vorausgesetzt, dass der Punkt $(\vartheta, \varphi)$ nicht mit einem Scheitel des Polygons zusammenfällt. Denn gehört der Punkt $(\vartheta, \varphi)$ zu den Scheiteln des Polygons, und bezeichnet $\alpha$ den jedesmaligen Polygonwinkel, so ist bei der Bestimmung des mittleren Werthes der Function $f(\vartheta', \varphi')$, also in dem Integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi')\, d\varphi'$$

diese nur innerhalb des Intervalles $(0, \alpha)$ der Einheit gleich zu setzen, von $\varphi' = \alpha$ bis $\varphi' = 2\pi$ hingegen mit Null zu identificiren. Die Summe der Reihe $R$ ist demnach jetzt $= \frac{\alpha}{2\pi}$.

## §. 132.

### Die Entwicklung nach Kugelfunctionen ist nur auf eine Art möglich.

Die im Vorhergehenden dargestellte Dirichlet'sche Theorie der Reihe $R$ besitzt nicht bloss in ihrer Begründungsweise, sondern auch in dem erzielten Resultate eine grosse Aehnlichkeit mit der Lehre von den Fourier'schen Reihen. Wir fanden damals, dass eine innerhalb eines gewissen Intervalles willkürlich gegebene Function immer in eine convergirende trigonometrische Reihe sich entwickeln lässt und dass diese Entwicklung nur auf eine Weise möglich ist. Durch einen ganz ähnlichen Gedankengang aber haben wir uns in dem jetzt vorliegenden Falle überzeugt, dass eine stets endlich bleibende, von $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$ bis $\vartheta = \pi$, $\varphi = 2\pi$ willkürlich gegebene Function $f(\vartheta, \varphi)$ immer durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe darstellbar ist. Nur die andere Frage ist bislang unentschieden geblieben, ob auch hier die Entwicklung zu den in sich völlig bestimmten gehört, d. h. ob dieselbe nur auf eine Art möglich ist.

Um nun hierüber Gewissheit zu erlangen, nehmen wir analog dem früher in der Theorie der Fourier'schen Reihen

befolgten Gedankengange auch hier vorerst an, die Function $f(\vartheta, \varphi)$ lasse sich zwischen den oben definirten Grenzen auf zweifache Weise nach Kugelfunctionen entwickeln, d. h. es sei einerseits

$$f(\vartheta, \varphi) = \Sigma Y_n$$

und anderseits

$$f(\vartheta, \varphi) = \Sigma Z_n,$$

wo die $Y$ und $Z$ Ausdrücke derselben Art vorstellen. Bildet man alsdann aus den beiden convergenten Reihen $\Sigma Y_n$ und $\Sigma Z_n$ die neue $\Sigma(Y_n - Z_n)$, welche ebenfalls eine Summe und zwar den Werth Null besitzen muss, beachtet man ferner, dass $X_n = Y_n - Z_n$ dem in §. 127. Gesagten zufolge gleichfalls eine Kugelfunction der $n^{ten}$ Ordnung ist, und erinnert man sich schliesslich des Laplace'schen Satzes

$$\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin\vartheta \, X_n \, Y_m \, d\varphi = 0:$$

so folgt unmittelbar durch Multiplication der Reihe

$$\Sigma X_n = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots = 0$$

mit $X_n \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ und nachherige Integration derselben zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ und $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$, dass

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} X_n^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0.$$

Diese Beziehung aber ist nur für $X_n = 0$ möglich*), und demnach kann die Function $f(\vartheta, \varphi)$ innerhalb der oben vorgeschriebenen Grenzen nur auf eine Weise in eine aus Kugelfunctionen bestehende Reihe entwickelt werden.

*) Man beachte hierbei, dass $X_n$ eine stetige Function ihrer Argumente ausdrückt; wäre sie mithin an irgend einer Stelle des vorgeschriebenen Integrationsintervalles von Null verschieden, so müsste dies auch noch innerhalb eines endlichen um jenen Punkt construirten Raumes Statt finden, und sonach wäre wegen des Quadrates von $X_n$ das Integral selbst positiv, könnte also nicht verschwinden, wenn auch alle übrigen Elemente desselben mit Null zusammenfielen.

## §. 133.

### Schluss.

Da die endlich bleibende Function $f(\vartheta, \varphi)$ völlig willkürlich gewählt werden kann, so darf man dieselbe augenscheinlich irgend einer Kugelfunction $Y_m$ $m^{ter}$ Ordnung gleichsetzen. Bezeichnen wir nun bei dieser Annahme mit $Y_m'$ diejenige Grösse, in welche sich $Y_m$ verwandelt, wenn in ihr die Argumente $\vartheta$, $\varphi$ mit den Veränderlichen $\vartheta'$, $\varphi'$ vertauscht werden, d. h. verstehen wir unter $Y_m'$ eben dieselbe Kugelfunction nach $\vartheta'$, $\varphi'$, welche $Y_m$ in Bezug auf $\vartheta$, $\varphi$ darstellt: so wird immer die Gleichung

$$1. \quad Y_m = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma) \,.\, Y_m'\, d\varphi'$$

gebildet werden können. Da aber $P_n(\cos\gamma)$ nicht bloss rücksichtlich der Grössen $\vartheta$, $\varphi$, sondern auch nach den Veränderlichen $\vartheta'$, $\varphi'$ eine Kugelfunction $n^{ter}$ Ordnung ausdrückt: so müssen, so lange $m$ und $n$ von einander verschieden sind, vermöge des bekannten Laplace'schen Theoremes alle solchen Indices entsprechenden Glieder der Reihe 1. verschwinden. Die Kugelfunction $Y_m$ $m^{ter}$ Ordnung ist folglich nicht durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende unendliche Reihe darstellbar, sondern reducirt sich auf das Doppelintegral

$$\frac{2m+1}{4\pi} \int_0^\pi d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^{2\pi} P_m(\cos\gamma)\, Y_m'\, d\varphi'.$$

Wie ohne Weiteres einleuchtet, kann man den soeben bewiesenen Satz auch in folgender Form aussprechen

$$Y_m' = \frac{2m+1}{4\pi} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} P_m(\cos\gamma)\, Y_m\, d\varphi,$$

d. h. verbindet man irgend eine Kugelfunction $m^{ter}$ Ordnung $Y_m$ mit der Kugelfunction $m^{ter}$ Ordnung und $m^{ten}$ Grades $P_m(\cos\gamma)$ in der durch vorstehende Gleichung angedeuteten Weise, so bildet sich eine Kugelfunction $Y_m'$ der nämlichen Ordnung, welche von den nur in $P_m(\cos\gamma)$ vorkommenden

Grössen $\cos\vartheta'$, $\sin\vartheta'\cos\varphi'$, $\sin\vartheta'\sin\varphi'$ ebenso abhängt wie $Y_m$ von $\cos\vartheta$, $\cos\varphi\sin\vartheta$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ — und umgekehrt.

Offenbar ist dieser Zusammenhang der Functionen $Y_m$ und $Y_m'$ eine Folge der besondern Natur von $P_m(\cos\gamma)$, weil eben in der jedesmaligen Kugelfunction $Y$ ausserhalb der Integralzeichen jene Grössen $\vartheta$, $\varphi$, oder $\vartheta'$, $\varphi'$, nach denen integrirt wird, nicht enthalten sind, sondern bloss in $P_m$ auftreten. Da nun aber $P_m(\cos\gamma)$ die Ausdrücke $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ und $\cos\vartheta'$, $\sin\vartheta'\cos\varphi'$, $\sin\vartheta'\sin\varphi'$ in völlig symmetrischer Weise in sich begreift und durch die Integration die Exponenten der constanten goniometrischen Potenzen nicht erhöht werden, so schliesst man leicht, dass in keiner Kugelfunction $m^{ter}$ Ordnung die Exponentensumme in den verschiedenen, aus den trigonometrischen Functionen sin und cos der betreffenden Grössen $\vartheta$, $\varphi$, oder $\vartheta'$, $\varphi'$ gebildeten Gliedern jemals die Zahl $m$ überschreiten kann. Setzen wir also um der Kürze willen

$$\cos\vartheta = \xi,\ \sin\vartheta\cos\varphi = \eta,\ \sin\vartheta\sin\varphi = \zeta,$$

wo ersichtlich die Grössen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ nicht unabhängig von einander sind, sondern der Bedingung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

genügen, so können wir jede Kugelfunction $m^{ter}$ Ordnung einfach durch

$$Y_m = \Sigma L\, \xi^p\, \eta^q\, \zeta^r$$

bezeichnen, wobei die $L$ constant sind und dem soeben Erörterten gemäss $p + q + r = m,\ m - 2,\ m - 4, \ldots$ sein wird. Sämmtliche Exponenten $m, m-2, m-4, \ldots$ brauchen dabei freilich nicht zu erscheinen, das vorhin genannte Gesetz sagt nur, dass eine Kugelfunction $m^{ter}$ Ordnung immer in der Art sich schreiben lässt, dass nur jene Exponenten in ihr vorkommen.

# II. Buch.

# Die vielfachen Integrale.

---

## I. Kapitel.

## Die Doppelintegrale.

### §. 134.

### Vorerinnerungen.

Ein nur flüchtiger Blick auf das Gebiet der Analysis schon lehrt, dass sie bei ihren Forschungen frei von jeder räumlichen Vorstellung sich zu bewegen vermag. Die vorhergehenden Untersuchungen selbst liefern einen Beitrag für die Richtigkeit dieser Behauptung. Eine ebenso bekannte Thatsache aber ist es, dass die rein analytischen Untersuchungen einen bedeutenden Grad von Einfachheit, namentlich aber von Anschaulichkeit erlangen, wenn die Analysis die räumliche Interpretation ihrer Wahrheiten nicht verschmäht. Auch in dieser Beziehung haben die frühern Betrachtungen uns Aufschluss gegeben; noch eindringlicher aber wird dies aus den Untersuchungen über die Transformation der Doppelintegrale erhellen. Wir legen daher bei den nachfolgenden Betrachtungen wesentlich Raumanschauungen zu Grunde und beginnen unsere Erörterungen mit der geometrischen Bedeutung der Doppelintegrale. Um aber hierbei nichts an Allgemeinheit zu verlieren, hat man sich den Raum (Flächenraum) an jeder Stelle mit einem Factor behaftet vorzustellen. Dieser wird als die Dichtigkeit aufzufassen sein, wenn man den Raum als einen mit Materie erfüllten voraussetzt.

### §. 135.

### Geometrische Deutung eines Doppelintegrales.

Sei nun ein irgendwie begrenztes Stück der Ebene vorgelegt. Das Element derselben heisse $\omega$, und $\varrho$ bezeichne den vorhin erwähnten Factor. Wird die Ebene als materielle,

mithin $\varrho$ als die in jedem Punkte derselben Statt findende Dichtigkeit aufgefasst; so stellt offenbar $\varrho\,\omega$ die Masse des Elementes $\omega$ vor, wenn man die Dichtigkeit als stetig veränderlich ansieht*). Alsdann nämlich sind sämmtliche Dichtigkeiten des Elementes $\omega$ zwischen $\varrho + \delta$ und $\varrho - \delta$ enthalten, wo $\delta$ eine mit dem Elemente numerisch kleiner und kleiner werdende Grösse ausdrückt, und folglich kann, wenn die Elemente Elemente im strengsten Sinne des Wortes sind, $\delta$ für jedes $\omega$ schliesslich als constant angesehen werden. Obwohl also die wahre Masse des Flächenelementes zwischen $(\varrho + \delta)\,\omega$ und $(\varrho - \delta)\,\omega$ sich befindet, so darf sie doch wegen des unendlich kleinen $\delta$ mit $\varrho\,\omega$ gleichgesetzt werden. Mithin stellt $\Sigma\,\varrho\,\omega$ die Masse des betrachteten Flächenstückes vor, wobei wir aber, um etwaigen Schwierigkeiten zu begegnen, die Ausdehnung desselben vorerst als eine endliche voraussetzen. Uebrigens folgt das gleiche Resultat mit Zugrundelegung des genauern Ausdruckes $(\varrho \pm \delta)\,\omega$, indem für den unendlichen Process die Gleichung

$$\Sigma\,(\varrho \pm \delta)\,\omega = \Sigma\,\varrho\,\omega \pm \delta\,\Sigma\,\omega$$

in den oben gewonnenen Ausdruck $\Sigma\,\varrho\,\omega$ übergeht.

Will man die soeben angedeutete Summation thatsächlich zur Ausführung bringen, so hat man natürlich eine wirkliche Zerlegung des Flächenstückes in Elemente, sei es durch Parallelcoordinaten, sei es durch Polarcoordinaten u. s. f. vorzunehmen; der Ausdruck $\Sigma\,\varrho\,\omega$ verwandelt sich alsdann in ein Doppelintegral, und je nachdem man von der einen zu der andern Theilungsweise übergeht, hat man es mit der Transformation der Doppelintegrale zu thun. Dabei möge sogleich noch bemerkt werden, dass man die hierbei auftretenden Incremente $dx$, $dy$ ... stets als positive Grössen behandelt; selbst bei den vielfachen Integralen wird diese Annahme gemacht.

Zerschneiden wir beispielsweise das oben benutzte Flächenstück durch ein System rechtwinkliger Coordinaten in Elemente, so erhalten wir $\omega = d\,x\;d\,y$. Dabei kann es sich sehr wohl ereignen, dass einzelne Elemente streng genommen kein vollständiges Rechteck darstellen, indess darf man doch immer

*) In besondern Fällen kann $\varrho$ auch constant sein.

diese Theilchen als wirkliche Elementarrechtecke betrachten, weil das etwaige Fehlen oder Ueberschiessen im Schlussresultat nur einen Beitrag der ersten Ordnung liefert. Die Summe sämmtlicher Elemente $\varrho\,\omega = \varrho\, dx\, dy$ giebt nun das Doppelintegral $\int\int \varrho\, \partial x\, \partial y$. Der Umfang, über welchen diese zweifache Integration auszudehnen ist, wird hier — wie bei vielfachen Integralen überhaupt — durch eine oder mehrere Ungleichheiten am zweckmässigsten ausgedrückt. Bildet z. B. ein Rechteck die Begrenzung, heissen also $x = a, b$; $y = g, h$ die Endcoordinaten; so würde zu sagen sein, unser Integral hat sich zu erstrecken über alle Werthe, welche der doppelten Bedingung genügen

$$a < x < b;\; g < y < h.$$

Das so entstandene Integral würde also constante Grenzen besitzen.

Wird dagegen die Begrenzung durch eine Ellipse gebildet, so wird der Umfang der Integration durch die Ungleichheit

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 < 1$$

regulirt, wenn $\alpha$ und $\beta$ die Halbachsen der Ellipse bedeuten; denn für alle im Innern der Ellipse befindlichen Punkte findet die Beziehung Statt

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 < 1,$$

für die auf der Ellipse belegenen Punkte dagegen hat man

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1,$$

und die ausserhalb der Ellipse vorkommenden Punkte werden durch die Ungleichheit

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 > 1$$

angezeigt.

Was die Ausführung der Integrationen betrifft, so kann man ersichtlich einen doppelten Weg einschlagen. Entweder wird man zunächst alle Elemente addiren, welche dasselbe $y$ enthalten, d. h. man wird nach $x$ integriren, also das Integral $dy \int f(x, y)\, dx$ bilden, oder man wird zuerst die Elemente, denen dasselbe $x$ zukommt, vereinigen, d. i. man behandelt

zunächst das Integral $dx \int f(x, y)\, dy$. Der Integration nach $x$ entsprechen folglich bei der üblichen Lage der Coordinatenachsen Horizontalstreifen, während das Ergebniss der nach $y$ vollzogenen Integration Verticalstreifen sind.

Die Grenzen der einzelnen Integrale müssen dabei aus den Statt habenden Ungleichheiten abgeleitet werden. Zerfällt alsdann ein Integral in Theile, was z. B. bei einer Begrenzung des Flächenstückes von nebenstehender Gestalt eintreten würde, so hat man nachzusehen, wo die einzelnen $x$ ($y$) beginnen und endigen.

Fig. 12.

Im Allgemeinen werden ferner die Grenzen des zuerst zu behandelnden Integrales nicht unabhängig von der andern Variabeln sein, das Resultat wird daher im Allgemeinen eine Function dieser als Parameter im ersten Integral enthaltenen Veränderlichen ausdrücken.

## §. 136.

### Flächeninhalt der Ellipse.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir $\varrho = f(x, y) = 1$ voraussetzen und die Annahme machen, dass eine Ellipse das gegebene Flächenstück begrenzt. Alsdann sind dem Obigen zufolge alle die Elementarrechtecke zur Summe zu vereinigen, welche innerhalb des durch die Ungleichheit

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1$$

definirten Raumes sich befinden. Und was die Ordnung der auszuführenden Integrationen betrifft, so ist es wegen der völlig symmetrischen Theilungsweise hier augenscheinlich gleichgültig, nach welcher der Veränderlichen $x$, $y$ zuerst integrirt wird.

Beginnen wir nun z. B. mit der Integration nach $x$, so haben wir offenbar vorerst zu entscheiden, welche $x$ zu einem bestimmten $y$ gehören, d. h. wir haben nachzusehen, wo der dem Integrale $\int dx$ entsprechende Streifen beginnt und endigt.

Lösen wir zu diesem Behufe die oben erwähnte Ungleichheit nach $x$ auf, so kommt

$$x^2 < \alpha^2 \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right),$$

eine Beziehung, welche — wie es gewöhnlich geschieht — die extremen Werthe von $y$ bestimmt. Man erkennt nämlich aus dieser Ungleichheit, dass nur Streifen von $x$ existiren, sofern das eingeklammerte Glied der rechten Seite positiv ist, d. h. sofern die Beziehung gilt

$$\beta^2 > y^2.$$

Daraus folgt, dass $y$ zwischen $-\beta$ und $+\beta$ sich befinden muss. Mithin haben die $x$, welche diesen Werthen von $y$ entsprechen, die Bedingung

$$\alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} > x > -\alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}}$$

zu erfüllen. Weil aber die Integration auch auf die Theile auszudehnen ist, welche bis zur Begrenzung reichen, so ergiebt sich für den Werth eines Streifens

$$\int\limits_{-\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}}^{+\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}} d\,x = 2\alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}}.$$

Und da es solcher Streifen nur von $y = -\beta$ bis $y = +\beta$ giebt, so entspringt nach einigen leichten Reductionen

$$\int\limits_{-\beta}^{+\beta} \partial y \int\limits_{-\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}}^{+\alpha\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}} \partial x = \int\limits_{-\beta}^{+\beta} \partial y \,.\, 2\alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} = \alpha\beta\pi \text{ *)}.$$

*) Man erhält nämlich

$$\int dy \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} = \int \frac{\beta d\left(\frac{y}{\beta}\right)}{\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}} - \frac{1}{\beta^2} \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}}$$

$$= \beta \arc\sin \frac{y}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}.$$

## §. 137.

### Theilung der Ebene durch Polarcoordinaten.

Die vorigen Betrachtungen wurden mit Zugrundelegung eines Parallelcoordinaten-Systemes geführt. Nun erkennt man aber sofort, dass jedem Coordinatensysteme eine besondere Zerlegungsart des Raumes entspricht. Bei Voraussetzung eines andern Coordinatensystemes werden daher die vorhin gewonnenen Resultate in einem andern Gewande erscheinen. Wählen wir z. B. Polarcoordinaten, so wird die Ebene durch ein System von Kreisen und geraden Linien in Elemente getheilt; jeder Punkt in ihr wird folglich durch den Durchschnitt eines Kreises und einer Geraden bestimmt. Den Radiusvector $\varrho$ kann man dabei stets als absolute Grösse behandeln, wenn man nur den Coordinatenwinkel $\vartheta$ von 0 bis $2\pi$ oder von $-\pi$ bis $+\pi$ sich bewegen lässt.

Das Flächenelement $\omega$ kann auch hier als Rechteck betrachtet und demnach $=\varrho d\varrho d\vartheta$ gesetzt werden. In Wahrheit freilich ist dasselbe als Ringstück zu behandeln, besitzt also den Werth

$$\tfrac{1}{2}\left[(\varrho + d\varrho)\, d\vartheta + \varrho\, d\vartheta\right] d\varrho = \varrho\, d\vartheta\, d\varrho + \tfrac{1}{2}\, d\varrho^2 d\vartheta,$$

d. h. es wird durch einen Ausdruck von der Form $\varrho d\varrho d\vartheta(1+\varepsilon)$, wo $\lim \varepsilon = 0$, vorgestellt, aber dieser genauere Werth ist ohne Einfluss auf das Endresultat.

Die Dichtigkeit $\varrho_1$ endlich wird jetzt eine Function $\psi(\vartheta, \varrho)$ sein und somit die Masse des betrachteten Flächenstückes durch

$$\int\!\!\int \psi(\vartheta, \varrho)\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta$$

ausgedrückt werden.

---

Ferner entspringt durch theilweise Integration

$$\int dy \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} = y \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} + \frac{1}{\beta^2} \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}}},$$

also

$$\int dy \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} = \frac{\beta}{2} \arcsin \frac{y}{\beta} + \frac{y}{2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} + \text{const.}$$

Wählt man demnach in üblicher Weise den arc sin zwischen $\pm \frac{\pi}{2}$, so hat man

$$2\alpha \int_{-\beta}^{+\beta} dy \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} = 2\alpha \left[\frac{\beta}{2} \arcsin \frac{y}{\beta} + \frac{y}{2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}}\right]_{-\beta}^{+\beta} = \alpha\beta\pi.$$

Nehmen wir auch hier $\psi(\vartheta, \varrho) = 1$ und als Begrenzung des Flächenstückes eine Ellipse, deren grosse Halbachse wieder $\alpha$, deren kleine $\beta$ heisst: so wird nun der Umfang der Integration durch die Ungleichheit

$$\varrho^2 \left[\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2}{\beta^2}\right] < 1$$

regulirt. Diese ist nach $\varrho$, oder $\vartheta$ aufzulösen, je nachdem man zunächst nach $\varrho$, oder $\vartheta$ zu integriren gedenkt. Im Vergleich zu der frühern Betrachtung tritt aber hier der Umstand ein, dass die Ordnung der Integration nicht gleichgültig ist. Um beide Fälle vorzuführen, wollen wir mit dem einfacheren derselben, mit der Integration nach $\varrho$ beginnen. Geometrisch genommen haben wir also jetzt alle Elemente zu summiren, welche in ihrer Vereinigung einen Kreisausschnitt bilden. Nun folgt sogleich aus der obigen Ungleichheit, dass

$$\varrho^2 < \frac{1}{\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2}{\beta^2}},$$

d. g. wegen des positiven $\varrho$

$$\varrho < \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2}{\beta^2}}}.$$

Da man dieser Ungleichung immer wird genügen können, so giebt es auch stets einen Sector. Sein jedesmaliger Werth wird durch die Gleichung

$$d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2}{\beta^2}}}} \varrho\, d\varrho = \frac{1}{2} \frac{d\vartheta}{\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2}{\beta^2}}$$

bestimmt. Und werden nun sämmtliche Sectoren vereinigt, d. h. wird in Bezug auf $\vartheta$ von 0 bis $2\pi$ integrirt; so entspringt für den Inhalt der Ellipse die Gleichung

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2}{\beta^2}} = \frac{1}{2}\alpha\beta \int_0^{2\pi} \frac{d\left(\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tang}\vartheta\right)}{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tang}\vartheta\right)^2} = \alpha\beta\pi,$$

indem der arcus dadurch definirt ist, dass er für $\vartheta = 0$ ebenfalls verschwindet.

Viel verwickelter wird die Untersuchung, wenn man mit der Integration nach $\vartheta$ beginnt, also sämmtliche Elemente summirt, welche einen Kreisring bilden. Offenbar ist derselbe vollständig für die zwischen 0 und $\beta$ enthaltenen $\varrho$; er besteht hingegen aus zwei getrennten Stücken, wenn $\varrho$ zwischen $\beta$ und $\alpha$ sich befindet.

Schreibt man die obige Ungleichheit in der Form

$$\frac{1}{\alpha^2} + \sin\vartheta^2\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) < \frac{1}{\varrho^2},$$

d. g.

$$\sin\vartheta^2 < \left[\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right] : \left[\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right],$$

so erkennt man unmittelbar, dass für $0 < \varrho \leqq \beta$ der Bogen $\vartheta$ keiner Beschränkung unterworfen, also von 0 bis $2\pi$ zu wählen ist. Dagegen wird $\vartheta$ einem zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen $\vartheta_1$ gleich sein, wenn $\varrho$ von $\beta$ bis $\alpha$ sich bewegt. Für den ersteren Fall stellt daher

$$\int_0^\beta \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} d\vartheta = \pi\beta^2$$

den Werth des Integrales $\int\int \varrho\, d\varrho\, d\vartheta$ vor. Bei dem andern Falle hingegen zerfällt das Integral $\int\int \varrho\, d\varrho\, d\vartheta$ formell in die drei folgenden

$$\int_\beta^\alpha \varrho\, d\varrho \int_0^{\vartheta_1} d\vartheta, \quad \int_\beta^\alpha \varrho\, d\varrho \int_{\pi-\vartheta_1}^{\pi+\vartheta_1} d\vartheta, \quad \int_\beta^\alpha \varrho\, d\varrho \int_{2\pi-\vartheta_1}^{2\pi} d\vartheta,$$

weil für den ersten Quadranten $\vartheta$ von $\vartheta$ bis $\vartheta_1$ geht, für den zweiten und dritten Quadranten $\pi - \vartheta_1$ und $\pi + \vartheta_1$ die Grenzen des Bogens $\vartheta$ bilden und für den vierten Quadranten endlich $\vartheta$ das Intervall von $2\pi - \vartheta_1$ bis $2\pi$ durchläuft. Summirt man diese Integrale, so bekommt man den Inhalt $4\int_\beta^\alpha \vartheta_1 \varrho\, d\varrho$ der beiden zwischen $\beta$ und $\alpha$ gelegenen Flächenstücke, und sonach stellt

$$\pi\beta^2 + 4\int_\beta^\alpha \vartheta_1\, \varrho\, d\varrho$$

den Inhalt der Ellipse vor. Bedenkt man nun, dass

$$\sin\vartheta_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}}} = \frac{\beta}{\varrho}\sqrt{\frac{\alpha^2-\varrho^2}{\alpha^2-\beta^2}}$$

ist, so ergiebt sich jetzt für die Ellipsenfläche der Ausdruck

$$\pi\beta^2 + 4\int_\beta^\alpha d\varrho\,.\,\varrho \arcsin\left(\frac{\beta}{\varrho}\sqrt{\frac{\alpha^2-\varrho^2}{\alpha^2-\beta^2}}\right),$$

der entwickelt natürlich auf $\pi\alpha\beta$ zurückführen muss. Und in der That, man findet durch theilweise Integration

$$\int \varrho \arcsin\frac{\beta}{\varrho}\sqrt{\frac{\alpha^2-\varrho^2}{\alpha^2-\beta^2}}\,d\varrho = \frac{\varrho^2}{2}\arcsin\frac{\beta}{\varrho}\sqrt{\frac{\alpha^2-\varrho^2}{\alpha^2-\beta^2}} +$$

$$+\frac{\alpha\beta}{4}\int\frac{d(\varrho^2)}{\sqrt{-\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)\varrho^2-\varrho^4}} = \frac{\varrho^2}{2}\arcsin\frac{\beta}{\varrho}\sqrt{\frac{\alpha^2-\varrho^2}{\alpha^2-\beta^2}}$$

$$+\frac{\alpha\beta}{4}\arcsin\frac{2\varrho^2-\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{-4\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)^2}} + \text{const.*}),$$

sonach ist

$$4\int_\beta^\alpha \varrho \arcsin\frac{\beta}{\varrho}\sqrt{\frac{\alpha^2-\varrho^2}{\alpha^2-\beta^2}}\,d\varrho = -4\,\frac{\pi}{4}\,\beta^2$$

$$+\alpha\beta\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\pi\beta^2+\alpha\beta\pi.$$

---

*) Man beachte hierbei die Beziehungen:

$$-\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)\varrho^2-\varrho^4 = -\alpha^2\beta^2+\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2$$

$$-\left[\varrho^4-2.\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\varrho^2+\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2\right]$$

$$= -\frac{-4\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)^2}{4}\left[1-\frac{2\varrho^2-\alpha^2-\beta^2}{-4\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]^2,$$

also

$$\frac{d(\varrho^2)}{\sqrt{-\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)\varrho^2-\varrho^4}} = \frac{d\left[\frac{2\varrho^2-\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{-4\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)^2}}\right]}{\sqrt{1-\left[\frac{2\varrho^2-\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{-4\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)^2}}\right]^2}}.$$

## §. 138.

### Allgemeinste Art der Transformation.

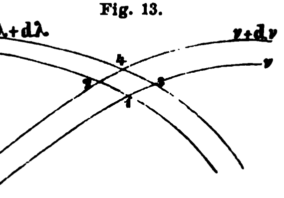
Die vorhergehenden Betrachtungen haben an einem Beispiele den Einfluss veranschaulicht, welchen die zweckmässige Wahl des Coordinatensystemes auf die grössere oder geringere Leichtigkeit ausübt, mit der die zu vollziehenden Integrationen bewerkstelligt werden können. So erforderte im vorigen Falle gerade die Anwendung der Polarcoordinaten sowohl den geringsten, als grössten Aufwand von Rechnung, je nachdem man zuerst nach $\varrho$ oder $\vartheta$ integrirte. Selbst die Möglichkeit bleibt nicht ausgeschlossen, dass in einem vorgelegten Falle nicht einmal die erste Integration ausführbar sein kann, sofern man das ursprüngliche Coordinatensystem beibehält. Die Frage nach der Transformation der Doppelintegrale ist daher als eine sehr wichtige zu bezeichnen.

Erwägt man nun, dass Coordinaten überhaupt die Art und Weise andeuten, in welcher der Raum getheilt wird, so werden wir offenbar die allgemeinste Art der Transformation von Doppelintegralen erzielen, wenn wir uns die Ebene durch ein System von Curven in Elemente zerlegt denken, also jeden Punkt in ihr als den Durchschnitt zweier Curven auffassen. Diese neuen Coordinaten, welche $\lambda, \nu$ heissen mögen, werden ersichtlich als Functionen der rechtwinkligen erscheinen, wenn wir diese als die ursprünglichen Coordinaten uns vorstellen; wir können sonach die Gleichungen bilden

$$\lambda = \varphi(x, y), \quad \nu = \psi(x, y).$$

Indem wir aber $\lambda$ und $\nu$ um unendlich kleine Intervalle sich verändern lassen, bekommen wir ein System von Linien, deren Durchschnitt das Flächenelement $\omega$ bestimmt. Augenscheinlich kann dieses als Parallelogramm angesehen werden, da hierdurch nur ein Fehler begangen wird, der gegen den Inhalt des Elementes unendlich klein ist und folglich auf das Endresultat ohne Einfluss bleibt.

Der soeben betrachtete Fall lieferte eine Bestimmung der Coordinaten $\lambda, \nu$ durch die rechtwinkligen $x, y$; umgekehrt aber sind diese Functionen jener. Da nun gewöhnlich




ursprünglichen Coordinaten $x$, $y$ durch die neuen $\lambda$, $\nu$ auszudrücken sind, so wollen wir auch hier diesen Fall voraussetzen. Alsdann heissen offenbar die Eckpunkte 1, 2, 3, 4 des oben erwähnten Parallelogrammes

$$1\,(x,\,y);\;2\left(x+\frac{\partial x}{\partial \nu}\partial \nu,\;y+\frac{\partial y}{\partial \nu}\partial \nu\right);\;3\left(x+\frac{\partial x}{\partial \lambda}\partial \lambda,\;y+\frac{\partial y}{\partial \lambda}\partial \lambda\right);$$

$$4\left(x+\frac{\partial x}{\partial \lambda}\partial \lambda+\frac{\partial x}{\partial \nu}\partial \nu,\;y+\frac{\partial y}{\partial \lambda}\partial \lambda+\frac{\partial y}{\partial \nu}\partial \nu\right),$$

wenn wir bloss die ersten Dimensionen der den unendlich kleinen Zunahmen von $\lambda$ und $\nu$ entsprechenden Werthe von $x$ und $y$ berücksichtigen.

Den Inhalt des Parallelogrammes werden wir nun auf die leichteste Weise ermitteln können, wenn wir uns erinnern, dass der doppelte Inhalt eines Dreieckes, dessen Eckpunkte durch die Coordinaten 0, 0; $a$, $b$; $a'$, $b'$ definirt werden, mittelst der Formel

$$2\,\varDelta = \pm\,(ab' - a'b)$$

gegeben wird*). Dabei ist das Plus- oder Minuszeichen anzuwenden, je nachdem $ab' - a'b$ zu den positiven oder negativen Grössen gehört.

Wie sofort einleuchtet, können wir uns dieser Formel ohne Weiteres bedienen, wenn wir das Achsensystem in den Punkt $x$, $y$ uns verlegt denken und die Punkte

$$\frac{\partial x}{\partial \nu}\partial \nu,\;\frac{\partial y}{\partial \nu}\partial \nu;\;\;\frac{\partial x}{\partial \lambda}\partial \lambda,\;\frac{\partial y}{\partial \lambda}\partial \lambda$$

bezüglich mit $a$, $b$; $a'$, $b'$ identificiren. Auf diese Weise folgt dann sogleich für den Inhalt des Parallelogrammes der Ausdruck

$$\omega = \pm\left[\frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \nu}\right]\partial \lambda\,\partial \nu,$$

bei welchem selbstverständlich nur der absolute Werth in Betracht kommt, was ja durch das doppelte Zeichen $\pm$ angedeutet ist.

---

*) Man vergleiche hierbei: O. Hesse. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene, S. 7—8.

## §. 139.

### Ivory'sche Substitution.

Die vorhergehende Betrachtung wollen wir in der Weise näher erläutern, dass wir mit Ivory

1. $$x = \alpha \lambda \cos v, \quad y = \beta \lambda \sin v$$

setzen, wo $\alpha, \beta$ beliebige Constanten ausdrücken. Offenbar ist diese Substitution im Grunde eine Verallgemeinerung der Polarcoordinaten, wie wir schon daraus entnehmen können, dass für $\alpha = \beta = 1$ die Gleichungen 1. jene Coordinaten vorstellen. Die nähere geometrische Bedeutung aber wird sich aus der nachstehenden Erörterung ergeben, vorher möge indess folgende Bemerkung Platz finden.

Um den Bogen $v$ von 0 bis $2\pi$ oder von $-\pi$ bis $+\pi$ wählen zu können, müssen wir $\lambda$ positiv voraussetzen*); alsdann aber besteht die Relation

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}.$$

In ähnlicher Weise ist der Bogen $v$ völlig bestimmt, indem vermöge der beiden Beziehungen

$$\cos v = \frac{x}{\alpha\lambda}, \quad \sin v = \frac{y}{\beta\lambda}$$

der Quadrant definirt wird, in welchen der Winkel $v$ sich befindet.

Verbindet man die Quadrate der vorigen Gleichungen mit einander, so hat man sogleich die andere

2. $$1 = \left(\frac{x}{\alpha\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta\lambda}\right)^2,$$

und folglich entspricht einem gegebenen $\lambda$ eine Ellipse, deren Halbachsen $\alpha\lambda$, $\beta\lambda$ heissen. Daraus ergiebt sich, dass die Ebene einerseits durch ein System ähnlicher Ellipsen getheilt wird; und weil nun anderseits die Beziehung

$$\frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tang} v = \frac{y}{x}$$

gilt, diese aber für ein gegebenes $v$ eine gerade Linie reprä-

*) Wäre $\lambda$ bald positiv, bald negativ, so müsste der arcus $v$ auf die Hälfte seines Weges beschränkt werden.

sentirt, so findet auch eine Zerlegung der Ebene durch ein System gerader Linien Statt.

Durch Differentiation der Gleichungen 1. gewinnt man ferner die Relationen

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\alpha\lambda \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \beta\lambda \cos v; \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \alpha \cos v, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \beta \sin v.$$

Mithin ist

$$\pm\left[\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right]\partial\lambda\partial v = \alpha\beta\lambda(\cos v^2 + \sin v^2)\partial\lambda\,\partial v = \alpha\beta\lambda\,\partial\lambda\partial v.$$

Nimmt man also wie früher eine elliptische Begrenzung des Flächenraumes an, so fliesst aus 2. mit Berücksichtigung der Beziehung $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 < 1$, dass $\lambda^2 < 1$ und demnach wegen des absoluten Werthes von $\lambda$ in Bezug auf diese Veränderliche von 0 bis 1 zu integriren ist. Die nach $v$ zu vollziehende Integration hingegen erstreckt sich von 0 bis $2\pi$; man hat daher unmittelbar

$$\alpha\beta\int_0^1\int_0^{2\pi}\lambda\,d\lambda\,dv = \alpha\beta\pi.$$

## §. 140.

### Zweiter Beweis der auf Doppelintegrale bezüglichen Transformationsformel.

Wegen der Wichtigkeit, welche dem in §. 138. bewiesenen Resultate in der Theorie der bestimmten Doppelintegrale zukommt, halten wir eine nochmalige, rein analytische Begründung desselben nicht für unzweckmässig. Sei desshalb

$$1. \qquad Z = \int_a^b dx \int_g^h V dy$$

das zu transformirende Doppelintegral; in demselben bezeichnet $V$ eine Function von $x$ und $y$, $g$ und $h$ drücken entweder Functionen von $x$ aus, oder sind wie $a$ und $b$ Constanten. Wie ohne Weiteres einleuchtet und auch schon in §. 134. erwähnt wurde, kann man ferner voraussetzen, dass die Variabeln $x$ und $y$ von ihrer untern bis zu ihrer obern Grenze beständig wachsen oder, was dasselbe ist, dass $dx$ und $dy$ fortwährend positiv sind. Statt der Veränderlichen $x$ und $y$

mögen nun die neuen, mit $x$ und $y$ durch zwei Relationen verbundenen Variabeln $u$ und $v$ gewählt werden.

Wir behandeln zunächst das Integral $\int_g^h V\,dy$, und zwar suchen wir dasselbe in ein anderes umzusetzen, in welchem $v$ die Integrationsveränderliche darstellt. Zu dem Behufe eliminiren wir aus den gegebenen Relationen vorerst die Variabele $u$, bilden also eine Gleichung von der Form

$$y = f(x, v).$$

Da wir nun bei der Integration nach $y$ die Veränderliche $x$ wie einen constanten Parameter betrachten dürfen; so sind wir auch berechtigt, bei der Bildung des neuen, an die Stelle von $dy$ tretenden Differentials bloss $v$ als die einzige Variabele anzusehen, und demgemäss werden wir in dem zu transformirenden Integrale $\int_g^h V\,dy$ $dy$ durch $\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\,dv$ zu ersetzen haben. Heisst dann ferner $V_0$ der durch die Substitution $y = f(x, v)$ sich ergebende Werth von $V$, und sind endlich $v_0$ und $v_1$ die $y = g$ und $y = h$ entsprechenden Grenzen des neuen Integrales; so besteht nunmehr die Gleichung

$$\int_g^h V\,dy = \int_{v_0}^{v_1} V_0\,\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\,dv.$$

Offenbar dürfen wir bei dieser Transformation stets der Annahme folgen, dass $v$ immer in demselben Sinne von $v_0$ bis $v_1$ variirt, wenn $y$ von $g$ bis $h$ sich bewegt; denn wäre es anders, so würde durch eine Zerlegung des Integrales nach $y$ in Theilintegrale sofort unsere Voraussetzung sich verwirklichen lassen. Da nun $dy$ positiv sein soll, so wird das Vorzeichen von $dv$ augenscheinlich mit dem von $\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}$ übereinstimmen. Indess kann auch $dv$ stets positiv gewählt werden, weil man für den Fall einer negativen Derivirten $\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}$ nur die Grenzen $v_0$ und $v_1$ mit einander zu vertauschen braucht, um augenblicklich die gemachte Annahme realisiren zu können. Bezeichnet also $\pm \frac{\partial f(x,v)}{\partial v}$ den abso-

luten Werth der partiellen Abgeleiteten $\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}$, so erhält man nunmehr statt 1. die Form

$$Z=\int_a^b dx\int \pm V_0\,\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\,dv,$$

wobei die Grenzen der auf $v$ bezüglichen Integration den soeben erwähnten Bestimmungen gemäss zu wählen sind. Die weitere Behandlung unseres Doppelintegrales besteht folglich jetzt nur noch in der Einführung der vorhin eliminirten Veränderlichen $u$ statt der Grösse $x$. Vermöge der gegebenen Relationen wird nun zwar $x$ als Function von $u$ und $v$ erscheinen, somit etwa

$$x=F(u,v)$$

sein, aber bei der Umformung des Integrales nach $x$ genügt es ohne Zweifel, $x$ nur als Function von $u$ zu betrachten, mithin $dx$ schliesslich durch $\pm\frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\,du$ zu ersetzen. Und daher wird, wenn $V'$ den durch die Grössen $u$ und $v$ ausgedrückten Werth von $V$ bedeutet, das Doppelintegral 1. jetzt die Gestalt

$$Z=\iint V'\left[\pm\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\right]\left[\pm\frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\right]du\,dv$$

annehmen, wobei selbstverständlich die Integrationsintervalle alle Werthe in sich begreifen müssen, welche die Formel 1. umfasst.

Nun zeigt aber die Differentiation der Gleichung $y=f(x,v)$, sofern $x$ und $y$ als Functionen von $u$ und $v$ behandelt werden, dass

$$\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv=\frac{\partial f(x,v)}{\partial x}\left[\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right]$$
$$+\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}dv.$$

Und hieraus fliesst weiter

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial f(x,v)}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u},$$
$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial f(x,v)}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f(x,v)}{\partial v},$$

d. g. wegen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Daher die Gleichung

$$\text{I.} \qquad Z = \pm \int\int V' \left[\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right] du\, dv.$$

## §. 141.

### Anwendungen.

Setzen wir in der vorhergehenden Formel beispielsweise voraus, dass $V$ mit dem bei Complanationen vorkommenden Werthe $\sqrt{1+p^2+q^2}$ identisch sei, wo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ die partiellen Differentialquotienten der Function $z$ von $x$ und $y$ nach jeder dieser Variabeln bedeuten; so erhält man die Gleichung

$$\text{II.} \qquad \int\int V\, dx\, dy$$

$$= \int\int \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\, du\, dv.$$

Denn bekannten Lehren zufolge hat man die beiden Beziehungen

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

welche nach $p$ und $q$ aufgelöst zeigen, dass

$$p = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

und

$$q = \left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

ist und dass demnach $\int\int V dx\, dy$ in das Integral rechts übergeht.

Bedeuten die neuen unabhängigen Veränderlichen speciell sogenannte Polarcoordinaten $\vartheta$, $\varphi$, d. h. setzt man

$$z = \varrho \cos \vartheta, \; x = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi, \; y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi,$$

wo der Radiusrector $\varrho$ als Function von $\vartheta$ und $\varphi$ betrachtet wird;*) so hat man zunächst die Relationen

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \varphi + \varrho \cos \varphi \cos \vartheta; \; \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \sin \vartheta \cos \varphi - \varrho \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} \sin \varphi \sin \vartheta + \varrho \cos \vartheta \cos \varphi; \; \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \sin \vartheta \sin \varphi + \varrho \sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} \cos \vartheta - \varrho \sin \vartheta; \; \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \cos \vartheta.$$

Und daher wird

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \varrho \sin \vartheta \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} \sin \vartheta + \varrho \cos \vartheta \right],$$

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = -\varrho \sin \vartheta \cos \vartheta \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} \cos \vartheta - \varrho \sin \vartheta \right] + \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\varrho \sin \vartheta \sin \varphi \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} \cos \vartheta - \varrho \sin \vartheta \right] - \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \cos \varphi,$$

die Summe der Quadrate dieser Grössen aber ist mit

$$\varrho^2 \sin \vartheta^2 \left[ \left( \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} \right)^2 + \varrho^2 \right] + \varrho^2 \left( \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \right)^2$$

gleichbedeutend, folglich ergiebt sich

$$\int \int V dx\, dy = \int \int d\vartheta\, d\varphi \,.\, \varrho \sqrt{\sin \vartheta^2 \left[ \left( \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} \right)^2 + \varrho^2 \right] + \left( \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \right)^2}$$

Spätere Betrachtungen werden zeigen, dass diese Beziehung am einfachsten auf geometrischem Wege gewonnen wird.

Nicht ohne Interesse dürfte es ferner noch sein, wenn wir, gestützt auf die Gleichung II., ein berühmtes, von Legendre entdecktes Theorem über den Zusammenhang der sogenannten vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung zu beweisen suchen**). Bezeichnen nämlich $m$ und $n$ positive Constanten, welche die Bedingung

---

*) Man könnte auch wie gewöhnlich $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi$, $z = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi$ schreiben; die Endformel bliebe dadurch unverändert.

**) Bezeichnet $f(x, X)$ eine rationale Function von $x$ und dem Radicale

$$X = \sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon},$$

so wird jedes Integral von der Form $\int f(x, X)\, dx$ elliptisch genannt. Jedes elliptische Integral lässt sich immer wenigstens auf eines der drei Integrale

$$m^2 + n^2 = 1$$

befriedigen; so kann man in dem Doppelintegrale $\iint V\,dx\,dy$ statt der Variabeln $x$, $y$, $z$ die neuen $\varrho$, $\vartheta$, $\varphi$ oder, wie es hier bei constantem $\varrho$ geschehen soll, bloss die beiden Veränderlichen $\vartheta$, $\varphi$ substituiren, welche mit den ursprünglichen durch die Gleichungen

$$x = \varrho \sin\vartheta \sqrt{1 - m^2 \sin\varphi^2},\, y = \varrho\cos\vartheta\cos\varphi,\, z = \varrho\sin\varphi\sqrt{1 - n^2\sin\vartheta^2}$$

verbunden sind.*) Alsdann aber gelten die Beziehungen:

$$\frac{\partial x}{\partial\vartheta} = \varrho\cos\vartheta\sqrt{1 - m^2\sin\varphi^2};\; \frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\varrho\,\frac{m^2\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - m^2\sin\varphi^2}};$$

$$\frac{\partial y}{\partial\vartheta} = -\varrho\sin\vartheta\cos\varphi;\; \frac{\partial y}{\partial\varphi} = -\varrho\sin\varphi\cos\vartheta;$$

$$\frac{\partial z}{\partial\vartheta} = -\varrho\,\frac{n^2\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{1 - n^2\sin\vartheta^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = \varrho\cos\varphi\sqrt{1 - n^2\sin\vartheta^2}.$$

Und hieraus folgt mit Berücksichtigung der Gleichheit

$$1 - m^2\sin\varphi^2 - n^2\sin\vartheta^2 = m^2\cos\varphi^2 + n^2\cos\vartheta^2$$

sofort weiter, dass

---

$$u = \int^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\; v = \int^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\; w = \int^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

reduciren, welche beziehungsweise die elliptischen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung vorstellen. In denselben bedeutet $k$, der sogenannte Modul, eine Constante; er ist stets kleiner, als 1. Auch $n$ bezeichnet eine Constante; sie kann selbst imaginär sein und wird Parameter genannt. Als Normalformen der ersten, zweiten und dritten Gattung werden nach Legendre, dem Schöpfer der Theorie der elliptischen Integrale, gewöhnlich die folgenden gewählt:

$$F(\varphi,k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta},\; E(\varphi,k) = \int_0^\varphi \Delta . d\varphi,\; \Pi(\varphi,k,n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\,\Delta},\ \text{wo}$$

$$\Delta = \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin\varphi^2}.$$

Wird in denselben die obere Grenze, die sogenannte Amplitude $= \frac{\pi}{2}$, so heissen die Integrale $F$, $E$, $\Pi$ vollständig und werden durch $F'$, $E'$, $\Pi'$ bezeichnet. Man vergl. in Betreff der elliptischen Integrale die bekannten Werke von Durège u. Schellbach über elliptische Functionen.

*) Vergl. Moigno. Calcul intégral §§. 119.—120.

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \vartheta}-\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\varrho^2 \sin\varphi\,[\cos\vartheta^2 - m^2 \sin\varphi^2 + m^2 \sin\vartheta^2]}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}}$$

$$=\frac{\varrho^2 (m^2\cos\varphi^2 + n^2\cos\vartheta^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}};$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \vartheta}-\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial z}{\partial \varphi}=\frac{\varrho^2 \sin\vartheta\,[\cos\varphi^2 - n^2 \sin\vartheta^2 + n^2 \sin\varphi^2]}{\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}$$

$$=\frac{\varrho^2 \sin\vartheta\,(m^2\cos\varphi^2 + n^2\cos\vartheta^2)}{\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial z}{\partial \varphi}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \vartheta}=\frac{\varrho^2 \cos\vartheta\cos\varphi\,(m^2\cos\varphi^2 + n^2\cos\vartheta^2)}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}$$

ist. Gemäss der Formel II. entspringt daher nach der einfachsten Reduction die Gleichung

$$\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \varrho^2\int\int\frac{(m^2\cos\varphi^2+n^2\cos\vartheta^2)\,d\vartheta\,d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}.$$

Wird nun das Doppelintegral rechts in Bezug auf jede der Veränderlichen $\vartheta$, $\varphi$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ genommen, so ist dasselbe offenbar völlig unabhängig von den Constanten $m$ und $n$, weil es wegen der Bedingungsgleichung $m^2+n^2=1$ die Form

$$\varrho^2\left[m^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\varphi^2\,d\vartheta\,d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}+n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\vartheta^2\,d\vartheta\,d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}\right]$$

$$=\varrho^2 c$$

besitzt, wo $c$ den vorläufig noch unbekannten Werth des Doppelintegrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\varphi^2\,d\vartheta\,d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\vartheta^2\,d\vartheta\,d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}$$

bedeutet.*) Man darf daher die eine der beiden Constanten $m$ und $n$, z. B. $m$ mit Null, also die andere ($n$) mit der Zahl 1 identificiren. Geschieht dies, so zeigt sich augenblicklich, dass $c$ mit der Zahl $\frac{\pi}{2}$ und demnach unser Doppelintegral mit $\varrho^2\frac{\pi}{2}$ zusammenfällt. Andererseits aber hat man

*) Geometrisch folgt dies unmittelbar, weil das Doppelintegral den achten Theil der Kugelfläche $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$ ausdrückt.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(m^2\cos\varphi^2+n^2\cos\vartheta^2)\,d\vartheta\,d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-m^2\sin\varphi^2-n^2\sin\vartheta^2)\,d\vartheta\,d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin\varphi^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-n^2\sin\vartheta^2}},$$

und folglich ergiebt sich mit Benutzung der Legendre'schen Bezeichnungsweise der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung das Theorem

$$F'(m)\,E'(n)+F'(n)\,E'(m)-F'(m)\,F'(n)=\frac{\pi}{2}\,*).$$

Um endlich die gemachten Andeutungen über die Art und Weise, in welcher die gegebenen Gleichungen $x=\varphi(u,v)$ und $y=\psi(u,v)$ zur Bestimmung der Integrationsintervalle des transformirten Integrales zu verwenden sind, in ein helleres Licht zu setzen, wollen wir noch einige hierauf bezügliche Beispiele folgen lassen.

1. Sei zunächst das Doppelintegral

$$s=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

mittelst der Gleichungen $x=u$, $y=uv$ umzuformen.

Sieht man vorerst von den Integrationsgrenzen ab, so wird man wegen $\frac{\partial x}{\partial u}=1$, $\frac{\partial x}{\partial v}=0$, $\frac{\partial y}{\partial u}=v$, $\frac{\partial y}{\partial v}=u$, also $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=u$ die Beziehung

$$s=\int\int e^{-(1+v^2)u}\,u\,du$$

---

*) Die Verallgemeinerung dieser Formel ist von Catalan in den „Mémoires couronnées par l'académie de Bruxelles, tome XIV. Deuxième Partie 1841" gegeben. Die Entwicklung und elegantere Darstellung derselben findet man in einem spätern Aufsatze Enneper's, Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch etc. Jahrg. VI. S. 294—300. Und bezüglich einer andern Ableitungsweise des Legendre'schen Theoremes vergleiche man auch Schlömilch: Ueber einige elliptische Integrale. Zeitschrift für Math. und Physik. Jahrg. II. S. 49—56.

erhalten. Nun aber bestimmen sich die Grenzen von $v$ vermöge der Gleichung $y = xv$, wenn für $y$ nach einander die Werthe 0 und $\infty$ gesetzt werden; sie heissen daher wegen des positiven $x$ ebenfalls 0 und $\infty$. Das auf $u$ bezügliche Integrationsintervall dagegen ist aus der Gleichung $x = u$ zu entwickeln; identificirt man hierin $x$ nach einander mit 0 und $\infty$, so erkennt man unmittelbar, dass auch $u$ von 0 bis $\infty$ sich bewegt. Mithin gilt schliesslich die Gleichung

$$s = \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(1+v^2)u^2}\, dv,$$

deren weitere Behandlung auf Seite 116 gegeben ist.

2. Soll ferner das Integral

$$s = \int_0^\infty dx \int_0^\infty f(x^2 + y^2)\, dy,$$

in welchem wir selbstverständlich unter $f(x^2 + y^2)$ eine solche Function von $x$ und $y$ verstehen, für die das Integral nicht ohne Bedeutung ist, mittelst der Substitutionen $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ transformirt werden; so wird man hier für die Grenzen von $v$ vermöge der Relation $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} v$ die Werthe 0 und $\frac{\pi}{2}$ erhalten, während das auf $u$ bezügliche Intervall 0 und $\infty$ heisst. Nun ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v, \; \frac{\partial x}{\partial v} = -u \sin v, \; \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, \; \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos v,$$

sonach

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = u$$

und daher

$$s = \int_0^\infty du \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\, f(u^2)\, dv,$$

d. g., weil $u\, f(u^2)$ unabhängig von $v$ ist,

$$s = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty u\, f(u^2)\, du.$$

Setzt man hierin behufs weiterer Transformation $u^2 = x$, so erhält man

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Wie man noch sieht, wird für $f(x^2+y^2) = e^{-(x^2+y^2)}$ wieder das unter 1. betrachtete Integral erscheinen, also

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

sein.

3. Als letztes Beispiel wählen wir das Doppelintegral

$$s = \int_0^1 dy \int_0^c \sqrt{a^2 - x^2 - (c^2 - x^2)y^2}\cdot\sqrt{c^2 - x^2}\,dx,$$

in welchem wir die Constante $c$ kleiner als $a$ voraussetzen und das wir nach Euler mittelst der Gleichungen

$$x = \frac{v}{\sqrt{1+u^2}},\ y = \frac{u\,v}{\sqrt{c^2(1+u^2) - v^2}}$$

umzuformen suchen.*)

Offenbar empfiehlt sich hier zunächst die Elimination der Veränderlichen $v$, indem man dadurch auf die einfache Beziehung

$$y = \frac{u\,v}{\sqrt{c^2 - x^2}}$$

geführt wird. Daraus aber folgt, dass für $x = 0$ die Variabele $u$ den Werth $\infty$ annimmt, hingegen für $x = c$ mit Null zusammenfällt. Wählt man hierauf in der Gleichung

$$y = \frac{u\,v}{\sqrt{c^2(1+u^2) - v^2}}$$

für $y$ nach einander die Werthe 0 und 1, so wird $v$ augenscheinlich die Grenzwerthe 0 und $c$ erwerben. Und da nun

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{v\,u}{\sqrt{(1+u^2)^3}},\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{(c^2 - v^2)\,v}{\sqrt{[c^2(1+u^2) - v^2]^3}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u\,c^2(1+u^2)}{\sqrt{[c^2(1+u^2) - v^2]^3}},$$

also

*) Vergl. Raabe. Differential- u. Integralrechnung. Thl. 2, Abthlg. 1, S. 160—162.

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}}$$

ist, so wird schliesslich

$$\int_0^1 dy \int_0^c dx \sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)y^2} \cdot \sqrt{c^2-x^2}$$

$$= \int_0^c dv \int_0^\infty v \frac{\sqrt{a^2-v^2}\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}}{(1+u^2)\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}} du,$$

d. g.

$$s = \int_0^c dv \int_0^\infty v \frac{\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2}\int_0^c v\sqrt{a^2-v^2}\, dv$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[a^3 - \sqrt{(a^2-c^2)^3}\right].$$

### Erweiterte Bedeutungen eines Doppelintegrales.*)

## §. 142.

### Darstellung des bestimmten Doppelintegrales als Grenzwerth einer Doppelsumme mittelst Inhaltsbestimmung irgendwie begrenzter Körper.

Die in §. 135. angestellten Betrachtungen haben uns gelehrt, wie man sich in der einfachsten Weise von einem bestimmten Doppelintegrale eine sehr anschauliche Vorstellung bilden kann, sei sie nun rein geometrischer, oder mechanischer Natur. Jene Vorstellung ist gleichwohl nicht die einzig mögliche; man braucht sich durchaus nicht auf das Gebiet der Ebene zu beschränken, sondern kann statt derselben irgend eine krumme Fläche substituiren, ja selbst Inhalte von Körpern lassen sich durch bestimmte Doppelintegrale ausdrücken. Wir haben in der That schon früher ein Beispiel zu jeder dieser Vorstellungsweisen kennen gelernt. Bezeichnete nämlich $\varphi(x, y)$ eine innerhalb der bezüglichen

---

*) Man vergleiche hier die Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen und namentlich Serret: Cours de calcul intégral.

Integrationsgrenzen endlich bleibende Function*) und $a$ eine Constante; so liess sich ohne die geringste Mühe die Wahrheit der Dirichlet'schen Formel

$$\int_0^a dx \int_0^x \varphi(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a \varphi(x, y)\, dx$$

durch Zuhülfenahme eines körperlichen Raumes nachweisen, und unmittelbar einleuchtend war ferner der Satz, dass die in §. 131. betrachtete Kugelfunction $X_n$ aus einem über eine Kugelfläche ausgedehnten Doppelintegrale bestand. Die Allgemeinheit derartiger Vorstellungen wollen wir jetzt nachzuweisen versuchen, und zwar wollen wir mit der Inhaltsbestimmung eines Volumens durch ein Doppelintegral beginnen, weil wir die hierbei erzielten Resultate behufs der strengen Begründung der andern Auffassungsweise, nach welcher das bestimmte Doppelintegral als Ausdruck für den Inhalt einer irgendwie begrenzten krummen Fläche erscheint, zu benutzen gedenken.

Sei nun $z = f(x, y)$ eine von $x = a$ bis $x = b$ und $y = g$ bis $y = h$ continuirliche und einwerthige Function der Variabeln $x$ und $y$.**) Zwischen die Grenzwerthe $a$, $b$ von $x$ wollen wir $n - 1$ Glieder $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ einschalten, die ebenso auf einander folgen sollen wie $b$ auf $a$. In ganz ähnlicher Weise schieben wir zwischen $g$ und $h$ die $m - 1$ Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ ein. Bilden wir nun das Product

$$f(x_\nu, y_\mu) \cdot (x_{\nu+1} - x_\nu)(y_{\mu+1} - y_\mu),$$

wählen in demselben für $\nu$ alle ganzen Zahlen von 0 bis $n$—1 und ebenso für $\mu$ die ganzen Zahlen 0, 1, 2, ..., $m$—1***), und addiren wir endlich die hierdurch erzielten Glieder, so entsteht die Doppelsumme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} f(x_\nu, y_\mu) \cdot (x_{\nu+1} - x_\nu)(y_{\mu+1} - y_\mu),$$

*) Diese Bedingung liegt, wenn auch nicht ausdrücklich erwähnt, doch augenscheinlich der frühern Erörterung zu Grunde.

**) Die Definition einwerthiger und continuirlicher Functionen mehrer Veränderlichen ist bekanntlich den in §. 1. gegebenen Erklärungen ganz ähnlich.

***) Hiernach ist, wie augenscheinlich erhellt,

$$x_0 = a,\ x_n = b,\ y_0 = g,\ y_m = h.$$

welche bei ohne Aufhören wachsendem $n$ und $m$ in das Doppelintegral

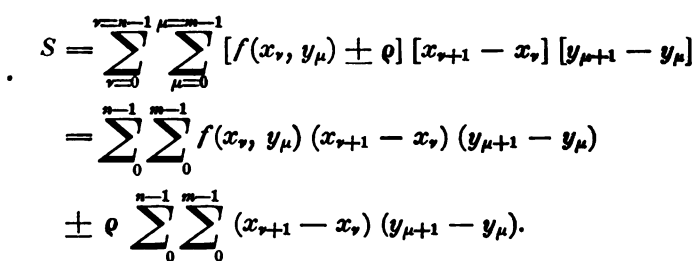
$$\int_a^b \int_g^h f(x, y)\, dx\, dy$$

übergeht.

In der That, die Function $z = f(x, y)$ lässt sich bei Voraussetzung eines orthogonalen Coordinatensystemes als der Abstand irgend eines Punktes einer krummen Fläche von der $yx$-Ebene ansehen, und $x, y$ als die Entfernungen der Projection jenes Punktes von den Achsen $OX$ und $OY$. Denken wir uns alsdann durch die in den Achsen $OX$ und $OY$ befindlichen Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ Ebenen parallel mit den Ebenen $XOZ$ und $YOZ$ geführt, so wird der von der Oberfläche $z = f(x, y)$, der $yx$-Ebene und den durch die Punkte $x = a$, $x = b$ und $y = g$, $y = h$ zu den Ebenen $XOZ$, $YOZ$ parallel gelegten Ebenen begrenzte Raum $V$ ersichtlich in $mn$ prismatisch geformte Körper zerschnitten, deren in der $yx$-Ebene belegene Basis ein Rechteck, dessen Deckfläche ein krummlinig begrenztes Viereck bildet und die bei fortwährendem Häufen der Zwischenglieder dem Geiste der Infinitesimalrechnung gemäss als wirkliche Elementarprismen betrachtet werden können. Die erste Theilung wollen wir uns ferner schon so weit gediehen vorstellen, dass in jedem der vorkommenden Theilintervalle die Function $z = f(x, y)$ um die beliebig klein gewählte Grösse $\varrho$ sich nicht mehr zu ändern vermag; alsdann wird offenbar der Werth von $z = f(x_\nu, y_\mu)$, wo allmählich $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ und $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ zu setzen ist, zwischen $f(x_\nu, y_\mu) + \varrho$ und $f(x_\nu, y_\mu) - \varrho$, demnach der Inhalt jedes der prismatischen Körper zwischen

$$[f(x_\nu, y_\mu) \pm \varrho]\, [x_{\nu+1} - x_\nu]\, [y_{\mu+1} - y_\mu]$$

sich befinden müssen, wenn man sowohl durch den Endpunkt der Coordinate $z = f(x_\nu, y_\mu)$, als auch oberhalb und unterhalb derselben in der Entfernung $\varrho$ mit der Projectionsebene $yx$ parallele Ebenen construirt. Das ganze Volumen $V$ liegt daher zwischen



$$S = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} [f(x_\nu, y_\mu) \pm \varrho] [x_{\nu+1} - x_\nu] [y_{\mu+1} - y_\mu]$$

$$= \sum_0^{n-1} \sum_0^{m-1} f(x_\nu, y_\mu) (x_{\nu+1} - x_\nu) (y_{\mu+1} - y_\mu)$$

$$\pm \varrho \sum_0^{n-1} \sum_0^{m-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) (y_{\mu+1} - y_\mu).$$

Bei ohne Aufhören fortgesetztem Legen von Zwischengliedern aber geht $\sum_0^{n-1} \sum_0^{m-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) (y_{\mu+1} - y_\mu)$ augenscheinlich in $(b - a)(h - g)$ über, und $\varrho$ kann kleiner gewählt werden, als jede noch so kleine Grösse. Für $n = \infty$ und $m = \infty$ fallen daher beide Werthe von $S$ zusammen und folglich wird $V$ mit

$$\int_a^b \int_g^h f(x, y)\, dx\, dy = \lim \sum_0^{n-1} \sum_0^{m-1} f(x_\nu, y_\mu) (x_{\nu+1} - x_\nu) (y_{\mu+1} - y_\mu)$$

identisch, eine Beziehung, die man geradezu als Definitionsgleichung eines bestimmten Doppelintegrales auffassen kann.

## §. 143.

### Neue Begründung des Theoremes von der Vertauschung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen.

Gestützt auf die soeben gewonnene Relation lässt sich mit der grössten Leichtigkeit das wichtige Theorem von der Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen mit constanten Grenzen von neuem begründen. Denn offenbar kann die Berechnung der obigen Doppelsumme in zweifacher Weise geschehen. Man kann nämlich zunächst alle Glieder vereinigen, welche demselben $x$ entsprechen, also nach $y$ integriren. Der Grenzwerth, welchen man alsdann für $m = \infty$ erhält, wird durch das einfache Integral

$$\int_g^h f(x, y)\, dy$$

ausgedrückt. Da nun dasselbe mit $x_{\nu+1} - x_\nu$ multiplicirt und $\nu$ hierin allmählich allen ganzen Zahlen von 0 bis $n - 1$

gleichzusetzen ist, so ergiebt sich durch Summation aller Einzelresultate für $n = \infty$ das Doppelintegral

$$\int_a^b dx \int_g^h f(x, y)\, dy$$

als Grenzwerth der Doppelsumme.

Vereinigt man dagegen vorerst alle die Glieder, in welchen $y$ constant bleibt und summirt darauf den mit der Differenz $y_{\mu+1} - y_\mu$ multiplicirten Grenzwerth

$$\int_a^b dx\, f(x, y)$$

von $\mu = 0$ bis $\mu = m - 1$, so entspringt für $m = \infty$ das Doppelintegral

$$\int_g^h dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Nun besteht aber, wie klein die Differenzen $x_{\nu+1} - x_\nu$ und $y_{\mu+1} - y_\mu$ auch werden mögen, immer die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} f(x_\nu, y_\mu)\, (y_{\mu+1} - y_\mu)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} (y_{\mu+1} - y_\mu) \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} f(x_\nu, y_\mu)\, (x_{\nu+1} - x_\nu),$$

mithin findet auch die Beziehung Statt

$$\int_a^b dx \int_g^h f(x, y)\, dy = \int_g^h dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Die angegebene Definitionsgleichung eines bestimmten Doppelintegrales mit constanten Grenzen verliert natürlich ihre Geltung, wenn die Function $f(x, y)$ innerhalb der Integrationsintervalle durch das Unendliche schreitet, oder wenn die Grenzen ohne Ende wachsen. Die in einem Falle dieser Art anzuwendenden Gedankenoperationen sind indess nach den früher gegebenen Lehren als selbstverständlich anzusehen. Würde z. B. die Function an einer bestimmten Stelle eine unendliche Discontinuität erleiden, so hätte man diese Stelle von der Betrachtung vorerst auszuschliessen. Die beiden übrigbleibenden Theile des Doppelintegrales würden alsdann, wenn weitere Abweichungen von dem oben erörterten Falle nicht vorkämen, einen völlig bestimmten Sinn besitzen. Und

convergirten nun bei fortwährender Annäherung an jene kritische Stelle die so eben erwähnten Integrale gegen bestimmte Grenzen, so würde auch das vorgelegte Doppelintegral nicht ohne Bedeutung sein.

## §. 144.

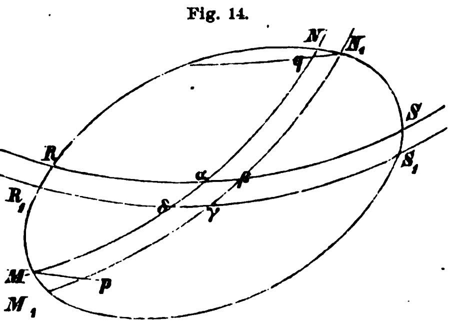
### Allgemeinere Auffassung der vorigen Betrachtungen.

Bei der vorhin gegebenen Deutung eines bestimmten Doppelintegrales dachten wir uns den durch dasselbe dargestellten körperlichen Raum $V$ nur nach einer Seite von der krummen Fläche $z = f(x, y)$ begrenzt. Offenbar aber können wir uns ebenfalls die den Raum $V$ begrenzende $yx$-Ebene durch eine von jeder zur $z$-Achse parallelen Geraden nur in einem Punkte geschnittene krumme Fläche ersetzt denken. Sogar die Annahme wollen wir der Kürze halber machen, dass beide Begrenzungsflächen durch eine einzige Gleichung $z = f(x, y)$ dargestellt werden; alsdann repräsentirt $z = f(x, y)$ ersichtlich eine solche gekrümmte Oberfläche, welche von jeder zur $z$-Achse parallelen Geraden in nicht mehr als zwei Punkten $z = z_0$ und $z = Z$ geschnitten wird. Dieser Voraussetzung dürfen wir immer folgen, weil jeder andere Fall — wie unmittelbar einleuchtet — durch passende Zerlegung des Volumens $V$ auf den angezeigten zurückgeführt werden kann.

Denken wir uns jetzt das zu berechende Volumen $V$ auf die $yx$-Ebene projicirt und die erhaltene Projection $P$, die wir aber wie vorhin keineswegs als Rechteck voraussetzen, in irgend einer Weise, also allgemein durch irgend zwei Systeme von Curven, deren jedes natürlich behufs Unterscheidung der Curvenindividuen einen variabeln Parameter enthalten muss, in Elemente zerlegt. Der Flächenraum $P$ werde z. B. einerseits durch unendlich nahe liegende Curven $M\,N$ und $M_1\,N_1$ in Streifen $M\,M_1\,N_1\,N$, andererseits durch je zwei Nachbarcurven $R\,S$ und $R_1\,S_1$ in unendlich dünne Streifen $R\,S\,S_1\,R_1$ zerschnitten; alsdann entstehen krummlinige Vierecke $\omega = \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ und unter Umständen Elemente $\omega'$ — z. B. $q\,N_1\,N$ und $M\,M_1\,p$ —, deren Gestalt von der des Viereckes mehr oder weniger abweicht. Der ganze Flächenraum $P$ wird mithin

durch die Summe $\Sigma\omega + \Sigma\omega'$ dargestellt. Bedenkt man nun, dass jedes der Elemente $\omega'$ gegen das Differential des den Curven $MN$ und $M_1 N_1$ entsprechenden Parameters verschwindet und dass der zwischen den Curven $M\ N$ und $M_1 N_1$ befindliche Streifen ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ausdrückt; so wird einem bekannten Princip der Infinitesimalrechnung zufolge*) die Summe $\Sigma\omega'$ bei dem ins Unendliche fortgesetzten Processe der Elementenbildung sich der Grenze Null nähern und folglich $P$ bloss als die Summe der Elemente $\omega$ erscheinen. Mit andern Worten aber heisst dies

Fig. 14.



$$P = \lim \Sigma\omega;$$

selbst hierin können jenem oben angedeuteten Principe gemäss alle gegen $\omega$ unendlich kleinen Grössen vernachlässigt werden.

Ueber jedem Elemente $\omega$ und $\omega'$ wollen wir uns nun Cylinder construirt denken, deren Mantellinien der $z$-Achse parallel laufen. Durch diese Cylinder wird augenscheinlich das Volumen $V$ in Elemente zerlegt, deren Inhalte wir beziehungsweise durch die Grössen $\omega(Z-z_0+\varepsilon)$ und $\omega'(Z'-z_0'+\varepsilon')$ darstellen können, wenn $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ unendlich klein werdende Grössen bezeichnen. Werden mithin sämmtliche so erzielten Elemente vereinigt, so entspringt

*) Dieses Princip lässt sich in folgender Weise aussprechen.

Seien $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ unendlich kleine Grössen, deren Anzahl $n$ unbestimmt wächst und deren Summe $C$ bei fortgesetztem Wachsen von $n$ einer endlichen Grenze zustrebt, ferner bedeuten $a, a_1, \ldots$ andere unendlich kleine Grössen, von denen die numerisch grösste $\varepsilon$ heissen möge; so hat man, abgesehen vom Zeichen,

$$a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots < \varepsilon C,$$

folglich

$$\lim (a\alpha + a_1\alpha_1 + \ldots + a_{n-1}\alpha_{n-1}) = 0, \lim n = \infty.$$

$$V = \Sigma\,\omega\,(Z - z_0 + \varepsilon) + \Sigma\,\omega'\,(Z' - z_0' + \varepsilon').$$

Daraus aber folgt, weil nicht bloss $\lim \Sigma\,\omega' = 0$, sondern auch $\lim \Sigma\,\omega\,\varepsilon = 0$ ist,

$$\lim \Sigma\omega'\,(Z' - z_0' + \varepsilon') = 0 \text{ und } V = \lim \Sigma\,\omega\,(Z - z_0).$$

## §. 145.

### Benutzung rechtwinkliger Parallelcoordinaten.

Nehmen wir jetzt an, dass der Flächenraum $P$ durch zwei Systeme mit den Achsen $OX$ und $OY$ paralleler Geraden in Elemente zerschnitten wird, so hat man $\omega = \Delta x\,\Delta y$ und $V = \lim\,(Z - z_0)\,\Delta x\,\Delta y$.

Die Berechnung dieser Doppelsumme lässt sich offenbar wieder in zweifacher Weise bewerkstelligen. Vereinigt man z. B. zunächst alle Glieder, welche dasselbe $x$ enthalten und nennt $y_0$ und $Y$ die Werthe parallel der $y$-Achse, welche irgend einem der $x$ entsprechen, wobei ersichtlich die Annahme gemacht ist, dass keine dieser Parallelen den Umriss von $P$ in mehr als zwei Punkten schneidet, so wird der resultirende Grenzwerth offenbar durch das einfache Integral

$$\Delta x \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\,dy$$

vorgestellt. Die Summe aller dieser Theile aber wird nun, wenn $x = x_0$ und $x = X$ die Punkte der $x$-Achse bezeichnen, durch welche die das Volumen $V$ begrenzenden, mit der $yx$-Ebene parallelen Ebenen zu construiren sind, zu dem Doppelintegrale

$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\,dy.$$

Summirt man dagegen in der Weise, dass man zunächst $y$ und $\Delta y$ als constant ansieht, und nennt man nun die zu irgend einem $y$ gehörigen Abscissen $x_0'$ und $X'$, wobei augenscheinlich ebenfalls wieder vorausgesetzt ist, dass der Umriss von $P$ auch durch die der $x$-Achse parallelen Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten werden kann; so erhält man das Integral

$$dy \int_{x_0'}^{X'} (Z - z_0)\,dx.$$

Und heissen nun $y_0'$ und $Y'$ die Werthe von $y$, welche parallel der $y$-Achse die Grenzen des Contours von $P$ bestimmen, so wird das Ergebniss der nach $y$ zu vollziehenden Summation durch das Doppelintegral

$$V = \int_{y_0'}^{Y'} dy \int_{x_0'}^{X'} (Z - z_0)\, dx$$

ausgedrückt.

Bildet ein Rechteck die Begrenzung von $P$, so fallen ersichtlich die Werthe $x_0$, $X$ und $y_0$, $Y$ beziehungsweise mit den Grössen $x_0'$, $X'$ und $y_0'$, $Y'$ zusammen, und man hat nun wieder das bekannte Theorem von der Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen mit constanten Grenzen.

## §. 146.

### Bestimmung des ganzen von einer krummen Fläche eingeschlossenen Raumes.

Soll das ganze Volumen des von der Oberfläche $z=f(x, y)$ oder $F(x, y, z)=0$ eingeschlossenen Raumes ermittelt werden, so braucht man nur den projicirenden Cylinder zu construiren. Der Durchschnitt desselben mit der $yx$-Ebene liefert alsdann die oben bezeichnete Fläche $P$. Alle Punkte der Oberfläche $F(x, y, z) = 0$, in denen die Berührungsebene eine zur Projectionsebene senkrechte Lage annimmt, genügen der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, und die Elimination von $z$ zwischen dieser Beziehung und der andern $F(x, y, z)=0$ liefert die Gleichung $\varphi(x, y)=0$ für den Umriss von $P$. Die Auflösung dieser Relation nach $y$ lehrt uns dann die Werthe $y = y_0$ und $y = Y$ kennen. Die auf $x$ bezüglichen Integrationsgrenzen hingegen bestimmen sich sofort vermöge der Bemerkung, dass in den ihnen entsprechenden Punkten der Oberfläche die berührenden Ebenen parallel mit der $yz$-Ebene laufen, dass mithin die Coordinaten dieser Punkte die drei Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

befriedigen müssen.

## §. 147.

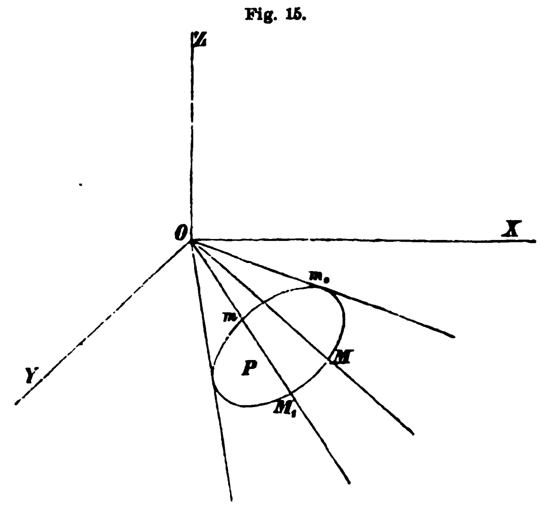
### Anwendung der Polarcoordinaten.

Denken wir uns die Fläche $P$ durch ein System von Kreisen, deren Mittelpunkt im Ursprunge des orthogonalen Coordinatensystemes sich befindet und durch ein von diesem Punkte ausgehendes System gerader Linien in Elemente zerlegt; so wird für das Element $\omega$ offenbar hier der Ausdruck $\frac{1}{2}[(\varrho + \varDelta\varrho)^2 - \varrho^2]\varDelta\vartheta$ gelten, wenn $\varrho$ den veränderlichen Radiusvector und $\vartheta$ die variabele Amplitude des Polarcoordinatensystemes, d. h. den Winkel zwischen $\varrho$ und der positiven $x$-Achse bezeichnet. Der vorstehende Ausdruck lässt sich indess durch den einfachern $\varrho\varDelta\varrho\varDelta\vartheta$ ersetzen, weil $\omega$ ein wirkliches Element sein soll, und daher erhält man

$$V = \lim \Sigma(Z - z_0)\,\varrho\varDelta\varrho\varDelta\vartheta.$$

Die Berechnung dieser Doppelsumme geschieht — wie ohne Mühe sofort erhellt — am einfachsten, wenn man mit der Vereinigung aller Elemente, die demselben $\vartheta$ entsprechen,

Fig. 15.




beginnt. Nimmt man dabei vorerst an, dass der Ursprung des Coordinatensystemes ausserhalb der Fläche $P$ sich befindet, dass jeder Radiusvector dem Umrisse derselben höchstens in zwei Punkten begegnet und nennt $r_0$ und $R$ die Grenzen, zwischen denen $\varrho$ sich bewegt; so stellt offenbar

$$d\vartheta \int_{r_0}^{R} \varrho (Z - z_0)\, d\varrho$$

den sich ergebenden Grenzwerth vor, also den Inhalt des Volumenelementes, dessen Projection auf die $yx$-Ebene das Stück $m_0 M M_1 m$ der Fläche $P$ ist, welches von den unter den Winkeln $\vartheta$ und $\vartheta + \Delta\vartheta$ gegen die $x$-Achse geneigten Radienvectoren $OM$ und $OM_1$ begrenzt wird. Die Summation aller Elementarcylinder $d\vartheta \int_{r_0}^{R} \varrho (Z - z_0)\, d\varrho$ aber führt schliesslich zu der Beziehung

$$V = \int_{\vartheta_0}^{\Theta} d\vartheta \int_{r_0}^{R} (Z - z_0)\, \varrho\, d\varrho,$$

wo $\vartheta_0$ und $\Theta$ die äussersten Werthe von $\vartheta$ bedeuten, für welche es noch Punkte auf dem Contour von $P$ giebt.

Liegt dagegen der Ursprung des orthogonalen Coordinatensystemes innerhalb des Flächenraumes $P$, so wird die erste Integration von $\varrho = 0$ bis $\varrho = R$ und die zweite von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 2\pi$ sich erstrecken und folglich nunmehr

$$V = \int_{0}^{2\pi} d\vartheta \int_{0}^{R} \varrho (Z - z_0)\, d\varrho$$

sein.

## §. 148.

### Erläuterung der vorhergehenden Betrachtungen durch einige Beispiele.

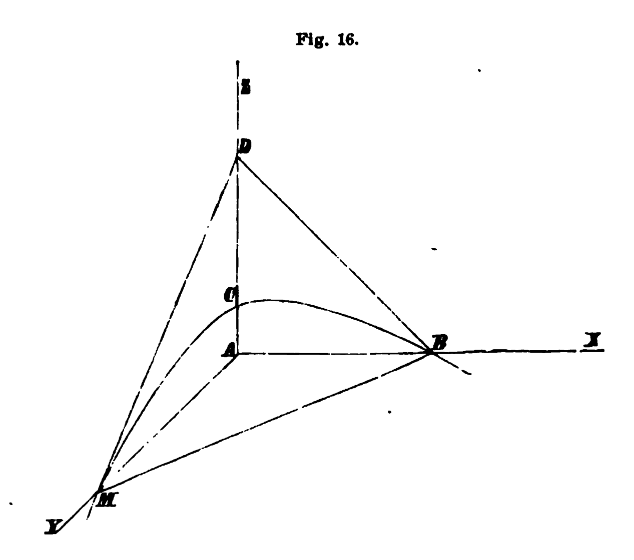
Des bessern Verständnisses wegen wollen wir die vorausgegangenen Entwicklungen durch einige Beispiele näher erläutern. Wir beginnen zu dem Behufe mit folgender Aufgabe.

I. Der zwischen den positiven Seiten dreier auf einander senkrecht stehenden Coordinatenebenen befindliche, von der $yx$-Ebene, einem hyperbolischen Paraboloid $xy = az$, wo $a$ constant ist und einer Ebene $x + y + z = a$ begrenzte Raum soll seinem cubischen Inhalte nach bestimmt werden.

Da das Paraboloid durch die Achsen der $x$ und $y$ geht und die Ebene $x + y + z - a = 0$ die Projectionsebene $z = 0$ in der Geraden $MB$, deren Gleichung $y + x - a = 0$ heisst, schneidet; so wird hier augenscheinlich die Fläche $P$

durch das rechtwinklige Dreieck $MAB$ vorgestellt. Und weil ferner die $yx$-Ebene zu den Begrenzungsflächen gehört, so ist $z_0 = 0$. Den andern Werth $z = Z$ hingegen hat man theils aus der Gleichung $x + y + z - a = 0$, theils aus der Gleichung

Fig. 16.




des Paraboloides $xy = az$ zu entlehnen, je nachdem nämlich der aus der ersten oder letzten jener beiden Relationen sich ergebende Werth von $Z$ der kleinere ist. Endlich lehrt schon der oberflächlichste Blick auf die vorstehenden Beziehungen, dass es hier völlig gleichgültig ist, nach welcher der Veränderlichen wir zuerst integriren. Beginnen wir also z. B. mit der Integration nach $y$, so wird, weil alsdann $y_0 = 0$, $Y = a - x$ ist, $V$ ersichtlich durch das Doppelintegral

$$V = \int_0^a dx \int_0^{a-x} Z\, dy$$

ausgedrückt. Nun ist aber einerseits $Z = \frac{xy}{a}$, so lange nämlich $\frac{xy}{a} < a - x - y$, d. h. so lange $y < \frac{a(a-x)}{a+x}$, und anderseits $Z = a - x - y$ für alle Werthe von $y$, welche der Ungleichheit $\frac{xy}{a} > a - x - y$, d. h. $y > \frac{a(a-x)}{a+x}$ genügen. Man hat daher die Beziehung

$$\int_0^{a-x} Z\,dy = \int_0^{\frac{a(a-x)}{a+x}} \frac{xy}{a}\,dy + \int_{\frac{a(a-x)}{a+x}}^{a-x} (a-x-y)\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{ax}{(a+x)^2} + \frac{x}{a+x} - \frac{x^2+2ax}{2(a+x)^2}\right](a-x)^2 = \frac{x(a-x)^2}{2(a+x)}\text{*)},$$

und demnach findet schliesslich die Gleichung Statt:

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{x(a-x)^2}{a+x}dx = \frac{1}{2}\left[a^2x - a(x-a)^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} + a^2x - 4a^3 \lg(a+x)\right]_0^a$$

$$= \left(\frac{17}{12} - \lg 4\right) a^3.$$

II. Um den Mittelpunkt $M$ eines rechtwinkligen Achsensystemes wollen wir uns mit dem Halbmesser $R$ eine Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ construirt, dieselbe alsdann von einem Cylinder $y^2 + x^2 - Rx = 0$ durchschnitten denken und nun das von der $yx$-Ebene und jener Kugelfläche begrenzte, in dem Cylinder befindliche Volumen $V$ zu ermitteln suchen.

Nehmen wir an, dass die Fläche $P$, welche hier augenscheinlich mit der Basis des Cylinders identisch ist, durch die Polarcoordinaten $\varrho$, $\vartheta$, deren Pol in $M$ liegt, in Elemente zerschnitten wird, und beachten wir, dass man behufs der Berechnung von $V$ wegen der hier herrschenden Symmetrie den Bogen $\vartheta$ nur von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu wählen und schliesslich das so erhaltene Resultat bloss zu verdoppeln braucht: so wird $V$ offenbar durch das Doppelintegral

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{R\cos\vartheta} \sqrt{R^2-\varrho^2}\,\varrho\,d\varrho$$

dargestellt, weil durch Einführung der Coordinaten $\varrho$, $\vartheta$ statt $x$, $y$ der Umriss von $P$ durch die Gleichung $\varrho - R\cos\vartheta = 0$, die Kugelfläche dagegen durch die Beziehung $z^2 = R^2 - \varrho^2$ charakterisirt wird. Aber

*) Diesen Werth hätte man ohne Integration finden können, wenn man sofort das zu berechnende Volumen durch Ebenen parallel mit der $yz$-Ebene in unendlich dünne dreiseitige Schichten zerschnitten hätte. Vergl. Serret. Cours de calcul intégral, page 278.

$$2\int \varrho\, d\varrho \sqrt{R^2-\varrho^2} = -\int (R^2-\varrho^2)^{\frac{1}{2}}\, d(R^2-\varrho^2)$$

$$= -\frac{2(R^2-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{const.},$$

also

$$2\int_0^{R\cos\vartheta} \varrho\, d\varrho \sqrt{R^2-\varrho^2} = \tfrac{2}{3} R^3 - \tfrac{2}{3} R^3 \sin\vartheta^3$$

und demnach

$$V = \tfrac{2}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\vartheta^3)\, d\vartheta = \tfrac{2}{3} R^3\pi - \tfrac{4}{9} R^3,$$

weil

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta^3 d\vartheta = \tfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta)\, d\vartheta = \tfrac{1}{4}\left[\frac{\cos 3\vartheta}{3} - 3\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{2}{3}.$$

Wie man sieht, ergiebt sich hieraus ohne weitere Rechnung, dass der Inhalt des von der ganzen Kugelfläche umschlossenen Cylinderraumes mit $\frac{4}{3} R^3\pi - \frac{8}{9} R^3$ gleichbedeutend ist, dass also die Halbkugel einen um $\frac{8}{9} R^3$ grössern Inhalt besitzt, als das genannte Cylindervolumen.

III. Als eine letzte Anwendung der vorhergehenden Theorie wollen wir nach Poisson's Vorgange*) die Werthermittlung des schon öfter betrachteten Integrales

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

das bekanntlich mit $\sqrt{\pi}$ identisch ist, wählen.

Denken wir uns nämlich die durch die Gleichung $z = e^{-x^2}$ dargestellte Curve um die $z$-Achse gedreht, so beschreibt dieselbe eine krumme Fläche, deren Gleichung $z = e^{-x^2-y^2}$ lautet. Der von dieser Rotationsfläche und der $yx$ Ebene begrenzte Raum wird daher dargestellt durch das Doppelintegral

$$V = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

Setzt man nun der bessern Einsicht halber voraus, dass dieses Volumen vorerst durch einen Cylinder $x^2 + y^2 = \varrho^2$ begrenzt

---

*) Analytische Mechanik §. 512.

sei, so wird die Projection $P$ dieses Volumentheiles mit der Basis jenes Cylinders zusammenfallen und folglich durch das Integral

$$\int_0^{\varrho} e^{-\varrho^2}\varrho\, d\varrho,$$

also das zu ermittelnde Volumen $V$ durch das Integral

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} e^{-\varrho^2}\varrho\, d\varrho = \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2}\, e^{-\varrho^2}\right]_0^{\infty} d\vartheta = \pi$$

ausgedrückt. Weil aber $x$ und $y$ völlig unabhängig von einander sind, so lässt sich $V$ auch in folgender Gestalt schreiben

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \,.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \alpha^2,$$

und daher wird $\alpha = \sqrt{\pi}$.

### Inhaltsberechnung gekrümmter Flächen mittelst Doppelintegrale.

### §. 149.

**Allgemeine Theorie.**

Wenn man den Inhalt einer irgendwie begrenzten Oberfläche in Zahlen auszuwerthen gedenkt, so hat man vor allen Dingen über den Sinn und die Bedeutung eines derartigen Beginnens sich Rechenschaft zu geben, indem von einer unmittelbaren Uebertragung der bei der Quadratur ebener Flächen geltenden Grundvorstellungen auf krumme Flächen nicht wohl die Rede sein kann. Nöthig also ist es vor allem, sich zunächst einen genauen Begriff von dem zu bilden, was man Inhalt einer krummen Fläche nennt. Dazu gelangen wir in der strengsten und elegantesten Weise, wenn wir mit Serret folgende Betrachtung anstellen*).

Wir denken uns die gegebene Oberfläche auf ein rechtwinkliges Achsensystem bezogen und setzen voraus, dass dieselbe durch einen Contour $C$ begrenzt sei, eine Annahme, die offenbar immer erlaubt ist, weil für den Fall der Inhalts-

*) Calcul intégral, page 295.

stückes $P$ construiren können, rechtwinklig
ebene steht. Auch diese Annahme ist immer
entgegengesetzten Falle die Fläche $P$ nur al
von Theilen aufgefasst zu werden braucht
der gestellten Forderung genügt. Heisst n
von $C$, so wird die von ihr in der $yx$-Eb
die Projection von $P$ bilden. In diese le
ein Sehnenvieleck mit unendlich kleinen
und dieses wiederum in unendlich viele
deren Seiten sämmtlich unendlich kle
was offenbar auf die verschiedenste V
struiren wir alsdann über jeder I
dessen Kanten der $z$-Achse parallel
darauf ihre Durchschnitte mit d
wird augenscheinlich eine poly
welche von der dem Contour $C$ ... dem
Linie begrenzt wird, deren Pr
dem Perimeter des Sehnenvie
wir nun $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ die V
des Polyeders $\Pi$ mit der Proje

$$\Pi = \frac{\omega}{\cos\vartheta} + \frac{\omega_1}{\cos\vartheta_1} \ldots$$

Die Grösse $\Pi$ aber lässt ... llelcoordinaten.
drücken. Construirt man ... ung der auf ein recht
Scheiteln der Dreiecke ... Nenfläche, und setzt man
$P$ und nennt $\varphi, \varphi_1, \ldots$
jectionsebene, so darf

$$\frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{1}{\cos\varphi} (1 \ldots$$

... Geometrie des Raumes
... durch die Gleichung

wenn jedes $\varepsilon$ ein
Daraus aber ...

$$\Pi = \sum \frac{\omega}{\cos \varphi} + \sum \frac{\omega \varepsilon}{\cos \varphi}.$$

Nun sind $z$ und $\cos \varphi$ Functionen der Veränderlichen $x$ und $y$; die Gleichung $Z = \frac{1}{\cos \varphi}$ wird daher eine krumme Fläche repräsentiren, welche mit der $yx$-Ebene und der zu ihr senkrechten Cylinderfläche, deren Leitlinie $C'$ heisst, ein Volumen $V$ bestimmt, für welches nach §. 144. die Beziehung

$$V = \lim \Sigma Z \omega = \lim \Sigma \frac{\omega}{\cos \varphi}$$

gilt. Setzt man mithin den im Obigen näher charakterisirten Process der Zerlegung unserer Fläche $P$ in Elemente ohne Aufhören fort, so nähert sich der erste Theil von $\Pi$ seinem Werthe nach der Grenze $V$ und daher muss dem bekannten, in §. 144. erwähnten Fundamentalprincipe der Infinitesimalrechnung gemäss $\lim \sum \frac{\omega \varepsilon}{\cos \varphi} = 0$, also $\lim \Pi = V$, d. h. $P = V$ sein.

Da die Grenze $V$ bekanntlich von der besondern Gestalt der Flächenelemente $\omega$ völlig unabhängig ist, so muss Gleiches natürlich auch von $P$ gelten. Man hat daher, in welcher Weise auch immer die von $C'$ begrenzte Fläche in Elemente zerlegt werden mag, stets die Relation

$$P = \lim \sum \frac{\omega}{\cos \varphi}.$$

Diese Gleichung existirt selbst dann noch, wenn für einige isolirten Punkte des Contours $C$ die in denselben zu construirenden Tangentialebenen eine zur Projectionsebene winkelrechte Lage annehmen. Denn wählt man einen dem $C$ unendlich benachbarten Contour $C_0$, für welchen die obigen Bedingungen befriedigt werden und nennt nun $P_0$ die von $C_0$ begrenzte Fläche, sowie $V_0$ jenes Volumen, welches von $P_0$, der Projection von $P_0$ auf die $xy$-Ebene und dem zu $C_0$ gehörigen projicirenden Cylinder umschlossen wird; so hat man $P_0 = V_0$. Nun nähert sich, wenn $C_0$ der Grenze $C$ zustrebt, $V_0$ dem $V$, und $P_0$ besitzt $P$ zur Grenze; die Gleichung $P = \lim \sum \frac{\omega}{\cos \varphi}$ muss daher auch für den Grenzfall noch in Kraft bleiben.

Mit der grössten Leichtigkeit endlich lässt sich aus der für $P$ gefundenen Relation die Grösse für das Element $d\sigma$

der Fläche $P$ herleiten. Sind nämlich $\psi_0$ und $\psi$ beziehungsweise der grösste und kleinste Werth des veränderlichen Winkels $\varphi$ innerhalb des Umrisses $C$, so liegt offenbar der Werth von $\sum \frac{\omega}{\cos\varphi}$ zwischen $\frac{1}{\cos\psi_0} \sum \omega$ und $\frac{1}{\cos\psi} \sum \omega$. Bezeichnet folglich $\psi'$ einen zwischen $\psi_0$ und $\psi$ befindlichen Winkel und $A$ den Inhalt der von $C'$ begrenzten Projection der Fläche $P$, so hat man die Beziehung

$$P = \frac{1}{\cos\psi'}\lim \sum \omega = \frac{A}{\cos\psi'}.$$

Nimmt man nun an, dass $C$, also auch $A$ unendlich klein wird, so muss natürlich auch $P$ von Null um weniger als jede noch so kleine Grösse verschieden sein, d. h.

$$d\sigma = \frac{\omega}{\cos\psi'}.$$

Und heisst jetzt wieder $\varphi$ der Winkel, den die in irgend einem Punkte des Elementes $d\sigma$ construirte Berührungsebene mit der $yx$-Ebene bildet, so wird man ersichtlich die Gleichung bilden können

$$\frac{1}{\cos\psi'} = \frac{1}{\cos\varphi}(1 + \delta),$$

in der $\delta$ eine unendlich kleine Grösse bedeutet, und demnach ist

$$d\sigma = \frac{\omega}{\cos\varphi}(1 + \delta).$$

## §. 150.

### Anwendung rechtwinkliger Parallelcoordinaten.

Heisst $z = f(x, y)$ die Gleichung der auf ein rechtwinkliges Achsensystem bezogenen Oberfläche, und setzt man — wie üblich — um der Kürze willen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q;$$

so wird den Lehren der analytischen Geometrie des Raumes zufolge der oben erwähnte Winkel $\varphi$ durch die Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

definirt. Der Inhalt eines irgendwie begrenzten Stückes $P$ der Fläche $z = f(x, y)$ wird demnach dargestellt durch das Doppelintegral $\int d\sigma \sqrt{1 + p^2 + q^2}$. Dasselbe lässt sich offenbar auch hier in zweifacher Weise berechnen, indem man entweder mit der Integration nach $y$, oder nach $x$ beginnt.

Nehmen wir zunächst den ersten Fall, so folgt

$$P = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

wenn wir voraussetzen, dass jede der $y$-Achse parallele Gerade den Contour $C$ höchstens in zwei Punkten schneidet und alsdann den Anfangs- und Endwerth des zu irgend einem der in Frage kommenden $x$ gehörenden $y$ bezüglich $y_0$ und $Y$, sowie $x_0$ und $X$ die Grenzwerthe von $x$ nennen.

Wird dagegen zuerst nach $x$ integrirt, so erhält man die Gleichung

$$P = \int_{y_0'}^{Y'} dy \int_{x_0'}^{X'} dx \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Die Constanten $y_0'$ und $Y_0'$ bedeuten dabei augenscheinlich die äussersten Werthe von $y$, für welche noch Punkte auf dem Contour $C$ sich befinden, und $x_0'$, $X'$ sind die zu irgend einem $y$ gehörenden Werthe von $x$. Auch hierbei ist ersichtlich wieder die leicht zu befriedigende Annahme gemacht, dass $C$ von jeder zur Achse der $x$ parallelen Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten wird.

## §. 151.

### Benutzung ebener Polarcoordinaten.

Für manche Untersuchungen ist es zweckmässiger die von $C$ begrenzte Fläche nicht wie vorhin durch Parallelcoordinaten, sondern durch ein System von Kreisen und geraden Linien in Elemente zu zerlegen. Sind daher jetzt $\varrho$ und $\vartheta$ bezüglich Radiusvector und Amplitude des Polarcoordinatensystems, dessen feste Gerade die $x$-Achse bildet und dessen Pol, der Mittelpunkt des orthogonalen Achsensystems, wir zunächst ausserhalb des Contours $C$ voraussetzen; so wird dem

Frühern zufolge das Flächenelement $\omega$ bekanntlich durch $\varrho\, d\varrho\, d\vartheta$ und daher $d\sigma$ durch $\frac{\varrho\, d\varrho\, d\vartheta}{\cos\varphi}$ dargestellt. Integrirt man nun zuvörderst nach $\varrho$, was — wie wir aus früher gepflogenen Untersuchungen wissen — hier am vortheilhaftesten ist; so wird

$$P = \int_{\vartheta_0}^{\Theta} d\vartheta \int_{\varrho_0}^{R} \frac{\varrho\, d\varrho}{\cos\varphi},$$

wenn nämlich jeder Fahrstrahl $\varrho$ dem Contour $C'$ in nicht mehr als zwei Punkten begegnet und nun für irgend ein $\vartheta$ die entsprechenden Werthe von $\varrho$ beziehungsweise $\varrho_0$ und $R$, die Grenzwerthe von $\vartheta$ dagegen $\vartheta_0$ und $\Theta$ genannt werden.

Einfacher wird diese Formel, wenn zwei Contouren, von denen der eine den andern umschliesst, die Projection des Flächenstückes $P$ begrenzen und gleichzeitig der Pol des Coordinatensystemes im Innern des kleineren Umrisses sich befindet; man hat nunmehr die Gleichung

$$P = \int_{0}^{2\pi} d\vartheta \int_{\varrho_0}^{R} \frac{\varrho\, d\varrho}{\cos\varphi}.$$

Und hieraus folgt wieder für den Fall, dass der kleinere Contour mit dem Pole des Coordinatensystemes zusammenfällt, die noch einfachere Relation

$$P = \int_{0}^{2\pi} d\vartheta \int_{0}^{R} \frac{\varrho\, d\varrho}{\cos\varphi}.$$

Die vollständige Erledigung der jetzigen Betrachtung erfordert also bloss noch die Darstellung von $\cos\varphi$ mittelst der partiellen Derivirten von $z$ nach $\varrho$ und $\vartheta$. Da nun $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$, folglich $z = f[\varrho\cos\vartheta,\ \varrho\sin\vartheta]$ ist, so müssen die Beziehungen Statt finden

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} = p\frac{\partial x}{\partial \varrho} + q\frac{\partial y}{\partial \varrho} = p\cos\vartheta + q\sin\vartheta$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = p\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + q\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \varrho\,[-p\sin\vartheta + q\cos\vartheta],$$

d. g.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2 = p^2 (\cos\vartheta^2 + \sin\vartheta^2) + q^2 (\cos\vartheta^2 + \sin\vartheta^2).$$

Und daher wird

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2},$$

demnach schliesslich mit Unterdrückung der Integrationsgrenzen, um sämmtliche oben erwähnten Einzelresultate in einer Formel zusammenfassen zu können,

$$P = \int\int d\vartheta\, d\varrho \sqrt{\varrho^2 + \varrho^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2}.$$

Zur Erläuterung des soeben Erörterten wollen wir den Flächeninhalt des Theiles der Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zu ermitteln suchen, welcher sich auf der $xy$-Ebene im Innern der Fläche projicirt, deren Umriss von der durch die Polargleichung

1. $$\varrho = \sqrt{\tfrac{4}{3}(1 - \operatorname{tg}\vartheta^2)}.$$

bestimmten Linie gebildet wird*).

Da die eben definirte Curve eine völlig symmetrische Lage gegen die $x$- und $y$-Achse besitzt, so brauchen wir bei unserer Betrachtung bloss denjenigen Theil des zu berechnenden Kugelflächenstückes zu berücksichtigen, dessen Projection in einen der Quadranten der $xy$-Ebene fällt. Und daher können wir bei der Integration nach $\vartheta$ diesen Bogen von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ wählen. Das auf $\varrho$ bezügliche Integrationsintervall hingegen umfasst die Werthe von $\varrho = 0$ bis $\varrho = 1$. Denn weil im vorliegenden Falle das Flächenelement $d\sigma = \frac{\varrho\, d\vartheta\, d\varrho}{\cos\varphi}$ den Werth $\frac{\varrho\, d\varrho\, d\vartheta}{\sqrt{1-\varrho^2}}$ besitzt, dieser Ausdruck aber nur reell bleibt, solange $\varrho^2 < 1$ ist; so sind offenbar jene Werthe $\varrho$ der Gleichung 1. für unser Problem ohne Bedeutung, welche den zwischen 0 und $\frac{\pi}{6}$ liegenden Bogen $\vartheta$ entsprechen. Für alle diese Winkel können daher nur 0 und der Kugelhalbmesser 1 die Grenzen der Integration nach $\varrho$

*) Man vergleiche hiermit die Polargleichung $\varrho^2 = a^2 \cos\vartheta^2 (1 - \operatorname{tg}\vartheta^2)$ der Lemniscate.

sein. Die den Bogen von $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ entsprechend Werthe $\varrho$ der Gleichung 1. dagegen liefern reelle Ausdrüc für $d\sigma$. In diesem letztern Falle bestimmen mithin $\varrho =$ und $\varrho = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \operatorname{tang}\vartheta^2)}$ das Integrationsintervall von Fassen wir nun dies Alles in einen Ausdruck zusammen, gewinnen wir die Beziehung

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\vartheta \int_0^1 \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}(1-\operatorname{tg}\vartheta^2)}} \varrho\, d\varrho \,.\, (1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}},$$

d. g. durch Ausführung der Rechnung

$$P = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\,\lg(1+\sqrt{2}) - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\lg[\sqrt{3}+\sqrt{2}].$$

Denn

$$\int_0^1 \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} = \Big[-\sqrt{1-\varrho^2}\Big]_0^1 = 1, \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}(1-\operatorname{tg}\vartheta^2)}} \varrho\, d\varrho (1-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}(3\operatorname{tg}\vartheta^2 -}$$

und

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \sqrt{\tfrac{3}{2}\operatorname{tg}\vartheta^2 - \tfrac{1}{2}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\cos\vartheta^2} - 1\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{tg}\vartheta^2 - \frac{1}{2}}}\, d\vartheta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{3}{2}\, d(\operatorname{tg}\vartheta)}{\sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{tg}\vartheta^2 - \frac{1}{2}}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{2\sin\vartheta^2 - \frac{1}{2}}}.$$

Mit Rücksicht auf die bekannte Formel

$$\int \frac{du}{\sqrt{\alpha + \gamma u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \lg[u\sqrt{\gamma} + \sqrt{\alpha + \gamma u^2}] + \text{const.}$$

aber erhält man

$$\frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\operatorname{tang}\vartheta}{\sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{tg}\vartheta^2 - \frac{1}{2}}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\Big\{\lg[\sqrt{\tfrac{3}{2}}\operatorname{tang}\vartheta + \sqrt{-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\operatorname{tang}\vartheta^2}]\Big\}_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\lg[\sqrt{3} + \sqrt{2}]$$

und

$$2. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin\vartheta)}{\sqrt{2\sin\vartheta^2 - \frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\left\{\lg\left[\sqrt{2}\,.\sin\vartheta + \sqrt{-\tfrac{1}{2} + 2\sin\vartheta^2}\right]\right\}_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}\,\lg\left[\sqrt{2}+1\right].$$

Nicht so einfach würde diese letztere Integralbestimmung sich gestaltet haben, wenn man das Integral mittelst der nahe liegenden Substitution $\sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{tg}\vartheta^2 - \frac{1}{2}} = u$ in die Form

$$\sqrt{3}\int_0^1 \frac{2u^2\,du}{(4+2u^2)\sqrt{1+2u^2}}$$

$$= \left[\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\lg(u\sqrt{2}+\sqrt{1+2u^2}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\lg\frac{u\sqrt{6}+2\sqrt{1+2u^2}}{u\sqrt{6}-2\sqrt{1+2u^2}}\right]_0^1$$

$$= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\lg(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - \sqrt{2}\,\lg(1+\sqrt{2})$$

umgesetzt hätte. Ausser der vorhin angewendeten Integralformel hätte man alsdann auch noch die andere

$$\int\frac{dx}{(a^2+b^2x^2)\sqrt{\alpha+\gamma x}} = \frac{1}{2a\sqrt{\gamma a^2-\alpha b^2}}\log\frac{x\sqrt{\gamma a^2-\alpha b^2}+a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}}{x\sqrt{\gamma a^2-\alpha b^2}-a\sqrt{\alpha+\gamma x^2}} + \text{const.}$$

berücksichtigen müssen.

## §. 152.

### Anwendung räumlicher Polarcoordinaten.

Die bisherigen Betrachtungen bedürfen noch insofern einer Vervollständigung, als wir mit einigen Worten auch jener Form gedenken müssen, unter der bei Benutzung räumlicher Polarcoordinaten das im Obigen gewonnene Oberflächenintegral erscheint.

Bekanntlich wird bei Zugrundelegung eines Polarcoordinatensystemes der genannten Art jeder Punkt des Raumes als der Durchschnitt dreier sich rechtwinklig schneidenden Flächen aufgefasst, von denen die eine eben ist, die beiden andern hingegen gekrümmt sind. Diese letztern werden repräsentirt durch eine aus dem Pol $O$ mit dem veränderlichen Halbmesser $\varrho$ beschriebene Kugelfläche und durch einen Rotations-

kegel, dessen Spitze im Pol liegt und dessen erzeugender Winkel $\vartheta$ der von dem Radiusvector $\varrho$ und der Polarachse $OX$ eingeschlossene Winkel ist. Die Ebene endlich wird dadurch charakterisirt, dass sie durch die Polarachse $OX$ gehen und mit der Polarebene den Winkel $\varphi$ bilden soll. Die Intervalle, innerhalb welcher die drei Veränderlichen $\varrho$, $\vartheta$ und $\varphi$ sich zu bewegen haben, um sämmtliche Punkte des unendlichen Raumes umfassen zu können, werden gewöhnlich in der Weise gewählt, dass $\varrho$ alle Werthe von Null bis $+\infty$, der Bogen $\vartheta$ die Werthe von 0 bis $\pi$ und der dem Winkel $\varphi$ entsprechende Bogen alle Werthe von 0 bis $2\pi$ anzunehmen hat.*)

Lässt man z. B. für einen durch die Coordinaten $\varrho, \vartheta, \varphi$ bestimmten Punkt $M$ die Variabeln $\vartheta$ und $\varphi$ beziehungsweise in $\vartheta + d\vartheta$, $\varphi + d\varphi$ übergehen, so wird durch den Durchschnitt der dem Halbmesser $\varrho$ entsprechenden Kugelfläche mit den beiden Ebenen und den beiden Kegelflächen das Element $\omega$ der Kugelfläche erzeugt, das als ebenes Rechteck angesehen und daher seinem Inhalte nach durch $\varrho^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$**) dargestellt werden kann. Die ganze Oberfläche $4\varrho^2\pi$ der Kugel wird folglich durch das Doppelintegral

$$\varrho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta$$

ausgedrückt.

Wird die Gleichung irgend einer Oberfläche in Polarcoordinaten gegeben, und bezeichnet alsdann $M$ irgend einen der Punkte dieser Oberfläche, welche durch das System der oben erwähnten Flächen bestimmt werden, so wird auf jener Oberfläche durch den Kegel, dessen Spitze im Pol sich befindet und dessen Basis das Element $\omega$ der mit dem Halbmesser $\varrho$ aus dem Pol durch $M$ construirten Kugelfläche bildet, ein Element $d\sigma$ erzeugt, dessen Orthogonalprojection auf die genannte Kugelfläche $\omega$ heisst. Da nun $\omega$ von der Projection unendlich wenig verschieden ist, welche auf der im Punkte $M$ construirten Tangentialebene der Kugelfläche erscheinen würde; so darf man offenbar die Relation bilden

*) Dieser letztere Bogen erhält ebenfalls das Intervall $(0, \pi)$, wenn $\varrho$ als algebraische Grösse auftritt.

**) Eigentlich ist $\omega = \varrho^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, (1+\varepsilon)$ zu setzen, wo $\lim \varepsilon = 0$.

$$d\sigma = \frac{\varrho^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{\cos\psi},$$

wenn man mit $\psi$ den von $\varrho$ und der Normale zur Oberfläche eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Um aber diesen Cosinus mittelst der Veränderlichen $\varrho, \vartheta, \varphi$ auszudrücken, bedenken wir Folgendes.

Die im Punkte $M$ zu den Seiten $\varrho \, d\vartheta$ und $\varrho \sin\vartheta \, d\varphi$ des krummlinigen Viereckes $\omega$ construirten Tangenten bilden mit dem Radiusvector $\varrho$ ein orthogonales Achsensystem, auf das wir die Gleichung der gegebenen Oberfläche uns für den Augenblick bezogen denken können. Alsdann sind die Coordinaten von $M$ sämmtlich mit Null gleichbedeūtend, die den Zunahmen $\varrho \, d\vartheta$ und $\varrho \sin\vartheta \, d\varphi$ der beiden andern Coordinaten entsprechenden Veränderungen von $\varrho$ aber werden ausgedrückt durch die partiellen Differentiale $\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta} d\vartheta$ und $\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi} d\varphi$. Nennen wir mithin die Verhältnisse derselben zu den Differentialen $\varrho \, d\vartheta$ und $\varrho \sin\vartheta \, d\varphi$ beziehungsweise $p$ und $q$, und berücksichtigen wir endlich die bekannte Beziehung

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

so erhalten wir jetzt unmittelbar für $d\sigma$ die Gleichung

$$d\sigma = \varrho \, d\vartheta \, d\varphi \sqrt{\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\right)^2 + \sin\vartheta^2 \left[\varrho^2 + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}\right)^2\right]}.^{*)}$$

Und daher wird irgend ein Stück $S$ der Oberfläche durch das Doppelintegral:

$$S = \int\int \varrho \, d\vartheta \, d\varphi \sqrt{\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\right)^2 + \sin\vartheta^2 \left[\varrho^2 + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta}\right)^2\right]}$$

ausgedrückt, dessen Grenzen aus den Bedingungen der jedesmaligen Aufgabe zu entwickeln sind.

Die soeben entwickelte Integralformel verliert offenbar ihre Anwendbarkeit in den Fällen, in welchen die Polargleichung der Oberfläche die Grösse $\varrho$ nicht enthält. Ein solcher Fall würde z. B. eintreten bei Berechnung derjenigen Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird, wenn diese an einer doppelt gekrümmten Curve hin-

*) Vergl. §. 141.

gleitet und dabei fortwährend durch einen festen Punkt geht. Wählt man nämlich in diesem Falle den festen Punkt zunächst zum Ursprunge eines rechtwinkligen Coordinatensystemes und nennt $x, y, z$ die Coordinaten eines Curvenpunktes; so werden $Y = \frac{y}{x} X$ und $Z = \frac{z}{x} X$ die Gleichungen des ihm entsprechenden Radiusvectors sein. Die Elimination von $x, y, z$ zwischen diesen und den beiden Gleichungen der Curve führen alsdann zu der Gleichung $F(X, Y, Z) = 0$ der gesuchten Fläche. Indem man nun hierin die rechtwinkligen Coordinaten durch Polarcoordinaten ersetzt und bedenkt, dass zu bestimmten $\vartheta$, $\varphi$ unendlich viel $\varrho$ gehören müssen, so kann offenbar die transformirte Flächengleichung $f(\vartheta, \varphi) = 0$ die Grösse $\varrho$ nicht enthalten, weil, wenn $f(\varrho, \vartheta, \varphi) = 0$ die Transformation von $F(X, Y, Z) = 0$ wäre, zu bestimmten $\vartheta$, $\varphi$ eine beschränkte Anzahl von Werthen des $\varrho$ gehören würde.

In Fällen dieser Art muss man das für rechtwinklige Coordinaten geltende Doppelintegral $\int\int dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ etwa durch Einführung der neuen unabhängigen Veränderlichen $\varrho$, $\vartheta$ statt $x$, $y$ in die entsprechende Form umzusetzen suchen, was ohne grosse Mühe möglich ist, wie man des Nähern bei Dienger nachsehen kann.*)

## §. 153.

### Verwandlung von Doppelintegralen mit veränderlichen Grenzen in solche mit constanten Grenzen.

In der Lehre vom einfachen Integral haben wir die ausserordentliche Tragweite des Theoremes von der Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen mit constanten Grenzen in sehr ausführlicher Weise kennen zu lernen Gelegenheit gehabt. Bei Doppelintegralen mit variabeln Grenzen erfreuen wir uns, wie wir durch Dirichlet wissen, nur in einem speciellen Falle eines ähnlichen Vortheils, nämlich dann, wenn in dem zu behandelnden Integrale bloss eine der Grenzen veränderlich ist und zwar mit einer der unabhängigen

* Differential- u. Integralrechnung Bd. 2. S. 396—397.

Variabeln zusammenfällt. Nicht ohne Interesse dürfte daher der Satz sein, dass jedes Doppelintegral mit veränderlichen Grenzen ohne Mühe in ein anderes mit constanten Grenzen sich verwandeln lässt.

In der That, seien in dem Integrale $\int_a^b dx \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y)\, dy$ die Grenzen $x_0$ und $x_1$ irgend welche Functionen von $x$. Setzt man nun

$$y = x_0 + (x_1 - x_0)\, z,$$

so wird offenbar in Bezug auf die neue Veränderliche $z$ das Integrationsintervall 0 und 1 heissen und demnach das vorgelegte Integral in das folgende

$$\int_a^b dx\, (x_1 - x_0) \int_0^1 \varphi\, [x, x_0 + (x_1 - x_0)\, z]\, dz$$

übergehen. Daraus aber fliesst weiter, wenn man für den Augenblick $x_0$ mit Null identificirt und wieder $y$ statt $z$ schreibt:

$$\int_a^b dx \int_0^{x_1} \varphi(x, y)\, dy = \int_a^b x_1\, dx \int_0^1 \varphi\, (x, x_1\, y)\, dy.$$

Und da nun immer die Beziehung gilt

$$\int_a^b dx \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y)\, dy = \int_a^b dx \int_0^{x_1} \varphi(x, y)\, dy - \int_a^b dx \int_0^{x_0} \varphi(x, y)\, dy,$$

so findet auch allgemein die Gleichung Statt:

$$\text{I.} \int_a^b dx \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x,y)\, dy = \int_a^b x_1 dx \int_0^1 \varphi(x, x_1 y)\, dy - \int_a^b x_0\, dx \int_0^1 \varphi(x, x_0\, y) dy.\text{*)}$$

1. Sei beispielsweise das Integral

$$u = r \int_0^r dx \int_{\sqrt{r^2 - rx}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

*) Abgesehen von dem soeben Mitgetheilten lässt sich das ursprüngliche Doppelintegral auch mittelst der Substitution

$$y = \tfrac{1}{2}\, (x_0 + x_1) + \tfrac{1}{2}\, (x_1 - x_0)\, z$$

in ein anderes mit constanten Grenzen umsetzen. Auf diese Weise nämlich erhält man sogleich

$$\int_a^b dx \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y)\, dy = \tfrac{1}{2} \int_a^b dx \int_{-1}^{+1} \varphi\, [x, \tfrac{1}{2}\, (x_0 + x_1) + \tfrac{1}{2}\, (x_1 - x_0) y]\, [x_1 - x_0]\, dy.$$

Vergl. Raabe. Integralrechnung. Thl. II, Abthl. 1, S. 434.

zu bestimmen. Geometrisch gedeutet drückt dasselbe denjenigen Theil der auf rechtwinklige Achsen bezogenen Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ aus, welcher auf der Seite der positiven $y$ und $z$ innerhalb des Cylinders $x^2 - rx + z^2 = 0$ liegt. Denn eliminirt man vorerst aus den beiden gegebenen Gleichungen die Grösse $z$, so erhält man die Relation $y^2 = r^2 - rx$, und diese zeigt, dass die Projection des Durchschnittes der Kugel- und Cylinderfläche auf die $xy$-Ebene eine Parabel bildet. Denkt man sich nun den frühern Lehren gemäss die von dieser Parabel und dem Kreise $y^2 = r^2 - x^2$ begrenzte Fläche in Elemente zerlegt und jedes derselben mit dem entsprechenden Projectionsfactor $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$ multiplicirt, so findet man durch Vereinigung aller auf diese Weise erhaltenen Elemente den Inhalt des oben erwähnten Kugelflächentheils durch Bestimmung des Integrales $u$.

Wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar erhellt, ergiebt sich in dieser Hinsicht zunächst die Gleichung

$$\frac{u}{r} = \int_0^r dx \sqrt{r^2 - x^2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - (r^2y^2 - x^2y^2)}} - \int_0^r dx \sqrt{r^2 - rx} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - (r^2y^2 - r\ldots}}$$

$$= \int_0^r dx \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} - \int_0^r dx \sqrt{\frac{r^2 - rx}{r - x}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{r + x - ry^2}} = \frac{r\pi}{2} - \sqrt{r} \int_0^r dx \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{r + x - \ldots}}$$

Und weil nun

$$\int_0^r dx \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{r + x - ry^2}} = 2 \int_0^1 dy \Big[\sqrt{r + x - ry^2}\Big]_0^r = 2\sqrt{r} \int_0^1 dy \sqrt{2 - y^2}$$

$$- 2\sqrt{r} \int_0^1 dy \sqrt{1 - y^2} = 2\sqrt{r} \left[\tfrac{1}{2} \arcsin \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} \arcsin 1\right] = \sqrt{r},$$

so folgt schliesslich

$$u = \frac{r^2\pi}{2} - r^2 = r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Dass man übrigens das Integral $u$ auch ohne Hülfe des vorhin benutzten Theoremes leicht hätte ermitteln können, bedarf keiner nähern Erörterung*).

*) Vergl. z. B. Moigno. Calcul intégral §. 78.

2. Behufs einer ferneren Anwendung des obigen Lehrsatzes suchen wir noch den Werth des Integrales

$$u = \int_0^{\alpha} dx \int_0^{\beta \left[1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p\right]^{\frac{1}{q}}} x^{a-1} y^{b-1} dy$$

zu bestimmen, in welchem die Constanten $\alpha$, $\beta$; $a$, $b$; $p$, $q$, sowie die Veränderlichen $x$, $y$ positiv sein sollen. Man hat hier zunächst die Gleichung

$$u = \int_0^{\alpha} dx \int_0^{1} x^{a-1} \left\{ y\beta \left[1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p\right]^{\frac{1}{q}} \right\}^{b-1} \beta \left[1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p\right]^{\frac{1}{q}} dy;$$

diese aber verwandelt sich, sofern $\alpha x$ statt $x$ geschrieben wird, sofort in die andere

$$u = \alpha^a \beta^b \int_0^1 dx \int_0^1 x^{a-1} \left[1 - x^p\right]^{\frac{b}{q}} y^{b-1} dy.$$

Und hieraus nun erkennt man augenblicklich, wenn man die in §. 60. bewiesene Formel

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}$$

beachtet, dass

$$u = \alpha^a \beta^b \frac{1}{bp} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}+1\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)} = \frac{\alpha^a \beta^b}{pq} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)}$$

ist. Dieses schöne Resultat bildet einen speciellen Fall eines von Dirichlet gefundenen Theoremes, dessen Mittheilung später erfolgen wird.

## §. 154.

### Regulirung des Integrationsumfanges transformirter Doppelintegrale.

Ganz abgesehen von dem grossen Interesse, welches dem vorhin bewiesenen Theoreme I. an sich zukommt, gewährt dasselbe auch für die Rechnung nicht unwesentliche Vortheile. Soll nämlich ein Doppelintegral mit veränderlichen Grenzen durch Einführung neuer Variabeln in der bestimmten Absicht umgeformt werden, wenn irgend möglich, dadurch constante, der Reduction des vorgelegten Doppelintegrales auf einfache Integrale günstige Integrationsintervalle zu erzielen: so dürfte in den meisten Fällen durch die unmittelbare Anwendung der in den Paragraphen 140. und 141. behufs der Grenzbestimmung gegebenen Vorschriften dieser Zweck sich nicht erreichen lassen. Viel eher gelingt derselbe vielmehr mit Benutzung des obigen Theoremes, indem ja hierdurch ohne Weiteres ein Integral mit constanten Grenzen gewonnen wird, dessen Transformation in eine für die fernere Behandlung zweckmässige Form sich weit besser bewerkstelligen lässt, als dies auf dem vorhin angedeuteten Wege möglich ist. Die Ausführung des so eben beschriebenen Verfahrens in jedem einzelnen Falle ist übrigens keinesweges von Nöthen, im Gegentheil genügt behufs der Entwicklung jener Gleichungen, welche bei der Ermittlung der neuen Integrationsgrenzen sich sehr zweckmässig erweisen, die Untersuchung eines allgemeinen Integrales.

Sei daher

$$S = \int_0^\alpha dx \int_0^{\psi(x)} F(x, y)\, dy$$

das durch Substitution neuer unabhängigen Veränderlichen zu transformirende Integral. In demselben bedeute $\alpha$ eine Constante, $\psi(x)$ dagegen eine Function von $x$. Nehmen wir nun an, dass diesem Integrale mittelst der Substitutionen

$$x = f(u, v),\ y = \varphi(u, v)$$

eine andere Gestalt gegeben werden soll, so ergiebt sich, wenn man von den Grenzen absieht, die Beziehung

$$S = \pm \int\int F\left[f(u, v), \varphi(u, v)\right]\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right] du\, dv.$$

Ganz dieselbe Form aber erhält man, wenn das ursprüngliche Integral $S$ mit Hülfe der Gleichungen

$$x = x' \text{ und } y = \psi(x')\, y'$$

vorerst in das folgende

$$S = \int_0^a dx' \int_0^1 F\,[x', y'\,\psi(x')]\;\psi(x')\,dy',$$

bei welchem also die Ordnung der Integrationen ganz beliebig ist, umgesetzt wird und hierauf in dieses Integral die neuen, mit $x'$ und $y'$ durch die Gleichungen

$$x' = f(u, v),\; \psi(x')\,y' = \varphi(u, v)$$

verbundenen Veränderlichen $u$, $v$ eingeführt werden. Denn augenscheinlich hat man die Beziehungen

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u},\; \frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial v};\; \frac{\partial y'}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\varphi(u,v)}{\psi(x')}\right]$$

$$= \left[\psi(x')\frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} - \varphi(u,v)\frac{\partial \psi(x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial v}\right]\left[\frac{1}{\psi(x')}\right]^2,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial u} = \left[\psi(x')\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \varphi(u,v)\frac{\partial \psi(x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial u}\right]\left[\frac{1}{\psi(x')}\right]^2,$$

demnach

$$\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v} - \frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial y'}{\partial u} = \left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right]\frac{1}{\psi(x')}$$

$$- \frac{\varphi(u,v)}{[\psi(x')]^2}\frac{\partial \psi(x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\varphi(u,v)}{[\psi(x')]^2}\frac{\partial \psi(x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v}.$$

Während nun aber bei der zuerst ausgeführten Transformation die neuen Integrationsgrenzen mit Hülfe der Gleichungen $x = f(u, v)$ und $y = \varphi(u, v)$ zu entwickeln gewesen wären, sind jetzt die zweckmässigeren Formem

$$x = f(u, v) \text{ und } y\,\psi(x) = \varphi(u, v),$$

in denen die Variabeln $x$ und $y$ beziehungsweise innerhalb der Intervalle $[0, \alpha]$ und $[0, 1]$ sich befinden, bei der Bestimmung des Integrationsumfanges zu Grunde zu legen.

Zur Erläuterung des Gesagten wollen wir noch einige Beispiele folgen lassen.

1. Soll das Integral

$$s = \int_0^\alpha dx \int_0^{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} dy,$$

wo $\alpha$ und $\beta$ positiv sind, mittelst der Substitutionen $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ transformirt werden, so erhält man zunächst durch Elimination der Veränderlichen $u$ die Gleichung

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} v.$$

Nun zeigt aber einerseits die Relation

$$\frac{y\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}{x} = \operatorname{tang} v,$$

dass für $x = 0$ und $x = \alpha$ die Variabele $v$ bezüglich die Werthe $\frac{\pi}{2}$ und 0 erwirbt. Andererseits dagegen folgt aus der Gleichung

$$y\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} = u \sin v,$$

d. h.

$$y^2 = u^2\left[\frac{y^2 \cos v^2}{\alpha^2} + \frac{\sin v^2}{\beta^2}\right],$$

wenn man hierin $y$ nach einander die Werthe 0 und 1 beilegt, dass die entsprechenden Werthe von $u$ 0 und $\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos v^2}{\alpha^2} + \frac{\sin v^2}{\beta^2}}}$ heissen. Da nun endlich

$$\pm\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = u$$

ist, so erhält man schliesslich die Gleichung

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{\left(\frac{\cos v^2}{\alpha^2} + \frac{\sin v^2}{\beta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}} u\, du,$$

mit deren weiterer Behandlung wir uns bekanntlich schon früher beschäftigt haben (§. 137.). In Betreff ihrer Herleitung aber beachte man noch Folgendes.

Aus dem Gange der Rechnung geht ohne Zweifel hervor, dass man zuerst die Gleichung

$$\int_0^\alpha dx \int_0^1 \beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\, dy = \int_0^1 dy \int_0^\alpha \beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\, dx$$

berücksichtigte, darauf $x$ durch $v$ vermöge der Beziehung

$\frac{y}{x}\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}} = \operatorname{tang} v$ ersetzte, alsdann die Ordnung der auf $v$ und $y$ bezüglichen Integrationen vertauschte und nun endlich $u$ an die Stelle von $y$ treten liess.

2. Sei ferner das Integral

$$s = \int_0^\alpha \int_0^{\alpha - \frac{x^2}{\alpha}} f(x, y)\, dx\, dy, \quad \alpha > 0, \quad \alpha - \frac{x^2}{\alpha} > 0$$

mittelst der Gleichungen $x = uv$, $y = u(1 - v^2)$ umzuformen*). Man gewinnt hier vorerst die Beziehungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1 - v^2, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -2vu,$$

$$\pm\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = u(1 + v^2).$$

Nun wird vermöge der Gleichung

$$\frac{y}{x}\left(\alpha - \frac{x^2}{\alpha}\right) = \frac{x}{v}(1 - v^2)$$

für $x = 0$ auch $v = 0$, für $x = \alpha$ hingegen ist $v = 1$, und aus $y\left(\alpha - \frac{u^2 v^2}{\alpha^2}\right) = u(1 - v^2)$, d. h. $y\alpha = u(1 - v^2) + \frac{y u^2 v^2}{\alpha}$ entspringen die Werthe $u = 0$, $u = \alpha$, je nachdem nämlich $y = 0$, oder $= 1$ gesetzt wird. Daher die Relation

$$s = \int_0^\alpha du \int_0^1 dv\, f[uv, u(1 - v^2)]\, u(1 + v^2).$$

Aus ihr erkennt man noch, dass $s$ auf das einfache Integral

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\varphi[\alpha^2(1 + v^2)^2] - \varphi(0)}{1 + v^2}\, dv$$

sich reducirt, wenn $f(x, y)$ die Derivirte $\varphi'(4x^2 + y^2)$ bedeutet.

3. Führt man in das Integral

$$s = \int_0^{+c} \int_0^{+\sqrt{c^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$$

die neuen Veränderlichen $u, v$ mittelst der Gleichungen

---

*) Vergl. Schlömilch in der Zeitschrift für Math. u. Physik, Jhrg. 1. Litteraturzeitung S. 43.

$$x = \frac{v}{\sqrt{1+u^2}},\quad y = \frac{uv}{\sqrt{1+u^2}}$$

ein, so erhält man, wenn vorerst die Integrationsgrenzen unterdrückt werden, wegen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{uv}{\sqrt{(1+u^2)^3}},\quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}};$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\quad \frac{\partial y}{\partial u} = v\,\frac{1+u^2-u^2}{\sqrt{(1+u^2)^3}},$$

also

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v(u^2+1)}{(1+u^2)^2};\quad \sqrt{a^2-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-v^2}:$$

$$\int\int dx\,dy\sqrt{a^2-x^2-y^2} = \pm\int\int\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2}\,v\,du\,dv.$$

Nun zeigt aber die Gleichung $\frac{y\sqrt{c^2-x^2}}{x} = u$, dass für $x=0$ und $x=c$ die Veränderliche $u$ die entsprechenden Werthe $u=\infty$ und $u=0$ annimmt; die Gleichung $y\sqrt{c^2-x^2} = \frac{uv}{\sqrt{1+u^2}}$, d. h. $y^2c^2 - \frac{y^2v^2}{1+u^2} = \frac{u^2v^2}{1+u^2}$ dagegen lehrt, dass für $y=0$ und $y=1$ die Veränderliche $v$ beziehungsweise mit 0 und 1 identisch wird. Und daher hat man die Beziehung

$$s = \int_0^c dv\int_0^\infty\frac{v\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}\int_0^c v\sqrt{a^2-v^2}\,dv = \frac{\pi}{6}\left[a^3-\left(\sqrt{a^2-c^2}\right)^3\right]\text{*)}.$$

Wenn man beachtet, dass die positiven Variabeln $x, y$ augenscheinlich die Bedingung $x^2+y^2 \leqq c^2$ befriedigen müssen, so folgen die Grenzwerthe der Veränderlichen $u, v$ auch ohne Hülfe der oben benutzten Gleichungen. Denn ersetzt man in der angezeigten Bedingung $x$ und $y$ durch die neuen Veränderlichen $u, v$, so müssen diese der Ungleichheit $v^2 < c^2$ genügen, mithin ist die Integration nach $v$ auf alle Werthe von $v=0$ bis $v=c$ auszudehnen. Und da nun ausserdem die vorstehende Bedingung für jedes positive $u$ befriedigt wird, so hat man dieses von 0 bis $\infty$ zu wählen.

---

*) Vergl. §. 141, Beispiel 3.

## Berechnung der Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides.

### §. 155.

### Einleitende Betrachtungen.

Nachdem wir in den vorausgegangenen Entwicklungen mit einer gewissen Ausführlichkeit sowohl einige der wesentlichsten jener Beziehungen, von denen man in den Elementen der Integralrechnung bei der Bestimmung der Inhalte von Flächen und Körpern Gebrauch macht, uns ins Gedächtniss zurückgerufen, als auch die nöthigen auf die Transformation bestimmter Doppelintegrale bezüglichen Lehren vorgeführt haben, beschäftigen wir uns zum Schlusse unserer Betrachtungen über Doppelintegrale noch mit einigen besondern Fällen derselben. Und zwar werden wir zunächst das Problem der Oberflächenberechnung eines dreiachsigen Ellipsoides behandeln. Diese Aufgabe ist gerade desshalb von der grössten Wichtigkeit für uns, weil sie den Anstoss zur Entwicklung einer äusserst sinnreichen, von Catalan*) herrührenden Reductionsmethode vielfacher Integrale uns geben wird. Dabei werden wir freilich nur in Betreff der Hauptpunkte des rein analytischen Processes uns enger an den französischen Mathematiker anschliessen, die geometrischen Hülfsvorstellungen, welche von Catalan bei der Entwicklung seiner Methode in dem besondern Falle der Quadratur der Ellipsoidenfläche zu Grunde gelegt wurden, ersetzen wir dagegen lieber durch die zweckmässigeren und einfacheren Dirichlet'schen Anschauungen; bei der Reduction des sich ergebenden elliptischen Integrales auf die Normalformen der ersten und zweiten Gattung der elliptischen Integrale endlich befolgen wir mit Dirichlet das Verfahren Lobatto's**). Bevor wir aber zu den angedeuteten Untersuchungen selbst übergehen, wollen wir erst mit Dirichlet in einer kurzen Skizze die eigenthümlichen Schwierigkeiten, mit denen das vorgelegte Problem zu kämpfen

---

*) Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples. Liouville. Journal, t. 4, p. 323—344.

**) Note sur l'évaluation de la surface de l'ellipsoide à trois axes inégaux. Liouville. Journal, t. 5, p. 115—119.

hat, uns klar zu machen suchen. Die Vorzüglichkeit der neuen Methode wird dadurch um so glänzender hervortreten.

Sei

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1$$

die auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Ellipsoidengleichung. Da hiernach das Ellipsoid eine völlig symmetrische Lage gegen unser Achsensystem besitzt, so könnten wir bei der Berechnung seiner Oberfläche offenbar auf die positiven Werthe von $x, y, z$ uns beschränken, indess werden wir auch negative $x$ und $y$ zulassen, also gleich die halbe Oberfläche des Ellipsoids zu bestimmen suchen. Den in §. 150. gepflogenen Betrachtungen gemäss haben wir daher zunächst das Doppelintegral

$$\int d\sigma \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

in die für den vorliegenden Fall Statt findende Form umzusetzen. Nun ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 \frac{y}{z},\ \left(\frac{\gamma}{z}\right)^2 = \frac{1}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2},$$

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^4}\,\frac{\gamma^2}{z^2}\,x^2 = \frac{\gamma^4}{\alpha^4}\cdot\frac{x^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2},\ \frac{\gamma^4}{\beta^2}\cdot\frac{y^2}{z^2} = \frac{\gamma^4}{\beta^2}\,\frac{y^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2},$$

also der Projectionsfactor $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ mit

$$\sqrt{\frac{1-\left[1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right]\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left[1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right]\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}$$

und daher das Doppelintegral $\int d\sigma \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ mit

$$\iint dx\,dy \sqrt{\frac{1-\left[1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right]\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left[1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right]\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}$$

gleichbedeutend, dessen Grenzen durch die Ungleichheit

$$1 > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2$$

regulirt werden. Ein Integral dieser Art aber lässt sich weder nach $x$, noch nach $y$ unbestimmt integriren. Wir müssen

mithin versuchen, ob nicht wenigstens die eine der Integrationen ausführbar wird, wenn wir die Projection unseres Ellipsoides auf die $xy$-Ebene durch andere als rechtwinklige Coordinaten in Elemente zerlegen. Diese Vermuthung gewinnt um so grössere Berechtigung, wenn wir beachten, dass die Projection des Ellipsoides von einer Ellipse begrenzt wird und dass also vielleicht die Anwendung der Ivory'schen Substitution den angedeuteten Vortheil herbeiführen würde. Und in der That, setzt man $x = \alpha\lambda \cos v$, $y = \beta\lambda \sin v$, so verwandelt sich den in §. 139. angestellten Betrachtungen zufolge unser Doppelintegral sogleich in

$$\alpha\beta \int_0^1 d\lambda \int_0^{2\pi} \lambda\, dv \frac{\sqrt{1 - \left\{\left[1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right] \cos v^2 + \left[1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right] \sin v^2\right\} \lambda^2}}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

und kann folglich in Bezug auf $\lambda$ der unbestimmten Integration unterworfen werden*). Denn schreibt man $\sqrt{1 - \lambda^2} = u$ und nennt $a$ die von $\lambda$ unabhängige Grösse

---

*) Ausser der Ivory'schen Substitution würde auch z. B. durch Einführung der Variabeln $\vartheta$, $\varphi$ statt $x$, $y$, $z$, wenn jene mit diesen durch die Gleichungen

$$x = \alpha \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \beta \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \gamma \cos \vartheta$$

verbunden sind, die eine der Integrationen, nämlich die nach $\vartheta$, vollziehbar werden. Von einer ganz analogen Substitution macht auch Plana in seinem „Mémoire sur l'expression analytique de la surface totale de l'ellipsoide dont les trois axes sont inégaux; et sur l'evaluation de la surface d'une voute symmétrique, à la base rectangulaire, retranchée dans la moitié du même ellipsoide;" Crelle. Journal, Bd. 17, S. 345 ff. Gebrauch.

Die Benutzung der Ivory'schen Substitution empfiehlt sich — wie aus dem Vorstehenden unmittelbar erhellt — überhaupt bei dem Doppelintegrale

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} dx \int_{-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}^{+\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} dy\, f(x, y)$$

oder, wenn man sich bloss auf positive $x$ und $y$ beschränkt, bei dem folgenden

$$\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\cos v^2+\left(1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\sin v^2,$$

so geht das Integral

$$\int_0^1 \frac{\lambda\, d\lambda \sqrt{1-\left[\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\cos v^2+\left(1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\sin v^2\right]\lambda^2}}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

über in

$$\int_0^1 du\sqrt{1-a+au^2}.$$

Ein unbestimmtes Integral dieser Form aber ist bekanntlich auf logarithmische oder cyklometrische Functionen zurückführbar, je nachdem nämlich $a \gtrless 0$ ist. Jeder dieser Fälle kann hier eintreten, es hängt dies lediglich von der Bedeutung der Grösse $\gamma$ ab. Bezeichnet nämlich $\gamma$ die kleinste der Halbachsen des Ellipsoides, so ist offenbar $a$ positiv; dagegen führt $a$ das Minuszeichen, wenn $\gamma$ die grösste der Halbachsen vorstellt. Und drückte endlich $\gamma$ die mittlere Halbachse aus, so wäre $a$ für gewisse Werthe von $v$ grösser, für andere $v$ hingegen kleiner als Null. Diesen Fällen entsprechend, müsste daher jetzt eine Zerlegung des Integrales eintreten, indess lässt sich diese unnütze Schwierigkeit vermeiden, wenn man — wie dies später geschehen wird — gleich im Voraus eine gewisse Rangordnung unter den Halbachsen festsetzt.

---

$$\int_0^\alpha dx \int_0^{+\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} f(x,y)\, dy.$$

Denn man gelangt dadurch sofort zu Integralen mit constanten Grenzen, nämlich den beiden Fällen entsprechend zu den nachstehenden

$$\alpha\beta\int_0^1 d\lambda\int_0^{2\pi}\lambda\, f(\alpha\lambda\cos v,\ \beta\lambda\sin v)\, dv \text{ und } \alpha\beta\int_0^1 d\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\lambda f(\alpha\lambda\cos v, \beta\lambda\sin v)\, dv,$$

und hieraus schliesst man ohne Weiteres, dass das vorgelegte Integral auf ein einfaches sich zurückführen lässt, wenn $f(x, y)$ eine Function von $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}$ vorstellt. Vergl. Schlömilch. Zeitschrift für Math. und Physik, Jahrg. 1, Litteraturzeitung S. 43.

Nach Ermittlung der in $\int du \sqrt{1 - a + au^2}$ enthaltenen Elementarfunctionen müsste nun die Integration nach $v$ vollzogen werden; allein diese ist unmöglich, weil die jetzt auftretenden Integrale in die Klasse der elliptischen gehören. Dieselbe Erscheinung einer nicht ausführbaren unbestimmten Integration würde sogar wieder gleich anfänglich sich gezeigt haben, wenn man mit der nach $v$ hätte beginnen wollen.

In was für Formen man nun aber das ursprüngliche Integral auch darstellen möge, der Erfolg aller Bemühungen bleibt stets der, dass bei einer etwaigen doppelten Integration höchstens nur nach einer der Veränderlichen integrirt werden kann. Das Ziel unserer Bestrebungen kann daher auch nur dieses sein, in der kürzesten und elegantesten Weise das ursprüngliche Doppelintegral auf die Normalformen der elliptischen Integrale zu reduciren. Dies aber leistet im hohen Grade die von Catalan erfundene Methode, indem durch sie sofort ein einfaches Integral sich ergiebt, das — wie schon angedeutet — nach Lobatto's Vorgange mit dem geringsten Aufwande von Rechnung in die kanonische Form der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung sich umsetzen lässt. Die Ermittlung jenes einfachen Integrales hingegen geschieht in der elegantesten Weise, wenn man mit Dirichlet die ganze Oberfläche des halben Ellipsoides in Streifen zerlegt, deren Projectionen in der $xy$-Ebene durch concentrische Ellipsen begrenzte Ringe bilden, alsdann die Werthe dieser Ringe ermittelt und nun wieder von ihnen auf die Grösse der entsprechenden ellipsoidischen Streifen zurückschliesst.

## §. 156.

### Darstellung der Catalan-Lobatto-Dirichlet'schen Methode.

Indem wir jetzt zur ausführlichen Darstellung der vorhin erwähnten Dirichlet'schen Behandlungsweise der Catalan'schen Methode selbst übergehen, setzen wir gleich im Voraus zwischen den Halbachsen $\alpha, \beta, \gamma$ des Ellipsoides die Beziehung $\gamma < \beta < \alpha$ fest, wobei in besondern Fällen auch das Gleichheitszeichen erscheinen darf und nennen in dem Doppelintegrale

$$S = \int\int dx\,dy \sqrt{\frac{1 - \left[1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right]\frac{x^2}{\alpha^2} - \left[1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right]\frac{y^2}{\beta^2}}{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}$$

um der Kürze willen

$$1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \delta^2,\ 1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2} = \varepsilon^2 \text{ und } \sqrt{\frac{1 - \delta^2 \frac{x^2}{\alpha^2} - \varepsilon^2 \frac{y^2}{\beta^2}}{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}} = u.$$

Da nun geometrisch genommen $u$ die Secante der Winkel bedeutet, welche die in den einzelnen Punkten des Ellipsoides construirten Tangentialebenen mit der $xy$-Ebene einschliessen; so können wir offenbar alle diejenigen Oberflächenpunkte zu bestimmen suchen, für welche die Berührungsebenen gleiche Neigung gegen die Projectionsebene besitzen, für welche also $u$ constant ist. Quadriren wir zu dem Behufe die für $u$ geltende Gleichung, so kommt nach einer einfachen Reduction

$$1 = \frac{u^2 - \delta^2}{u^2 - 1}\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{u^2 - \varepsilon^2}{u^2 - 1}\frac{y^2}{\beta^2},$$

und folglich projiciren sich alle jene Punkte auf der $xy$-Ebene in einer Ellipse, deren Halbachsen

$$\alpha\sqrt{\frac{u^2 - 1}{u^2 - \delta^2}} \text{ und } \beta\sqrt{\frac{u^2 - 1}{u^2 - \varepsilon^2}}$$

heissen. Daraus aber fliesst sogleich weiter, dass die den verschiedenen Werthen von $u$ entsprechenden Ellipsen sich niemals schneiden können. Denn da

$$\frac{u^2 - 1}{u^2 - \delta^2} = 1 - \frac{1 - \delta^2}{u^2 - \delta^2},\ \frac{u^2 - 1}{u^2 - \varepsilon^2} = 1 - \frac{1 - \varepsilon^2}{u^2 - \varepsilon^2}$$

ist und da $\delta^2$, $\varepsilon^2$ zu den echten Brüchen gehören, $u^2$ aber die Eins überschreitet, so müssen offenbar $\frac{1 - \delta^2}{u^2 - \delta^2}$ und $\frac{1 - \varepsilon^2}{u^2 - \varepsilon^2}$ um so kleinere Werthe erwerben, je grösser $u$ wird. Die Halbachsen der Ellipsen müssen daher mit $u$ wachsen, und folglich können diese keine gemeinsamen Punkte besitzen. Die blosse Anschauung führt sogar schon zu derselben Folgerung, weil man bei Annahme des Gegentheils die Absurdität behaupten müsste, dass jeder Durchschnittspunkt die Projection eines solchen Punktes der Ellipsoidenfläche sei, in welchem

die Berührungsebene zwei verschiedene Neigungen gegen die $xy$-Ebene besässe.

Die irgend einem bestimmten $u$ entsprechende Ellipsenfläche wird ihrem Inhalte nach bekanntlich durch

$$\alpha\,\beta\,\pi \sqrt{\frac{(u^2-1)\,(u^2-1)}{(u^2-\delta^2)\,(u^2-\varepsilon^2)}} = \alpha\,\beta\,U\,\pi$$

dargestellt, und demnach muss der zwischen je zwei um $du$ von einander entfernten Ellipsen befindliche Ring seiner Grösse nach bis auf ein unendlich Kleines höherer Ordnung mit $\alpha\,\beta\,\pi \frac{dU}{du}\,d\,u$ übereinstimmen. Der entsprechende ellipsoidische Ring besitzt mithin die Grösse $\alpha\beta\pi u \frac{dU}{du}\,du$, und sonach wird durch Summation aller dieser Streifen die halbe Oberfläche

$$S = \alpha\,\beta\,\pi \int u \frac{dU}{du}\,d\,u$$

des Ellipsoides gewonnen. Der Umfang der Integration erstreckt sich dabei von $u = 1$ bis $u = \infty$; denn augenscheinlich bestimmt der Schnittpunkt der $z$-Achse mit der Oberfläche des Ellipsoides, derjenige Punkt also, in welchem die Berührungsebene parallel mit der Projectionsebene läuft, den Anfang der Integration; die obere Grenze hingegen ergiebt sich dadurch, dass in dem Durchschnitte des Ellipsoides mit der $xy$-Ebene die berührenden Ebenen senkrecht zur Projectionsebene stehen.

Die soeben entwickelte Gleichung

$$1. \qquad S = \alpha\beta\pi \int_1^\infty u \frac{dU}{du}\,d\,u$$

bedarf jetzt der weitern Behandlung. In dieser Hinsicht werden wir zunächst den Differentialquotienten $\frac{dU}{du}$ aus dem Integrale zu entfernen suchen und uns dazu der partiellen Integration bedienen; sie giebt sogleich zu erkennen, dass

$$2. \qquad \int u \frac{dU}{du}\,du = u\,U - \int U\,d\,u.$$

Geht man nun aber von dem unbestimmten zu dem bestimmten Integrale über, so wird nicht bloss $u\,U$, sondern auch $\int U\,du$ für $u = \infty$ unbegrenzt wachsen. Unser Augenmerk

muss mithin darauf gerichtet sein, durch zweckmässige Behandlung des Integrales $\int_1^\infty U\,du$ aus demselben dasjenige Glied auszuscheiden, welches das in $u\,U$ enthaltene Unendliche annullirt. Zu dem Behufe werden wir das Integral

$$\int^u U\,du = \int^u \frac{(u^2-1)\,du}{\sqrt{(u^2-\delta^2)(u^2-\varepsilon^2)}},$$

das augenscheinlich zu den elliptischen gehört, indess noch keineswegs auf die Normalformen derselben zurückgeführt ist, auf diese reduciren. Offenbar aber würde, weil $u > 1$ und ausserdem $\varepsilon^2 < \delta^2$ ist, dies verlangen, dass wir zuvörderst die Variabele $u$ durch $\frac{\delta}{u_1}$ und hierauf $u_1$ durch $\sin\varphi$ ersetzen. Indessen können wir gleich beide Substitutionen mit einander verbinden, also $u = \frac{\delta}{\sin\varphi}$ wählen. Führen wir nun die desfallsige Rechnung aus, so ergiebt sich vorerst für das unbestimmte Integral die Gleichung

$$\int^u U\,du = -\frac{1}{\delta}\int^\varphi \frac{\delta^2-\sin\varphi^2}{\Delta}\,\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2} = \frac{1}{\delta}\int^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta} - \delta\int^\varphi \frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\,.\,\Delta}$$

und hieraus folgt wegen $\Delta = \sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\sin\varphi^2}$ und

$$\int^\varphi \frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\,.\,\Delta} = \int^\varphi \frac{\Delta^2+\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\sin\varphi^2}{\Delta\sin\varphi^2}\,d\varphi:$$

$$\int^u U\,du = \frac{1}{\delta}(1-\varepsilon^2)\int^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta} - \delta\int^\varphi\frac{\Delta\,d\varphi}{\sin\varphi^2}.$$

Durch theilweise Integration aber entspringt ferner

$$-\int^\varphi\frac{\Delta\,d\varphi}{\sin\varphi^2} = \int^\varphi \Delta d(\mathrm{cotg}\varphi) = \Delta\,\mathrm{cotg}\varphi + \left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}-1\right)\int^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta} + \int^\varphi \Delta d\varphi\,^{*)},$$

und daher wird

$$\int^u U\,du = \frac{1}{\delta}(1-\varepsilon^2)\int^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta} + \delta\Delta\,\mathrm{cotg}\varphi + \delta\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}-1\right)\int^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta} + \delta\int^\varphi \Delta\,d\varphi$$

$$= \left(\frac{1}{\delta}-\delta\right)\int^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta} + \delta\,\Delta\,\mathrm{cotg}\,\varphi + \delta\int^\varphi\Delta\,d\varphi.$$

*) Man beachte, dass

$$\mathrm{cotg}\,\varphi\,d\Delta = -\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\,\frac{\cos\varphi^2\,d\varphi}{\Delta} = \left(1-\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\right)\frac{d\varphi}{\Delta} - \frac{1}{\Delta}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\sin\varphi^2\right)d\varphi$$

ist.

Werden jetzt beide Seiten dieser Gleichung um die Grösse $u\,U = \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{\delta^2 - \sin\varphi^2}{\delta\cos\varphi\,.\,\Delta}$ vermindert, so entspringt

$$\int U\,du - u\,U = \left(\frac{1}{\delta} - \delta\right)\int\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$+ \delta\int\Delta\,d\varphi + \delta\Delta\operatorname{cotg}\varphi - \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{\delta^2 - \sin\varphi^2}{\delta\Delta\cos\varphi},$$

eine Relation, aus der nun durch die einfachste Rechnung die Endgleichung für $S$ sich erzielen lässt.

Da $u = \frac{\delta}{\sin\varphi}$ gesetzt wurde, so wird für $u=1$ die Grösse $\varphi$ augenscheinlich den Werth $\arcsin\delta = \lambda$ besitzen, wo $\lambda$ zwischen 0 und $+\frac{\pi}{2}$ sich befindet; der $u=\infty$ entsprechende Werth von $\varphi$ hingegen heisst 0.

Mithin ergiebt sich jetzt die Beziehung

$$\Big[u\,U\Big]_1^\infty - \int_1^\infty U\,du = \left(\frac{1}{\delta} - \delta\right)\int_0^\lambda\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$+ \delta\int_0^\lambda\Delta\,d\varphi + \left[\delta\Delta\operatorname{cotg}\varphi - \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{\delta^2 - \sin\varphi^2}{\Delta\,\delta\cos\varphi}\right]_0^\lambda,$$

und hieraus erkennt man mit Beachtung der Gleichung $\sin\lambda^2 = \sin(\arcsin\delta)^2 = \delta^2$ ohne Weiteres, wie zweckmässig es war, in der unmittelbar vorhergehenden Relation zwischen den unbestimmten Integralen das dritte Glied rechts nicht in vereinfachter Gestalt darzustellen. Nun ist

$$\delta\Delta = \delta\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\sin\varphi^2},$$

sonach geht für $\varphi = \lambda$ $\delta\Delta$ in $\delta\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{\gamma\delta}{\beta}$ über, die Grösse $\operatorname{cotg}\varphi$ ferner verwandelt sich für $\varphi = \lambda$ in $\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} = \frac{\gamma}{\alpha\delta}$, und demnach ist $[\delta\Delta\operatorname{cotg}\varphi]_{\varphi=\lambda} = \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}$.

Für $\varphi = 0$ dagegen wird $\delta\Delta\operatorname{cotg}\varphi - \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{\delta^2 - \sin\varphi^2}{\Delta\,\delta\cos\varphi}$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ annehmen. Schreibt man aber den hier in Betracht kommenden Ausdruck in der nebenstehenden Gestalt

$$\delta\left[\Delta\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-\frac{1}{\Delta}\,\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\right]=\delta\,\frac{\Delta^2\cos\varphi^2-1}{\Delta\sin\varphi\cos\varphi}$$

$$=-\delta\,\frac{1+\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\cos\varphi^2}{\Delta\sin\varphi\cos\varphi}\sin\varphi^2,$$

eigt sich, dass $\infty-\infty$ mit Null gleichbedeutend ist. Und
ıer wird jetzt

$$\Big[u\,U\Big]_1^{\infty}-\int_1^{\infty}U\,du=\left(\frac{1}{\delta}-\delta\right)\int_0^{\lambda}\frac{d\varphi}{\Delta}+\delta\int_0^{\lambda}\Delta\,d\varphi+\frac{\gamma^2}{\alpha\beta},$$

d. h., wenn $\frac{1}{\delta}$ und $\delta$ durch die mit ihnen äquivalenten Ausdrücke $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$, $\frac{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{\alpha}$ ersetzt werden,

$$S=\pi\left[\gamma^2+\frac{\gamma^2\beta}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\int_0^{\lambda}\frac{d\varphi}{\Delta}+\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}\int_0^{\lambda}\Delta\,d\varphi\right]$$

oder mit Benutzung der Legendre'schen Bezeichnungsweise de elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung

$$S=\pi\left[\gamma^2+\frac{\gamma^2\beta}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}F(\lambda,k)+\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}\,E(\lambda,k)\right],\quad k=\frac{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}}}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}}.$$

Vollständige Integrale können in dieser die halbe Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoides darstellenden Formel die Functionen $F$ und $E$ niemals werden, weil ja dann wegen $\lambda=\frac{\pi}{2}$ die Grösse $\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}$ den Werth 1 annehmen und sonach $\gamma$ der Null gleich sein müsste. Dagegen vereinfacht sich der vorstehende Ausdruck, wenn der Modul $k=1$, oder $=0$, also $\alpha=\beta$, oder $\gamma=\beta$ wird. Obgleich die alsdann Sta habenden Relationen bekanntlich auf sehr elementare Wei sich erzielen lassen, so wollen wir doch den hier sich d bietenden Weg ihrer Begründung nicht mit Stillschwei übergehen.

Betrachten wir zunächst den letztern Fall, so muss Ellipsoid ein Revolutionsellipsoid sein, entstanden durch tation einer Ellipse um ihre grosse Achse $2\alpha$. Alsdam hat man

$$\int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\Delta} = \int_0^\lambda \Delta\, d\varphi = \arcsin\delta$$

und folglich

$$S = \pi\left[\beta^2 + \frac{\beta^3}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \arcsin\delta + \beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\arcsin\delta\right]$$

$$= \pi\beta\left(\beta + \frac{\alpha}{\delta}\arcsin\delta\right).$$

Daraus fliesst weiter, wenn man $\delta = 0$, also $\alpha = \beta$ setzt, der bekannte für die Oberfläche der Halbkugel geltende Ausdruck $2\pi\alpha^2$, welcher übrigens auf diesem Wege am einfachsten aus der Form

$$S = \pi\left(\beta^2 + \frac{\alpha\beta\lambda}{\sin\lambda}\right)$$

entspringt.

Wird endlich der Modul $k = 1$, demnach das Ellipsoid ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse $2\gamma$ erzeugtes Ellipsoid, so gelten die Beziehungen

$$\int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\Delta} = \int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \left[\lg\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^\lambda$$

$$= \frac{\lg\left(\cos\frac{\lambda}{2}+\sin\frac{\lambda}{2}\right)^2}{\cos\lambda} = \lg\frac{1+\delta}{\sqrt{1-\delta^2}},\quad \int_0^\lambda \Delta\, d\varphi = \sin\lambda,$$

also

$$S = \pi\left[\beta^2 + \frac{\gamma^2}{\delta}\lg\frac{\delta\beta+\delta}{\gamma}\right] = \pi\left[\beta^2 + \frac{\gamma^2\beta}{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}\lg\frac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}+\beta}{\gamma}\right].$$

## §. 157.

**Umformung des Integrales $\int_1^\infty u\frac{dU}{du}du$ durch Ausführung der Differentiation. — Verfahren Schlömilch's. — Rein analytischer Charakter der Catalan'schen Reductionsmethode.**

I. Die im Vorhergehenden gelehrte Behandlung des Integrales

$$S = \alpha\beta\pi\int_1^\infty u\frac{dU}{du}du$$

hatte augenscheinlich den Zweck, dasselbe in der einfachsten Weise auf die in Betracht kommenden Normalformen der elliptischen Integrale zurückzuführen. Wäre es dagegen bloss unsere Absicht gewesen, jenes Integral, d. h. das Doppelintegral

$$S = \iint dx\, dy \sqrt{\frac{1 - \frac{\delta^2 x^2}{\alpha^2} - \frac{\varepsilon^2 y^2}{\beta^2}}{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}, \quad \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 \leqq 1$$

auf einfache Integrale überhaupt zu reduciren, so hätten wir ein solches Ziel auch folgendermassen erreichen können. Beachtet man nämlich, dass

$$\frac{dU}{du} du = \frac{d}{du} \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \varepsilon^2)}} = \frac{u\, du}{\sqrt{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \varepsilon^2)}} \frac{2u^2 - (\delta^2 + \varepsilon^2)u^2 - (\delta^2 + \varepsilon^2) + 2\delta^2\varepsilon^2}{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \varepsilon^2)}$$

$$= \frac{u\, du}{\sqrt{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \varepsilon^2)}} \left(\frac{1 - \delta^2}{u^2 - \delta^2} + \frac{1 - \varepsilon^2}{u^2 - \varepsilon^2}\right)$$

ist, so ergiebt sich sofort

$$S = \pi\alpha\beta \left[(1 - \delta^2) \int_1^\infty \frac{u^2\, du}{\sqrt{(u^2 - \delta^2)^3 (u^2 - \varepsilon^2)}} + (1 - \varepsilon^2) \int_1^\infty \frac{u^2\, du}{\sqrt{(u^2 - \varepsilon^2)^3 (u^2 - \delta^2)}}\right].$$

In einer andern Gestalt lässt sich übrigens diese Gleichung noch darstellen, wenn man erwägt, dass

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{u^2}{\sqrt{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \varepsilon^2)}}\right) = \frac{u^2 \delta}{\sqrt{(u^2 - \delta^2)^3 (u^2 - \varepsilon^2)}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{u^2}{\sqrt{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \varepsilon^2)}}\right) = \frac{u^2 \varepsilon}{\sqrt{(u^2 - \varepsilon^2)^3 (u^2 - \delta^2)}}$$

ist. Dadurch nämlich erhält man unmittelbar die Relation

$$S = \pi\alpha\beta \left[\frac{1 - \delta^2}{\delta} \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{u^2}{\sqrt{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \varepsilon^2)}}\right) du\right.$$

$$\left. + \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{u^2}{\sqrt{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \varepsilon^2)}}\right) du. \right]$$

Catalan schreibt dieselbe um der Kürze willen in der nachstehenden Form

$$S = \pi\alpha\beta \left[\frac{1 - \delta^2}{\delta} \frac{\partial}{\partial \delta} + \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right] \int_1^\infty \frac{u^2\, du}{\sqrt{(u^2 - \delta^2)(u^2 - \varepsilon^2)}},$$

die mit einer ganz unbedeutenden Abweichung auch von Moigno*) gebraucht wird. Nach unserm Dafürhalten ist indess eine solche Schreibweise zweckmässiger zu unterdrücken, weil das Integral

$$\int_1^\infty \frac{u^2 du}{\sqrt{(u^2-\delta^2)(u^2-\varepsilon^2)}}$$

wegen der obern Grenze sinnlos ist.

II. Einen andern, rein analytischen und nur ein bescheidenes Mass von Vorkenntnissen erfordernden Weg der Reduction des Doppelintegrales

$$S' = \int_0^\alpha dx \int_0^{\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} dy \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\delta x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon y}{\beta}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}$$

oder, wenn man $\alpha x$ und $\beta y$ bezüglich statt $x$ und $y$ setzt, des folgenden

$$S' = \alpha\beta \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy\sqrt{1-\delta^2x^2-\varepsilon^2y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

auf einfache Integrale hat Schlömilch angezeigt**). Mittelst der Substitutionen $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$ erhält man nämlich aus der letztern Gleichung zunächst die Beziehung

$$S' = \alpha\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 \varrho \sqrt{\frac{1-\delta^2\varrho^2\cos\vartheta^2-\varepsilon^2\varrho^2\sin\vartheta^2}{1-\varrho^2}}.$$

Und diese verwandelt sich sofort wieder in die andere

$$S' = \alpha\beta \int_0^1 dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \frac{(1-\delta^2)\cos\vartheta^2+(1-\varepsilon^2)\sin\vartheta^2}{[(1-\delta^2v^2)\cos\vartheta^2+(1-\varepsilon^2v^2)\sin\vartheta^2]^2},$$

*) Leçons de calcul intégral §. 126.

**) Zeitschrift für Math. u. Phys. Jahrg. I. S. 376. Auch vergl. man Schlömilch. Ueber einige Integralformeln. a. a. O. Jahrg. VI. S. 207.

wenn man

$$\frac{1-\varrho^2}{1-\varrho^2(\delta^2\cos\vartheta^2+\varepsilon^2\sin\vartheta^2)}=v^2,$$

also

$$\varrho\,d\varrho=-v\,dv\,\frac{(1-\delta^2)\cos\vartheta^2+(1-\varepsilon^2)\sin\vartheta^2}{[(1-\delta^2v^2)\cos\vartheta^2+(1-\varepsilon^2v^2)\sin\vartheta^2]^2}$$

schreibt und schliesslich die Ordnung der Integration umkehrt. Nun ist mit Berücksichtigung der leicht durch partielle Integration beweisbaren Relationen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\vartheta^2\,d\vartheta}{(m\cos\vartheta^2+n\sin\vartheta^2)^2}=\frac{\pi}{4m\sqrt{mn}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta^2\,d\vartheta}{(m\cos\vartheta^2+n\sin\vartheta^2)^2}=\frac{\pi}{4n\sqrt{mn}}\text{*)}:$$

---

*) Aus der auf Seite 160. bewiesenen Gleichung

$$\int_0^\infty\frac{x^{p-1}\,dx}{(1+\alpha x^r)^{p+q}}=\frac{1}{r\alpha^{\frac{p}{r}}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{r}\right)\Gamma\left(q+\frac{r-1}{r}p\right)}{\Gamma(p+q)}$$

ergeben sich die obigen Formeln unmittelbar, sofern man $p=q=1$, $r=2$ und $\alpha=\frac{m}{n},\frac{n}{m}$ wählt. Denn man hat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\vartheta^2\,d\vartheta}{(m\cos\vartheta^2+n\sin\vartheta^2)^2}=\frac{1}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,(\text{tang}\,\vartheta)}{\left(1+\frac{n}{m}\,\text{tang}\,\vartheta^2\right)^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta^2\,d\vartheta}{(m\cos\vartheta^2+n\sin\vartheta^2)^2}=-\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,(\text{cotg}\,\vartheta)}{\left(1+\frac{m}{n}\,\text{cotg}\,\vartheta^2\right)^2}.$$

Setzt man folglich nach einander tang $\vartheta=x$ und cotang $\vartheta=x$, so erhält man die Beziehungen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\delta^2)\cos\vartheta^2\, d\vartheta}{[(1-\delta^2 v^2)\cos\vartheta^2 + (1-\varepsilon^2 v^2)\sin\vartheta^2]^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{1-\delta^2}{(1-\delta^2 v^2)\sqrt{(1-\delta^2 v^2)(1-\varepsilon^2 v^2)}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\varepsilon^2)\sin\vartheta^2\, d\vartheta}{[(1-\delta^2 v^2)\cos\vartheta^2 + (1-\varepsilon^2 v^2)\sin\vartheta^2]^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2 v^2)\sqrt{(1-\delta^2 v^2)(1-\varepsilon^2 v^2)}},$$

mithin wird

$$S = \frac{\alpha\beta\pi}{4}\int_0^1 \left[\frac{1-\delta^2}{1-\delta^2 v^2} + \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 v^2}\right] \frac{dv}{\sqrt{(1-\delta^2 v^2)(1-\varepsilon^2 v^2)}}.$$

Dass übrigens diese den Octanten des Ellipsoides darstellende Formel durch die Substitution $\frac{1}{u} = v$ die früher gefundene Gestalt

$$S = \frac{\alpha\beta\pi}{4}\int_1^\infty \left[\frac{1-\delta^2}{u^2-\delta^2} + \frac{1-\varepsilon^2}{u^2-\varepsilon^2}\right] \frac{u^2\, du}{\sqrt{(u^2-\delta^2)(u^2-\varepsilon^2)}}$$

unmittelbar annimmt, bedarf keiner Auseinandersetzung.

III. Wenn wir den Ideengang, welchen wir im vorigen Paragraphen bei der Reduction des Doppelintegrales

---

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\vartheta^2\, d\vartheta}{(m\cos\vartheta^2 + n\sin\vartheta^2)^2} = \frac{1}{m^2}\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{n}{m}x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{m^2\sqrt{\frac{n}{m}}\;\Gamma(2)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta^2\, d\vartheta}{(m\cos\vartheta^2 + n\sin\vartheta^2)^2} = \frac{1}{n^2}\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{m}{n}x^2\right)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{\pi\sqrt{n}}{n^2\sqrt{m}}.$$

Bei Anwendung der theilweisen Integration dagegen beachte man die Recursionsformel

$$\int \frac{dx}{(1+\alpha x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(1+\alpha x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+\alpha x^2)^{n-1}}.$$

$$S = \iint dx\,dy \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\delta x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon y}{\beta}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}},\ 1 > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2$$

innehielten, seines geometrischen Gewandes entkleiden, so lässt er sich kurz wie folgt charakterisiren.

Statt der Variabeln $x$, $y$ führen wir eine neue Veränderliche

$$1. \qquad u = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\delta x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon y}{\beta}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}$$

ein, betrachten diese für den Augenblick als constant und ermitteln den Werth des Integrales $\iint dx\,dy$, indem wir den Veränderlichen $x$, $y$ alle Werthe beilegen, welche der Ungleichheit

$$2. \qquad u^2 - 1 > (u^2 - \delta^2)\frac{x^2}{\alpha^2} + (u^2 - \varepsilon^2)\frac{y^2}{\beta^2}$$

genügen. Offenbar ist dieselbe mit der ursprünglichen $1 > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2$ nicht im Widerspruch, weil die Verhältnisse

$$\frac{u^2 - \delta^2}{u^2 - 1},\ \frac{u^2 - \varepsilon^2}{u^2 - 1}$$

beide die Eins überschreiten. Auf die angedeutete Weise gewinnen wir ein durch die Grössen $u$, $\delta$, $\varepsilon$ ausgedrücktes Integral, das wir durch $U = F(u)$ bezeichnen wollen. Lassen wir nun die Grösse $u$ in $u + du$ übergehen, ermitteln alsdann den Werth des Integrales $\iint dx\,dy$ für die Werthe von $x$, $y$, welche aus der Bedingung 2. sich ergeben, sofern in dieser $u + du$ statt $u$ gesetzt wird und ziehen endlich von dem erhaltenen Resultate das dem ursprünglichen $u$ entsprechende ab; so erhalten wir augenscheinlich das Differential $\frac{dF(u)}{du}du$ der Function $F(u)$, d. h. den Inbegriff der Werthe, welche die Function $dx\,dy$ in dem vorgelegten Doppelintegrale annimmt, sofern die Veränderlichen $x$, $y$ mit $u$ durch die Gleichung 1. verbunden sind und $u$ von $u$ bis $u + du$

sich bewegt. Daraus aber folgt sogleich weiter, dass in dem Integrale nach $u$ das Product $u\frac{d\,F(u)}{du}du$ an die Stelle von

$$dx\,dy\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\delta x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon y}{\beta}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}$$

in dem zu behandelnden Doppelintegrale $S$ tritt. Und da nun dieses über alle Werthe von $x$, $y$ auszudehnen ist, welche der in die beiden Bedingungen

$$0=\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 \text{ und } 1=\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2$$

immer zerlegbaren Ungleichheit

$$1>\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2$$

Genüge leisten, so wird das der Variabeln $u$ entsprechende Integrationsintervall durch die Werthe von $u=1$ bis $u=\infty$ angezeigt. Man hat demnach das Theorem

$$\iint dx\,dy\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\delta x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon y}{\beta}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}=\int_1^\infty u\,\frac{d\,F(u)}{du}\,du,$$

welches, wie wir später sehen werden, unmittelbar die Erweiterung auf ähnlich gebaute vielfache Integrale zulässt.

## §. 158.

**Reduction der Doppelintegrale $\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi\,(ax^m \pm by^n)\,x^{p-1}\,y^{q-1}\,dx\,dy$ auf eine einfache bestimmte Integrale*).**

Die über die Oberflächenbestimmung des dreiachsigen Ellipsoides angestellten Betrachtungen haben uns an einem

---

*) Vergl. Raabe. Crelle's Journal. Bd. 37. S. 345ff. Die von Raabe entwickelten gegenseitigen Beziehungen dieser, sowie die Betrachtung der Doppelintegrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\,(ax^m \pm by^n)\,x^{p-1}\,y^{q-1}\,dx\,dy$$

unterdrücken wir, weil die sich ergebenden Formeln nach unserm Dafürhalten nur ein mehr secundäres Interesse beanspruchen.

sehr wichtigen Beispiele gezeigt, dass unter Umständen die Untersuchung eines gegebenen Doppelintegrales als beendet angesehen werden kann, wenn die Reduction desselben auf einfache Integrale gelungen ist. In der That bildet nun in der Mehrzahl der Fälle nicht bloss bei den Doppelintegralen, sondern auch bei den vielfachen Integralen gerade eine derartige Reduction das Endziel der zu führenden Rechnungen. Es entspricht dies ganz dem Geiste jeder wissenschaftlichen Untersuchung; jedes Problem ist immer als gelöst zu betrachten, sofern sein Zusammenhang mit möglichst einfachen, aus vorangegangenen Betrachtungen schon bekannten, oder doch wenigstens einer niederen Stufe der wissenschaftlichen Entwicklung angehörigen und ebendesswegen dem menschlichen Geiste übersichtlicheren Elementen klar erkannt ist. In diesem Sinne nun wollen wir uns gegenwärtig mit den beiden Doppelintegralen

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(ax^m \pm by^n)\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy$$

beschäftigen. Dabei setzen wir die Constanten $m, n, a, b, p, q$ als positive, durch die nachfolgende Betrachtung aber noch näher zu bestimmende Grössen voraus, und $\varphi$ betrachten wir als eine solche beliebige Function von $ax^m \pm by^n$, für welche die Integrale nicht sinnlos werden.

Die obigen Integrale lassen sich als Folgerungen der einfacheren Integrale

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^m + y^n)\, dx\, dy \quad \text{und} \quad v = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^m - y^n)\, dx\, dy$$

ansehen, in denen $m$, $n$ und die Function $\varphi$ der Argumente $x^m + y^n$, $x^m - y^n$ den vorhingenannten Angaben gemäss zu wählen sind.

Wir behandeln zunächst das Integral $u$. Ersetzen wir die Veränderlichen $x$ und $y$ durch zwei neue $\gamma$, $\vartheta$, welche mit jenen durch die Gleichungen

$$x^m = \gamma^2 \cos\vartheta^2,\ y^n = \gamma^2 \sin\vartheta^2$$

verbunden sind, so ergiebt sich vorerst durch Elimination von $\gamma$

$$x^m \sin\vartheta^2 - y^n \cos\vartheta^2 = 0;$$

**mithin** wird, wenn man die Grenzen von $\vartheta$ nach denen von $x$ bestimmt, für $x = 0$ $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, und für $x = \infty$ erwirbt $\vartheta$ den Werth 0. Daraus aber folgt weiter, dass $\gamma$ ebenfalls von 0 bis $\infty$ sich bewegen muss, wenn $y$ dieses Intervall durchläuft. Nun ist den in §. 138. und §. 140. gegebenen Lehren zufolge

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial x}{\partial \gamma}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = -\frac{4}{m\,n}\,\frac{\gamma \sin\vartheta \cos\vartheta}{x^{m-1}}\,y - \frac{4}{m\,n}\,\frac{\gamma \sin\vartheta\cos\vartheta}{y^{n-1}}\,x$$

$$= -\frac{4}{m\,n}\,\frac{\gamma \sin\vartheta\cos\vartheta\,(\gamma^2\cos\vartheta^2 + \gamma^2\sin\vartheta^2)}{\gamma^2\cos\vartheta^2\,\gamma^2\sin\vartheta^2}\,\gamma^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}}\cos\vartheta^{\frac{2}{m}}\sin\vartheta^{\frac{2}{n}}$$

$$= -\frac{4}{m\,n}\,\gamma^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\sin\vartheta^{\frac{2}{n}-1}\cos\vartheta^{\frac{2}{m}-1},$$

und demnach wird $u$ in folgender Gestalt jetzt erscheinen

$$u = \frac{4}{mn}\int_0^\infty \varphi(\gamma^2)\,\gamma^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\,d\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta^{\frac{2}{n}-1}\cos\vartheta^{\frac{2}{m}-1}\,d\vartheta,$$

d. g. mit Beachtung der in §. 106. benutzten Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta^{\frac{2}{n}-1}\cos\vartheta^{\frac{2}{m}-1}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$$

und der Gleichung $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$

$$\text{I.}\quad u = 2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int_0^\infty \varphi(\gamma^2)\,\gamma^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\,d\gamma.$$

Aus dieser Formel aber lässt sich ohne Mühe eine allgemeinere Reductionsgleichung erzielen, sofern man in dem Doppelintegrale $u$ zuvörderst $x = x_1^p\sqrt[m]{a}$ und $y = y_1^q\sqrt[n]{b}$ substituirt, wo die von Null verschiedenen Constanten $a$, $b$, $p$, $q$ positiv sind, und wenn man überdies nach geschehener Reduction statt der Constanten $m$ und $n$ bezüglich die andern

$\frac{m}{p}$ und $\frac{n}{p}$ schreibt und schliesslich in dem Integral rechts $\gamma^2$ durch $\gamma$ ersetzt. So nämlich erhält man die Beziehung

$$\text{I}^a. \quad \int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(ax^m + by^n)\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{m\,n} \frac{1}{a^{\frac{p}{m}}\, b^{\frac{q}{n}}} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+\frac{q}{n}\right)} \int_0^\infty \varphi(\gamma)\, \gamma^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}-1}\, d\gamma.$$

In ähnlicher Weise wie vorhin führen wir jetzt das Integral $v$ auf ein Product von Gammafunctionen in ein einfaches Integral zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ zurück. Wir benutzen dazu die Substitutionen

$$x^m = \frac{\gamma \cos\vartheta^2}{\cos 2\vartheta},\quad y^n = \frac{\gamma \sin\vartheta^2}{\cos 2\vartheta},$$

vermöge deren wir vorerst die Grenzen der neuen Veränderlichen $\gamma$ und $\vartheta$ festzusetzen haben. In dieser Hinsicht nun wollen wir das Intervall von $\vartheta$ nach dem von $x$ bestimmen. Wird zu dem Behufe $\gamma$ eliminirt, so kommt

$$\text{tang}\,\vartheta^2 = \frac{y^n}{x^m},$$

und folglich wird für $x = 0$ und $x = \infty$ wegen des positiven $y$ und der ebenfalls positiven Zahlen $m$ und $n$ die Veränderliche $\vartheta$ bezüglich die Werthe $\frac{\pi}{2}$ und 0 erwerben. Daraus ergiebt sich mit Benutzung der Gleichung

$$\gamma = \frac{y^n \cos 2\vartheta}{\sin\vartheta^n},$$

dass der der untern Grenze $y = 0$ entsprechende Werth von $\gamma$ ebenfalls 0 heisst. Die obere Grenze von $\gamma$ hingegen erhält einen verschiedenen Werth, je nachdem nämlich $\vartheta$ von $\frac{\pi}{4}$ bis 0, oder von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{4}$ sich bewegt. Im erstern Falle wird für $y = \infty$ auch $\gamma = \infty$, im letztern Falle dagegen entspricht der Grenze $y = \infty$ der Werth $\gamma = -\infty$. Nennen

wir daher für den Augenblick die Grösse $\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \gamma} - \frac{\partial x}{\partial \gamma}\frac{\partial y}{\partial \vartheta}$ kurz $\Delta$, so wird $v$ die Form besitzen

$$v = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} d\vartheta \int_{0}^{\infty} d\gamma\, \Delta \,.\, \varphi(\gamma) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{0}^{-\infty} d\gamma\, \Delta \,.\, \varphi(\gamma).$$

Weil nun aber

$$\Delta = \frac{\gamma}{m x^{m-1}} \frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} \frac{2\cos\vartheta^2 - \cos 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} \frac{\sin\vartheta^2}{\cos 2\vartheta} \cdot \frac{1}{n y^{n-1}}$$

$$+ \frac{\gamma}{n y^{n-1}} \frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} \frac{2\sin\vartheta^2 - \cos 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} \frac{\cos\vartheta^2}{\cos 2\vartheta} \frac{1}{m x^{m-1}}$$

$$= \frac{\gamma \sin 2\vartheta\, (4\sin\vartheta^2 \cos\vartheta^2 - \cos 2\vartheta)}{m n\, x^{m-1}\, y^{n-1} \cos 2\vartheta\, (\cos 2\vartheta)^2}$$

$$= -\frac{2}{m n}\, \gamma^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} \frac{\cos\vartheta^{\frac{2}{m}-1} \sin\vartheta^{\frac{2}{n}-1}}{(\cos 2\vartheta)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}},$$

so entspringt mit Beachtung der in §. 5. unter 4. gegebenen Sätze leicht die Relation

$$v = \frac{2}{m n} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \frac{\cos\vartheta^{\frac{2}{m}-1} \sin\vartheta^{\frac{2}{n}-1}}{\cos 2\vartheta^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \int_{0}^{\infty} \gamma^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} \varphi(\gamma)\, d\gamma$$

$$+ \frac{2}{m n} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \frac{\sin\vartheta^{\frac{2}{m}-1} \cos\vartheta^{\frac{2}{n}-1}}{\cos 2\vartheta^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \int_{0}^{\infty} \varphi(-\gamma)\, \gamma^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1} d\gamma.$$

Diese Beziehung lässt sich übersichtlicher darstellen, wenn man $\cos 2\vartheta = \frac{1}{1+2\vartheta'}$ setzt; denn dadurch geben sich, wenn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$ angenommen wird, die beiden Integrale nach $\vartheta$ als Euler'sche Integrale der ersten Gattung zu erkennen, indem nach einigen leichten Rechnungen die Gleichungen entspringen

$$\frac{2}{m\,n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta\,\frac{\cos\vartheta^{\frac{2}{m}-1}\,\sin\vartheta^{\frac{2}{n}-1}}{\cos 2\vartheta^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{m\,n}\int_0^{\infty}\frac{\vartheta^{\frac{1}{n}-1}\,d\vartheta}{(1+\vartheta)^{1-\frac{1}{m}}}=\frac{1}{m\,n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)}$$

und

$$\frac{2}{m\,n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta\,\frac{\sin\vartheta^{\frac{2}{m}-1}\,\cos\vartheta^{\frac{2}{n}-1}}{\cos 2\vartheta^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{m\,n}\int_0^{\infty}\frac{\vartheta^{\frac{1}{m}-1}\,d\vartheta}{(1+\vartheta)^{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{m\,n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

Da nun aber $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$, so bezeichnen $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ echte Brüche und folglich wird vermöge der bekannten Gleichung $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$, $0<a<1$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)}=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\pi}\;\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{m}}{\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)},$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\sin\frac{\pi}{n}}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\sin\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\pi}.$$

Das Doppelintegral $v$ ist daher in folgender Form darstellbar

$$\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty}\varphi(x^m-x^n)\,dx\,dy=\frac{1}{m\,n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\pi}$$

$$\times\left[\sin\frac{\pi}{m}\int_0^{\infty}\gamma^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}\varphi(\gamma)d\gamma+\sin\frac{\pi}{n}\int_0^{\infty}\gamma^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}\varphi(-\gamma)d\gamma\right].$$

Benutzt man nun aber die bei dem Integrale $u$ Gl. I. angegebene Substitution, wobei freilich jetzt zu beachten ist, dass die dortigen Grössen $\frac{m}{p}$ und $\frac{n}{q}$ hier der Bedingung $\frac{m}{p}+\frac{q}{n}<1$ genügen müssen; so erhält man die allgemeinere Gleichung

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \varphi(ax^m-by^n)x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy=\frac{1}{m\,n\,a^{\frac{p}{m}}\,b^{\frac{q}{n}}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+\frac{q}{n}\right)\sin\left(\frac{p}{m}+\frac{q}{n}\right)\pi}$$

$$\times\left[\sin\frac{p\pi}{n}\int_0^\infty \gamma^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}-1}\varphi(\gamma)\,d\gamma+\sin\frac{q\pi}{n}\int_0^\infty \gamma^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}-1}\varphi(-\gamma)\,d\gamma\right].$$

## II. Kapitel.

## Die vielfachen Integrale im Allgemeinen und das Problem der Attraction der Ellipsoide.

### §. 159.

### Definition der vielfachen Integrale. Allgemeine Bemerkungen.

Wenn man die in §. 15. gegebene Erklärung eines Doppelintegrales mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet, so erkennt man unmittelbar, dass die dort gemachten Bemerkungen sich ohne Mühe auf beliebig viele, von einander unabhängige Veränderlichen ausdehnen lassen.

In der That, bezeichnet $f(x, y, z, u, \ldots)$ eine von $n$ Variabeln $x, y, z, u, \ldots$ abhängig veränderliche Grösse, in welcher jede der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ in Bezug auf die übrigen die Rolle eines Parameters spielt; so wird, wenn wir vorerst annehmen, dass die Function $f$ in Bezug auf $x$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ eine einwerthige und continuirliche Function ausdrückt, das Integral

$$\int_a^b f(x, y, z, u, \ldots)\,dx$$

im Allgemeinen eine von den Parametern $y, z, u, \ldots$ abhängige Grösse $\varphi(y, z, u, \ldots)$ vorstellen. Daraus aber folgt sogleich wieder, dass man immer das neue Integral

$$\int_{a'}^{b'} \varphi(y, z, u, \ldots) dy = \int_{a'}^{b'} dy \int_{a}^{b} f(x, y, z, u, \ldots) dx = \psi(z, u, \ldots)$$

bilden darf, wenn $\varphi(y, z, u, \ldots)$ von $y = a'$ bis $y = b'$ zu den eindeutigen und stetigen Functionen von $y$ gehört. Und da nun dieses neue Integral im Allgemeinen wieder von $z$ abhängt, so kann man, falls $\psi(z, u, \ldots)$ von $z = a''$ bis $z = b''$ einwerthig und stetig ist, die Existenz des Integrales

$$\int_{a''}^{b''} \psi(z, u, \ldots) dz = \int_{a''}^{b''} dz \int_{a'}^{b'} dy \int_{a}^{b} dx\, f(x, y, z, u, \ldots)$$

behaupten. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Processes gelangt man daher schliesslich zu einem vielfachen Integrale von der Form

$$\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dw \ldots \int_{a''}^{b''} dz \int_{a'}^{b'} dy \int_{a}^{b} f(x, y, z, u, \ldots, w)\, dx,$$

das, weil $n$ die Anzahl der unabhängig veränderlichen Grössen bedeuten soll, mit dem Namen eines $n$-fachen Integrales belegt wird*).

Wie man sieht, hätte die Ordnung der Integrationen auch mehrfach abgeändert werden können, wodurch man zu einem scheinbar ganz verschiedenen Resultate gelangt wäre. Allein man sieht auch hier wieder gestützt auf das in §. 15. bewiesene Theorem ohne Schwierigkeit mittelst vollständiger Induction ein, dass, wenn sämmtliche Grenzen des Integrales constant sind, die Ordnung der auszuführenden Integration beliebig ist. Bei veränderlichen Grenzen hingegen darf im Allgemeinen ein Abweichen von der einmal vorgeschriebenen Integrationsordnung nicht eintreten.

Erleidet die Function unter den Zeichen der Integrationen eine unendliche Discontinuität oder treten unendliche Integrationsgrenzen auf, so ist natürlich auch hier vorher zu untersuchen, ob das Integral nicht sinnlos wird. Die Mittel dazu sind wieder die früher gelehrten. Und namentlich verdient

*) Ein $n$-faches Integral werden wir oft abkürzend wie folgt schreiben:

$$\int^{(n)} f(x, y, \ldots, w)\, dx\, dy \ldots dw \quad \text{oder} \quad (n)\int f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots$$

auch hier der Maximum-Minimum-Satz besondere Erwähnung; denn dass derselbe ebenfalls bei vielfachen Integralen Statt findet, lässt sich leicht in einer der in §. 6. angestellten Betrachtung ganz analogen Weise zeigen.

Sei nämlich $f(x, y, z, \ldots)$ in das Product der beiden Functionen $\varphi(x, y, z, \ldots)$ und $\psi(x, y, z, \ldots)$ zerlegbar, von denen die eine, $\varphi(x, y, z, \ldots)$ z. B., innerhalb der vorgeschriebenen Integrationsintervalle $x=a$, $x=b$; $y=a'$, $y=b'$, ... niemals das Zeichen wechselt. Die Grössen $M$ und $N$ seien ferner bezüglich der algebraisch grösste und kleinste Werth von allen Maximis und Minimis, welche der andere Factor $\psi(x, y, z, \ldots)$ innerhalb der Grenzen $(a, b)$; $(a', b')$, ... annehmen wird.

Alsdann müssen offenbar die beiden Differenzen

$$M - \psi(x, y, z, \ldots) \quad \text{und} \quad \psi(x, y, z, \ldots) - N$$

stets positiv sein und sonach auch die Producte

$$[M - \psi(x, y, z, \ldots)]\, \varphi(x, y, z, \ldots)$$

und

$$[\psi(x, y, z, \ldots) - N]\, \varphi(x, y, z, \ldots)$$

immer das nämliche Zeichen führen. Bildet man nun die Integrale

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} \ldots [M - \psi(x, y, z, \ldots)]\, \varphi(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots$$

und

$$\int_a^b \int_{a'}^{b'} \ldots [\psi(x, y, z, \ldots) - N]\, \psi(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

beachtet dann weiter, dass den in §. 5, 1. gegebenen Lehren zufolge durch Ausführung der einzelnen Integrationen stets neue Integrale entstehen, deren Vorzeichen bei der Integration nach der jedesmal folgenden Veränderlichen innerhalb der entsprechenden Grenzen unzweideutig bestimmt sind und erwägt endlich, dass die unter 2. und 3. §. 5. bewiesenen Sätze auch hier Geltung besitzen: so erkennt man ohne Weiteres die Richtigkeit unserer obigen Behauptung.

Nicht unerwähnt möge ferner die Bemerkung bleiben, dass die Differentiation nach einem Parameter u. s. w. auch bei vielfachen Integralen gestattet ist. Selbstverständlich dürfen

dabei die für die Anwendung dieser Operationen nothwendigen Bedingungen, wie sie aus der Lehre vom einfachen Integrale leicht abstrahirt werden können, nicht ausser Acht gelassen werden.

Endlich noch wollen wir die Bemerkung nicht unterdrücken, dass der äusserst wichtige Satz von der Zerlegung eines Integrales in Theilintegrale auch auf vielfache Integrale sich ausdehnen lässt. Der Beweis selbst erfordert nur eine wiederholte Anwendung der in §. 5. unter 6. geführten Untersuchung; thatsächlich haben wir übrigens von diesem Satze schon bei den Doppelintegralen Gebrauch gemacht*).

## §. 160.

### Geometrische Bedeutung der dreifachen Integrale.

Wenn man bei einem vielfachen Integrale die Anzahl der von einander unabhängigen Variabeln auf drei reducirt, also speciell ein sogenanntes dreifaches Integral betrachtet; so lässt sich diesem, wie schon aus den Elementen der Integralrechnung bekannt ist, mit der grössten Leichtigkeit eine räumliche Bedeutung beilegen. In der That, die in den Paragraphen 144. und 145. gepflogene Untersuchung hat uns gelehrt, dass der dort näher beschriebene körperliche Raum $V$ bei Voraussetzung eines orthogonalen Coordinatensystems durch das Doppelintegral

$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\, dy$$

sich darstellen lässt. Da nun aber $Z - z_0$ als das Resultat einer zwischen den Grenzen $z = z_0$ und $z = Z$ vollzogenen Integration angesehen werden kann, so darf man auch schreiben:

$$V = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} dx\, dy\, dx.$$

Und weil anderseits $V$ die Grenze des Ausdruckes $\Sigma \Delta x \Delta y (Z - z_0)$ vorstellt und ebenso $Z - z_0$, d. h. $\int_{z_0}^{Z} dz$ mit $\lim \Sigma \Delta z$ iden-

*) Siehe §. 96; 153.

tisch ist; so wird man offenbar auch folgende Grenzgleichung bilden können:

$$\int\limits_{x_0}^{X}\int\limits_{y_0}^{Y}\int\limits_{z_0}^{Z} dx\, dy\, dx = \lim \Sigma\Sigma\Sigma\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z (= \lim \Sigma \Delta x \Delta y \Delta z).$$

Das dreifache Integral erscheint mithin hiernach als der Inbegriff der unendlich vielen unendlich kleinen Parallelepipeden $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$, welche man erhält, wenn man parallel mit jeder der Coordinatenebenen den zu berechnenden körperlichen Raum ohne Aufhören durch Ebenen in Elemente sich zerschnitten denkt.

Das soeben betrachtete Integral kann augenscheinlich nicht als der Repräsentant der allgemeinsten Form eines dreifachen Integrales angesehen werden. Diese ergiebt sich vielmehr, wenn man annimmt, dass jeder Punkt des unendlichen Raumes noch mit einem Factor $f(x, y, z)$ behaftet ist, dass also diese Gleichung besteht

$$\int\limits_{x_0}^{X}\int\limits_{y_0}^{Y}\int\limits_{z_0}^{Z} dx\, dy\, dz = \lim \Sigma f(x, y, z)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z.$$

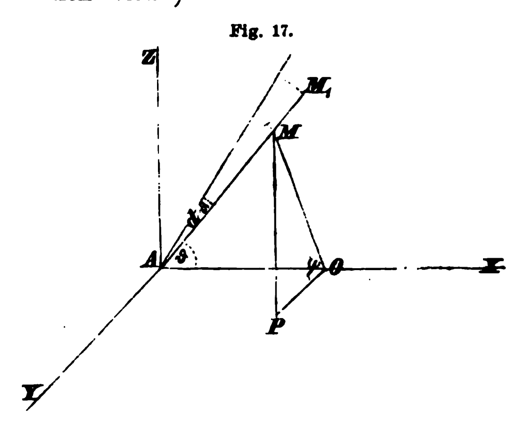
Nach mechanischen Principien gedeutet stellt alsdann der Factor $f(x, y, z)$ die an der jedesmaligen Raumstelle $(x, y, z)$ Statt findende Dichtigkeit vor, und folglich repräsentirt nunmehr das dreifache Integral die in dem Volumen $V$ enthaltene Masse.

Von andern als den vorhin benutzten rechtwinkligen Coordinaten werden bei den Anwendungen der Infinitesimalrechnung bekanntlich am häufigsten die räumlichen Polarcoordinaten in Betracht gezogen. Mit wenigen Worten wollen wir daher jetzt die alsdann Statt habende Form des dreifachen Integrales uns zu vergegenwärtigen suchen. Zu dem Behufe stelle $YAX$ die Polarebene, $AX$ die Polarachse und $A$ den Pol des Coordinatensystems vor. Den vom Pol nach irgend einem Raumpunkte gezogenen Radiusvector ferner wollen wir mit $\varrho$ bezeichnen, den von ihm und der Polarachse gebildeten Winkel $\vartheta$ nennen und unter $\varphi$ den Winkel verstehen, welchen die durch $\varrho$ und $AX$ gelegte Ebene mit der Polarebene einschliesst. Alsdann gelten augenscheinlich die nachstehenden Gleichungen

$$AO = \varrho \cos\vartheta,\ PO = MO \cos\varphi = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi,\ MP = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi,$$

in welchen man den in §. 152. gemachten Bemerkungen gemäss $\varrho$ von 0 bis $+\infty$, $\vartheta$ von 0 bis $\pi$ und $\varphi$ endlich von 0 bis $2\pi$ wählen wird*).

Fig. 17.




Lassen wir nun die irgend einen Punkt $M$ bestimmenden Veränderlichen $\varrho$, $\vartheta$, $\varphi$ beziehungsweise in $\varrho + d\varrho$, $\vartheta + d\vartheta$, $\varphi + d\varphi$ übergehen, so legen die Durchschnitte der ihnen entsprechenden geometrischen Gebilde mit den ursprünglichen ein Körperelement fest, das zwar krummflächig ist, jedoch wegen der unendlich kleinen Zunahmen von $\varrho$, $\vartheta$, $\varphi$ als ein rechtwinkliges Parallelepiped vorgestellt werden darf, dessen Kanten $d\varrho$, $\varrho \sin\vartheta\, d\varphi$, $\varrho\, d\vartheta$ heissen und dessen Inhalt demnach die Grösse $\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi$ besitzt. Durch Summation sämmtlicher in einem irgendwie begrenzten Raume $V$ enthaltenen Elemente gewinnen wir daher das dreifache Integral

$$V = \iiint \varrho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\varrho.$$

Und setzen wir nun hierbei voraus, dass der Pol $A$ im Innern des Volumens $V$ sich befindet und dass der Endwerth von $\varrho$ $r$ heisst, wo $r$ eine Function von $\vartheta$ und $\varphi$ ausdrückt; so erhalten wir die Beziehung

$$V = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho = \frac{1}{3}\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} r^3 \sin\vartheta\, d\varphi.$$

*) Würde man den Bogen $\vartheta$ von 0 bis $2\pi$ und demnach $\varphi$ von 0 bis $\pi$ sich bewegen lassen, so hätte man dem Körperelement bald das Zeichen plus, bald das Zeichen minus beizulegen.

Liegt dagegen der Pol ausserhalb des Volumes $V$, so hat man, wenn $r_0$ und $r$ die Punkte bezeichnen, in denen der Radiusvector $\varrho$ die den Körper $V$ begrenzende Oberfläche schneidet, in Bezug auf $\varrho$ von $\varrho = r_0$ bis $\varrho = r$ zu integriren. Die Integration nach $\vartheta$ hingegen wird sich von $\vartheta = \vartheta_0$ bis $\vartheta = \vartheta_1$ erstrecken, wenn $\vartheta_0$ und $\vartheta_1$ die Grenzwerthe von $\vartheta$ heissen und die offenbar Functionen von $\varphi$ ausdrücken. Das auf $\varphi$ bezügliche Integrationsintervall endlich wird durch die Grössen $\varphi_0$ und $\varphi_1$ angedeutet werden, wenn diese die beiden den Körper $V$ begrenzenden äussersten Ebenen bestimmen. Man hat also jetzt die Gleichung

$$V = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta \int_{r_0}^{r} \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho = \tfrac{1}{3} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (r^3 - r_0^3) \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Wie oben bei den rechtwinkligen Coordinaten, wird auch hier in gewissen Fällen noch eine Function $f(\varrho, \vartheta, \varphi)$ mit dem Raumelement $r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\varrho$ multiplicirt sein.

## Attraction eines homogenen Ellipsoides auf einen Punkt.

### §. 161.

### Vorerinnerungen.

Ausser geometrischen Fragen sind es namentlich physikalische Probleme, denen nicht bloss die Integralrechnung überhaupt, sondern auch ihr besonderer Theil, die Theorie der bestimmten Integrale, den Anstoss zur Entwicklung mehrerer ihrer schönsten Resultate verdankt. So hat z. B. das Problem von den schwingenden Saiten den ersten Anstoss zur Bildung der trigonometrischen Reihen gegeben, durch die dann einerseits Fourier, der Entdecker ihrer wahren Natur, vermöge deren sie zur Darstellung ganz willkürlicher Functionen innerhalb gegebener Grenzen geeignet sind, auf die ungemein wichtigen, nach ihm benannten Doppelintegrale geführt wurde und die anderseits für Dirichlet die Veranlassung geworden sind zur Entwicklung jener äusserst eleganten und fruchtbaren Theoreme über die Grenzwerthe, welche gewisse bestimmte Integrale annehmen, wenn ein in diesen enthaltener Parameter bis ins Unendliche wächst. Durch Dirichlet's Be-

schäftigung mit physikalischen Problemen wurde ferner für die Theorie der bestimmten Integrale eine neue Methode zur Reduction vielfacher Integrale gewonnen, deren Wesen wir später auseinandersetzen und mit deren Hülfe wir nach Dirichlet's Vorgange ein von ihm entdecktes Theorem über ein vielfaches Integral entwickeln werden, das durch seine Eleganz und ausserordentliche Fruchtbarkeit für weitere Folgerungen sich auszeichnet. Auch das berühmte Problem der Attraction homogener Ellipsoide, mit dem wir uns jetzt zu beschäftigen gedenken, ist nicht ohne Bedeutung für die Theorie der bestimmten Integrale; wir werden sehen, dass die Bestimmung der Anziehung, welche ein in endlicher Entfernung befindlicher Punkt von einem homogenen Ellipsoide erleidet, die Ermittlung eines dreifachen Integrales erfordert, dessen Reduction auf ein Doppelintegral zwar leicht, dessen weitere Behandlung aber mit nicht unerheblichen Schwierigkeiten verknüpft ist. Um ein klares Verständniss der uns gestellten Aufgabe zu erzielen, halten wir die Mittheilung einiger der Hauptsätze, auf denen die Attractionstheorie beruht, für sehr zweckmässig.

Seien desshalb $m$ und $m'$ die Massen zweier materiellen Punkte, deren Entfernung $r$ heissen möge; die Grösse der Anziehung, welche irgend zwei Masseneinheiten in der Entfernung $r$ aufeinander ausüben, sei ferner irgend eine Function $\varphi(r)$ dieser Distanz, und endlich drücke $mm'\varphi(r)$ das Gesetz aus, nach welchem die gegenseitige Anziehung der beiden Massen $m$ und $m'$ erfolgt*). Dies vorausgesetzt, denken wir

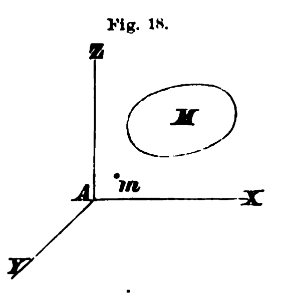
*) Für das Newton'sche Attractionsgesetz würde man also den Ausdruck $\frac{\varkappa mm'}{r^2}$ haben, wenn die Constante $\varkappa$ die in der Entfernung 1 zwischen zwei Masseneinheiten Statt findende Anziehung ausdrückt; für die cubische Anziehung ferner wäre $\varphi(r) = \frac{\varkappa}{r^3}$. Die Masseneinheiten können dabei auch so gewählt werden, dass $\varkappa$ den Werth 1 erhält. In der That, die Wirkung zwischen den in der Entfernung 1 befindlichen Massen $m$ und $m'$ wird bei Zugrundelegung der ursprünglichen Maasseinheit für die Kräfte durch $\varkappa mm'$ vorgestellt, also die zwischen dem $\lambda^{ten}$ Theile der Massen $m$ und $m'$ wirkende Kraft durch $\frac{\varkappa mm'}{\lambda^2}$. Setzt

uns eine beliebige Masse $M$, deren Dichtigkeit $k$ entweder constant, oder veränderlich sein kann, und einen von $M$ angezogenen Punkt, der die Masse $m$ besitzen möge. Bezeichnet nun $du$ irgend ein Volumenelement der anziehenden Masse, also $kdu$ die Masse desselben: so wird dem Vorhergehenden zufolge die Grösse der Wirkung zwischen $du$ und dem Punkte $m$ durch den Ausdruck $mkdu\varphi(r)$ dargestellt. Und die Gesammtanziehung, welche der Punkt $m$ von der Masse $M$ erfährt, werden wir in der zweckmässigsten Weise erzielen, wenn wir jede Elementarwirkung nach drei auf einander senkrecht stehenden Achsen uns zerlegt denken, alle derselben Coordinatenachse parallelen Elementarcomponenten zu einem Inbegriff vereinigen und aus den so gewonnenen Seitenkräften $X, Y, Z$ die Resultante $R$ vermöge der Formel $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ berechnen. Nennen wir also $a, b, c$ die senkrechten Abstände des Punktes $m$ von drei sich rechtwinklig schneidenden Ebenen, sowie $x, y, z$ die Coordinaten des Elementes $du$ in Bezug auf das gewählte Achsensystem, und bezeichnen wir schliesslich mit $\lambda, \mu, \nu$ die drei Winkel, welche die Verbindungsgerade $r$ des Punktes $m$ und des Elementes $du$ mit den Coordinatenachsen bildet: so erhalten wir wegen

$$\cos\lambda = \frac{x-a}{r}, \quad \cos\mu = \frac{y-b}{r},$$

$$\cos\nu = \frac{z-c}{r}$$

Fig. 18.




für die beziehungsweise den Achsen der $x, y, z$ parallelen Componenten $X, Y, Z$ die symmetrisch geformten Ausdrücke

---

man nun $m = m' = 1$ und nimmt $\frac{1}{\lambda}$ als Maasseinheit der Masse, so wird die Kraft $\frac{\varkappa}{\lambda^2}$, welche also im Stande ist, der alten Masseneinheit während einer Zeiteinheit die Geschwindigkeit $\frac{\varkappa}{\lambda^2}$ mitzutheilen, dem $\lambda^{ten}$ Theile der Masseneinheit offenbar eine $\lambda$mal so grosse Geschwindigkeit einprägen können.

$$X = \int mk\varphi(r) \frac{x-a}{r} du, \quad Y = \int mk\varphi(r) \frac{y-b}{r} du,$$

$$Z = \int mk\varphi(r) \frac{z-c}{r} du.$$

Daraus aber fliesst sofort, dass man behufs der weitern Untersuchung bloss die eine, z. B. die der $x$-Achse parallele Seitenkraft $X$ in Betracht zu ziehen braucht. Auch dies leuchtet unmittelbar ein, dass wir die Masse $m$ des Punktes $(a, b, c)$ immer $= 1$ setzen dürfen. Ausser diesen Vereinfachungen werden wir noch eine andere dadurch gewinnen, dass wir die anziehende Masse homogen, also die Dichtigkeit derselben constant und zwar $= 1$ voraussetzen. Der Ausdruck, mit dessen Untersuchung wir uns jetzt zu beschäftigen haben, heisst demnach

$$X = \int \varphi(r) \frac{x-a}{r} du.$$

oder, weil bei einem rechtwinkligen Coordinatensysteme $du = dx\, dy\, dz$ ist,

$$X = \int\int\int \frac{x-a}{r} \varphi(r)\, dx\, dy\, dz,$$

und man begreift ohne Weiteres, dass die einzelnen Intervalle, innerhalb deren diese drei Integrationen auszuführen sind, durch die Begrenzung der anziehenden Masse $M$ bestimmt werden. Selbstverständlich kann es dabei geschehen, dass in Folge gewisser Einbiegungen der die Masse $M$ begrenzenden Fläche das dreifache Integral in Theilintegrale zu zerfällen ist*).

Beachtet man nun, dass für $r$, welches immer absolut genommen wird, die Gleichung besteht

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2;$$

so ergiebt sich unmittelbar die Beziehung

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r},$$

und foglich wird

$$X = \int\int\int \varphi(r) \frac{\partial r}{\partial x}\, dx\, dy\, dz.$$

*) Vergl. §. 135, Schluss.

Den in §. 11. angestellten Betrachtungen zufolge aber existirt stets eine Function $f(r)$, die nach $r$ derivirt den Differentialquotienten $\varphi(r)$ besitzt. Mit Benutzung dieses Satzes lässt sich daher $X$ in folgender Form schreiben

$$X = \int\int dy\, dz \int \frac{d\, f(r)}{d\, r} \frac{\partial\, r}{\partial x} dx,$$

d. g., weil $\frac{d\, f(r)}{dr} \frac{\partial\, r}{\partial x}$ mit der partiellen Abgeleiteten von $f(r)$ nach $x$ gleichbedeutend ist,

$$X = \int\int dy\, dz \int \frac{\partial f(r)}{\partial x} dx.$$

Und heissen nun $x_1$ und $x_2$ die Grenzen des Integrales nach $x$, bezeichnen dann ferner $r_1$ und $r_2$ die $x = x_1$ und $x = x_2$ entsprechenden Werthe des Radicals

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}:$$

so reducirt sich wegen

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(r)}{\partial x} dx = f(r_2) - f(r_1)$$

$X$ auf das Doppelintegral

$$X = \int\int dy\, dz \{f(r_2) - f(r_1)\}.$$

## §. 162.

### Theorem Ivory's.

Die vorhin gefundene allgemeine Gleichung für $X$ wollen wir nunmehr unter der Voraussetzung einer nähern Betrachtung unterwerfen, dass die Masse $M$ die Gestalt eines dreiachsigen Ellipsoides, dessen Halbachsen $\alpha, \beta, \gamma$ heissen sollen, besitzt, dass also der Umfang der Integrationen durch die Ungleichheit

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 < 1$$

regulirt wird. Dieser Annahme gemäss haben wir mithin zunächst die Frage zu beantworten, für welche Combinationen $yz$ das Element $dx\,dy\,dz$ überhaupt zu einem unendlich dünnen Prisma mit der Basis $dy\; dz$ durch die Integration nach $x$ sich erweitert und innerhalb welcher Grenzen alsdann das $x$ sich

zu bewegen hat. Geben wir zu dem Behufe der obigen Ungleichheit die Form

$$1. \qquad x^2 < \alpha^2 \left[1 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2\right],$$

so erkennen wir unmittelbar, dass Prismen der genannten Art nur existiren, sofern der mit $\alpha^2$ multiplicirte Ausdruck positiv ist, so lange also $\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}$ nicht grösser, als 1 wird, eine Bedingung, die wir in Zeichen bekanntlich durch

$$2. \qquad \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 < 1$$

darstellen. Und da nun der vorhergehenden Ungleichheit zufolge $x$ numerisch den Werth $x' = \alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}}$ nicht überschreiten darf, so liegt dasselbe augenscheinlich zwischen $x_1 = -x'$ und $x_2 = +x'$. Diese Werthe nach den oben gegebenen Vorschriften in das zweifache Integral für $X$ eingesetzt machen dasselbe offenbar von den sechs Constanten $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ abhängig, und zwar erscheinen $a, b, c$, welche die Lage des angezogenen Punktes definiren, sowie $\alpha$ bloss in der Function $f(r)$; die andern dagegen zeigen sich ausserdem noch in den Grenzen des Doppelintegrales, indem die auf $y$ und $z$ bezüglichen Integrationsintervalle aus der Ungleichheit 2. zu entwickeln sind. Diesen letztern Umstand können wir indess sofort beseitigen, wenn wir statt der Variabeln $y$ und $z$ die neuen $t$ und $u$, welche mit jenen durch die Gleichungen $y = \beta t$ und $z = \gamma u$ verbunden sind, substituiren. Dadurch nämlich verwandelt sich $X$ in das Integral

$$X = \beta\gamma \iint dt\, du\, [f(r_2) - f(r_1)],$$

dessen Grenzen der Bedingung $t^2 + u^2 < 1$ gemäss zu bestimmen sind. Vermöge der angewendeten Substitution aber nehmen $x'$ und $r$ die Gestalt an

$$x' = \alpha \sqrt{1 - t^2 - u^2},\ r = \sqrt{(x-a)^2 + (\beta t - b)^2 + (\gamma u - c)^2},$$

und daher wird

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\mp \alpha \sqrt{1 - t^2 - u^2} - a)^2 + (\beta t - b)^2 + (\gamma u - c)^2}$$

$$= \sqrt{\begin{Bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + \alpha^2 - 2b\beta t - 2c\gamma u + (\beta^2 - \alpha^2)t^2 \\ + (\gamma^2 - \alpha^2)u^2 \pm 2a\alpha\sqrt{1 - t^2 - u^2} \end{Bmatrix}},$$

wobei die obern Zeichen auf $r_1$, die untern hingegen auf $r_2$ sich beziehen. Da nun mit Ausnahme von $\beta$ und $\gamma$ sämmtliche Constanten bloss in den beiden Argumenten $r_1$ und $r_2$ der Function $f(r)$ vorkommen, so muss offenbar das Doppelintegral

$$\iint dt\, du\, [f(r_2) - f(r_1)]$$

unverändert bleiben, wenn mit der Variation der Constanten eine Aenderung der Werthe von $r_1$ und $r_2$ nicht verbunden ist. Wäre es also möglich, sechs neue Constanten $a'$, $b'$, $c'$, $\alpha'$, $b'$, $\gamma'$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen

$$3.\quad a^2 + b^2 + c^2 + \alpha^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 + \alpha'^2;$$

$$4.\quad a\alpha = a'\alpha',\ b\beta = b'\beta',\ c\gamma = c'\gamma';$$

$$5.\quad \beta^2 - \alpha^2 = \beta'^2 - \alpha'^2,\ \gamma^2 - \alpha^2 = \gamma'^2 - \alpha'^2$$

befriedigt werden: so würde zwischen den beiden Constantengruppen entsprechenden Grössen $X$ und $X'$ die einfache Beziehung bestehen

$$6.\quad \frac{X}{X'} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'},$$

aus der wir alsdann ohne Mühe ein wichtiges Theorem entwickeln könnten.

Eine derartige Bestimmung nun ist in der That und zwar nur auf eine Weise möglich. Vermöge der in 4. ausgedrückten Gleichungen nämlich lässt sich Gleichung 3. zunächst in folgender Form schreiben

$$a^2 + b^2 + c^2 + \alpha^2 = \alpha'^2 + \frac{a^2\alpha^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2\beta^2}{\beta'^2} + \frac{c^2\gamma^2}{\gamma'^2}$$

und hieraus entspringt

$$\alpha'^2 - \alpha^2 + a^2\frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{\alpha'^2} + b^2\frac{\beta^2 - \beta'^2}{\beta'^2} + c^2\frac{\gamma^2 - \gamma'^2}{\gamma'^2} = 0,$$

d. g. mit Berücksichtigung der Relationen 5.:

$$\alpha'^2 - \alpha^2 + a^2\frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{\alpha'^2} + b^2\frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{\beta'^2} + c^2\frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{\gamma'^2} = 0.$$

Wie man sieht, kann dieser Gleichung durch die Annahme $\alpha'^2 = \alpha^2$, d. h. $\alpha' = \alpha$ Genüge geleistet werden. Beachtet man jedoch, dass durch diese Lösung auch die übrigen gestrichenen Constanten mit den ihnen entsprechenden ursprünglichen Grössen zusammenfallen würden: so ist dieselbe für uns ohne Bedeutung und bedarf daher keiner Berücksichtigung.

Daraus aber fliesst sogleich weiter, dass die Bestimmung von $\alpha'$ und somit auch — wie unmittelbar aus dem blossen Anblicke der Gleichungen 3.—5. erhellt — die der übrigen Constanten die Auflösung der Gleichung

$$1 = \frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\beta'^2} + \frac{c^2}{\gamma'^2}$$

erfordert. Behufs deren Behandlung ist es nun zweckmässig, unter den Halbachsen $\alpha, \beta, \gamma$ des gegebenen Ellipsoides eine gewisse Rangordnung eintreten zu lassen, und zwar empfiehlt sich hier wegen der Gleichungen 5. die folgende $\alpha < \beta < \gamma$. Setzen wir dann ferner um der Kürze willen

$$\beta^2 - \alpha^2 = \beta'^2 - \alpha'^2 = \delta^2 \text{ und } \gamma^2 - \alpha^2 = \gamma'^2 - \alpha'^2 = \varepsilon^2,$$

so wird

$$1 = \frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\alpha'^2 + \delta^2} + \frac{c^2}{\alpha'^2 + \varepsilon^2},$$

und daher ist $\alpha'^2$ die Wurzel einer cubischen Gleichung $F(\alpha'^2) = 0$. Offenbar ergiebt sich dieselbe sofort durch Beseitigung der Brüche, indess empfiehlt sich vorerst noch die Beibehaltung der vorhin erlangten Form der Gleichung, weil man aus ihr ohne Mühe die Natur der Wurzeln erkennen kann. Setzen wir nämlich für den Augenblick $\alpha'^2 = \psi$ und $-1 + \frac{a^2}{\psi} + \frac{b^2}{\psi + \delta^2} + \frac{c^2}{\psi + \varepsilon^2} = f(\psi) = 0$, so werden die beiden Functionalwerthe $f(0)$ und $f(\infty)$ augenscheinlich verschiedene Vorzeichen erwerben. Die gleiche Eigenschaft besitzt somit auch die Seite $F(\psi)$ der aus $f(\psi)$ zu bildenden cubischen Gleichung, und daher muss diese einem bekannten Theoreme*) zufolge zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ wenigstens eine reelle Wurzel enthalten. Nun bezeichnet aber, so lange $\psi$ nicht mit Null zusammenfällt oder um ein unendlich Kleines von Null abweicht, $f(\psi)$ offenbar eine abnehmende stetige Function von $\psi$, mithin muss, wenn $\psi$ von Null bis $+\infty$ sich bewegt, innerhalb dieses Intervalles einmal und nur einmal ein Werth von $\psi$ erscheinen, der $f(\psi)$ auf Null reducirt. Gefunden wird dieser Werth von $\psi$ und demnach auch der von $\alpha'$ natürlich durch Auflösung der cubischen Gleichung $F(\psi) = 0$.**)

*) Vergl. Serret. Cours d'algèbre supérieure. 3. Edition, t. I., p. 252—253.

**) Die beiden andern Wurzeln von $F(\psi) = 0$ sind negativ; denn

Ein ganz ähnliches Verhalten, wie es so eben für die der $x$-Achse parallele Attractionscomponente $X$ nachgewiesen ist, zeigen auch die beiden Seitenkräfte $Y$ und $Z$. Betrachten wir z. B. die Componente $Y$, so erhalten wir durch Innehaltung des früher beschriebenen Gedankenganges zunächst die Beziehung

$$Y = \iint dx\, dz \cdot [f(r_2) - f(r_1)],$$

wo $r_1$ und $r_2$ die beiden den Substitutionen

$$y_1 = -\beta \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2},\ y_2 = +\beta \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2}$$

entsprechenden Werthe des Radicals

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

bezeichnen. Schreiben wir nun wieder $\gamma u$ statt $z$ und ebenso $\alpha t = x$, so entspringt

$$Y = \alpha\gamma \iint dt\, du\, [f(r_2) - f(r_1)],$$

$$\left.\begin{matrix} r_2 \\ r_1 \end{matrix}\right| = \sqrt{\left\{\begin{matrix} a^2+b^2+c^2+\beta^2-2a\alpha t-2c\gamma u+(\alpha^2-\beta^2)t^2+(\gamma^2-\beta^2)u^2 \\ \pm 2b\beta\sqrt{1-t^2-u^2} \end{matrix}\right\}}.$$

Die Beziehungen 3.—5. gehen daher jetzt in die folgenden über

$$a^2+b^2+c^2+\beta^2 = a'^2+b'^2+c'^2+\beta'^2;\ a\alpha = a'\alpha',\ b\beta = b'\beta',\ c\gamma = c'\gamma';$$

$$\alpha^2-\beta^2 = \alpha'^2-\beta'^2,\ \gamma^2-\beta^2 = \gamma'^2-\beta'^2,$$

aus denen ganz in der frühern Weise wieder die Gleichung

$$1 = \frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\alpha'^2+\delta^2} + \frac{c^2}{\alpha'^2+\varepsilon^2}$$

ermittelt werden kann. Und daher schliesst man nun sofort, dass mit dem Beweise der Beziehung $X : X' = \beta\gamma : \beta'\gamma'$ zugleich die Richtigkeit der Relationen

$$Y : Y' = \alpha\gamma : \alpha'\gamma',\quad Z : Z' = \alpha\beta : \alpha'\beta'$$

dargethan ist.

---

setzt man in $f(\psi)$ statt $\psi$ nach einander $-\vartheta$ und $\vartheta - \delta^2$, sowie $-\vartheta$ und $\vartheta - \varepsilon^2$, wo $\vartheta$ eine unendlich kleine positive Zahl bedeutet; so findet sowohl zwischen den Grenzen $-\vartheta$ und $\vartheta - \delta^2$, als auch innerhalb des Intervalls $(-\vartheta,\ \vartheta - \varepsilon^2)$ ein Zeichenwechsel, zwischen den Grenzen $-\vartheta$ und $-\vartheta - \delta^2$ hingegen eine Zeichenfolge Statt. Und daher liegt dem oben benutzten Theoreme zufolge in jedem der Intervalle $(0, -\delta^2)$ und $(0, -\varepsilon^2)$ eine Wurzel der cubischen Gleichung $F(\psi) = 0$.

Welche Bedeutung aber, so fragen wir jetzt weiter, besitzen diese Gleichungen? Um hierüber Aufklärung uns zu verschaffen, beachten wir zunächst die oben gefundenen Beziehungen

$$1 = \frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\beta'^2} + \frac{c^2}{\gamma'^2} \text{ und } 1 = \frac{a'^2}{\alpha^2} + \frac{b'^2}{\beta^2} + \frac{c'^2}{\gamma^2}.$$

Offenbar sagen dieselben, dass von den einander entsprechenden Punkten $(a, b, c)$ und $(a', b', c')$, welche correspondirende Punkte genannt werden, der erstere auf der Oberfläche eines mit den Halbachsen $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ construirten Ellipsoides $[\alpha', \beta', \gamma']$, der letztere hingegen auf der Oberfläche des gegebenen Ellipsoides $[\alpha, \beta, \gamma]$ sich befindet. Wegen der Gleichungen 5. oder — was dasselbe ist — wegen der folgenden $\alpha'^2 - \alpha^2 = \beta'^2 - \beta^2 = \gamma'^2 - \gamma^2$ besitzen die Hauptschnitte dieser beiden Ellipsoide dieselben Brennpunkte; die Quadrate ihrer Halbachsen nehmen um gleichviel zu oder ab, und folglich umschliessen die Ellipsoide einander. Derartige Ellipsoide nennt man confocale Ellipsoide. Liegt nun der Punkt $(a, b, c)$ ausserhalb des Ellipsoides $[\alpha, \beta, \gamma]$, so ist der correspondirende Punkt $(a', b', c')$ in Bezug auf das mit $[\alpha, \beta, \gamma]$ confocale Ellipsoid $[\alpha', \beta', \gamma']$ ein innerer und umgekehrt. Die Frage nach der Grösse der Attractionscomponente für einen im Innern des Ellipsoides gelegenen Punkt aber war früher ein weit einfacheres Problem, als die Bestimmung der Attractionscomponente für den Fall eines im äussern Raume befindlichen angezogenen Punktes. Mit Hülfe der oben bewiesenen Beziehungen zwischen den Attractionscomponenten der beiden confocalen Ellipsoide $[\alpha, \beta, \gamma]$ und $[\alpha', \beta', \gamma']$ in Bezug auf die correspondirenden Punkte $(a, b, c)$ und $(a', b', c')$ konnte man daher das schwierigere Problem des äussern Punktes ohne Mühe auf das einfachere des innern Punktes zurückführen. Dieses Theorem verdankt man dem englischen Mathematiker Ivory, freilich nicht in der Allgemeinheit, in welcher es hier bewiesen wurde. Ivory hat die Richtigkeit seines Lehrsatzes nur für den Fall des Newton'schen Attractionsgesetzes dargethan, die Bemerkung dagegen, dass dieses Theorem für jedes Attractionsgesetz in Kraft bleibt, hat zuerst Poisson gemacht.*)

*) Vergl. beispielsweise dessen Mechanik. Thl. 1. §. 109.

## §. 163.

**Bestimmung von $X$ für den Fall eines innern Punktes unter Voraussetzung des Newton'schen Attractionsgesetzes.**

Wenn die gegenseitige Anziehung des Punktes $(a, b, c)$ und des Ellipsoides $[\alpha, \beta, \gamma]$ nach Newton's Gesetze erfolgt, wenn also $\varphi(r) = \frac{x}{r^2}$ oder einfacher gleich $\frac{1}{r^2}$ ist; so wird $f(r) = -\frac{1}{r}$, und folglich kann wegen der Wurzel unter der Wurzel, in welcher Form bei den oben gegebenen Werthen von $r_1$ und $r_2$ $f(r)$ jetzt erscheint, von einer Integration des Ausdruckes $X = \iint dy\, dz\, [f(r_2) - f(r_1)]$ weder nach $y$, noch nach $z$ die Rede sein. Dies ist offenbar nur möglich, wenn die Anziehung von einer ungeraden Potenz der umgekehrten Entfernung abhängt. Bei Voraussetzung des Newton'schen Gravitationsgesetzes müssen wir mithin die Bestimmung von $X$ auf einem andern Wege versuchen, also z. B. einmal nachsehen, ob sich ein günstiger Erfolg vielleicht durch die Wahl von Polarcoordinaten statt der rechtwinkligen erzielen lässt. Soll dabei $r$ zugleich die Rolle des Radiusvectors übernehmen, so haben wir augenscheinlich den Pol des Coordinatensystems in den Punkt $(a, b, c)$ zu verlegen. Wählen wir dann ferner zur Polarachse die mit der $x$-Achse parallele Gerade und die der $xy$-Ebene parallele Ebene als Polarebene und nennen $\vartheta$ den Winkel zwischen $r$ und der Polarachse, sowie $\varphi$ den Winkel, welchen die durch $r$ und die Polarachse bestimmte Ebene mit der Polarebene bildet: so wird

$$x = a + r\cos\vartheta,\quad y = b + r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad z = c + r\sin\vartheta\sin\varphi,$$

und folglich geht $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 < 1$ über in

$$1.\quad \left(\frac{a + r\cos\vartheta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{b + r\sin\vartheta\cos\varphi}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{c + r\sin\vartheta\sin\varphi}{r}\right)^2 < 1.$$

Der früher gefundene Ausdruck $X = \int \frac{x-a}{r}\, \varphi(r)\, du$ ferner verwandelt sich wegen $du = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ jetzt in

$$X = \iiint \cos\vartheta \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi,$$

und man erkennt nun sofort, dass hier die erste der Inte-

grationen immer ausführbar ist, nach welcher der Variabeln man dieselbe auch vollziehen mag. Trotzdem aber ist es — wie früher bei der Quadratur der Ellipse — wegen der grössern oder geringern Complication des aus 1. zu ziehenden Integrationsintervalles nicht gleichgültig, nach welcher der Veränderlichen man zuerst integrirt. Im vorliegenden Falle empfiehlt sich die Integration nach $r$ als die zweckmässigste; wir beginnen daher mit dieser, und folglich haben wir nun zunächst die Grenzen, zwischen denen $r$ sich bewegt, zu bestimmen. Um dies in der übersichtlichsten Weise zu thun, denken wir uns vorerst die Ungleichheit 1. nach $r$ geordnet; alsdann besitzt sie augenscheinlich die Gestalt

$$1^a. \qquad lr^2 + 2mr < n,$$

in welcher die Constanten $l$, $m$, $n$ durch die Gleichungen definirt werden:

$$l = \frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2\cos\varphi^2}{\beta^2} + \frac{\sin\vartheta^2\sin\varphi^2}{\gamma^2},$$

$$m = \frac{a\cos\vartheta}{\alpha^2} + \frac{b\sin\vartheta\cos\varphi}{\beta^2} + \frac{c\sin\vartheta\sin\varphi}{\gamma^2},$$

$$n = 1 - \frac{a^2}{\alpha^2} - \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{\gamma^2}.$$

Beachtet man nun, dass $l$ stets positiv ist und niemals der Null gleich wird, so können wir offenbar die Ungleichheit $1^a$. durch $l$ multipliciren; sie verliert ausserdem ihren Charakter nicht, wenn wir auf beiden Seiten derselben die Grösse $m^2$ hinzufügen. Statt $1^a$. erhalten wir daher jetzt die Form

$$(lr + m)^2 < ln + m^2,$$

und hieraus erkennt man ohne Weiteres, dass $ln + m^2$ nothwendig positiv sein muss, wenn überhaupt Radienvectoren existiren sollen. Setzen wir mithin $ln + m^2 > 0$, so liegt $lr + m$ zwischen $+\sqrt{ln+m^2}$ und $-\sqrt{ln+m^2}$, d. h.

$$\frac{-m - \sqrt{ln+m^2}}{l} < r < \frac{-m + \sqrt{ln+m^2}}{l}.$$

Ist nun der Punkt $(a, b, c)$ ein innerer, ist also wegen

$$1 > \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2}$$

$n$ positiv, so sind offenbar für jede Combination $\vartheta\varphi$ Radienvectoren vorhanden. Dagegen existiren solche nur nach ge-

wissen Richtungen, wenn der Punkt $(a, b, c)$ ausserhalb des anziehenden Ellipsoides sich befindet, d. h. wenn $n$ zu den negativen Grössen gehört. Schon die blosse Anschauung zeigt die Richtigkeit dieser Behauptungen. Welche Werthe erhält nun aber diesen beiden Fällen entsprechend unser $r$? Um hierüber Aufschluss zu erlangen, nehmen wir $n$ zunächst positiv; alsdann ist offenbar der numerische Werth von $\sqrt{ln + m^2}$ grösser, als der von $m$, und folglich liegt $r$ zwischen $\frac{-m + \sqrt{ln + m^2}}{l}$ und $\frac{-m - \sqrt{ln + m^2}}{l}$. Weil aber $r$ absolut zu nehmen ist, so können die Grenzen desselben nur 0 und $\frac{-m + \sqrt{ln + m^2}}{l}$ heissen.

Ist dagegen $n$ negativ, so sind absolut genommen nur für $ln < m^2$ Werthe von $r$ vorhanden. Und da $\sqrt{ln + m^2}$ numerisch jetzt kleiner, als der absolute Werth von $m$ ist, so giebt es für ein positives $m$ keine Radienvectoren; diese existiren vielmehr nur für ein negatives $m$. Die Integration nach $r$ ist folglich für einen äussern Punkt bloss beim Statthaben der beiden Bedingungen

$$ln + m^2 > 0 \text{ und } m < 0$$

möglich, sie erstreckt sich alsdann von $r = \frac{-m - \sqrt{ln + m^2}}{l}$ bis $r = \frac{-m + \sqrt{ln + m^2}}{l}$. Geometrisch genommen hat dies den Sinn, dass die Vereinigung der Elemente nur innerhalb eines das Ellipsoid umhüllenden Kegels geschehen kann, dessen Spitze im Punkte $(a, b, c)$ sich befindet.

Nach diesen vorbereitenden Untersuchungen gehen wir zur Integration selbst über, und zwar behandeln wir vorerst den Fall des innern Punktes. Offenbar ist alsdann mit Berücksichtigung der in §. 160. über die Grenzen von $\vartheta$ und $\varphi$ gemachten Bemerkungen

$$X = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\vartheta \, d\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \cdot \frac{-m + \sqrt{ln + m^2}}{l},$$

d. g.

$$X = -\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \cdot \frac{m}{l} + \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sqrt{ln + m^2}}{l} \sin\vartheta \sin\varphi,$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich indess sogleich, wenn man beachtet, dass für je zwei Werthgruppen $\vartheta$, $\varphi$ und $\pi-\vartheta$, $\pi+\varphi$ das Radical $\frac{\sqrt{ln+m^2}}{l}$ wegen der Werthe von $l$ und $m$ unverändert bleibt, das Product $\sin\vartheta\,\sin\varphi$ hingegen in die Klasse der entgegengesetzten Grössen gehört und dass demnach die diesen beiden Gruppen entsprechenden Elemente einander aufheben. Das zweite der Integrale rechts ist daher mit Null gleichbedeutend*), und folglich wird

$$X=-\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{m}{l}\sin\vartheta\cos\vartheta$$

oder

$$X=-\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{l}\left[\frac{a}{\alpha^2}\cos\vartheta+\frac{b}{\beta^2}\sin\vartheta\cos\varphi+\frac{c}{\gamma^2}\sin\vartheta\sin\varphi\right].$$

Nun aber schliesst man in ähnlicher Weise wie vorhin, dass die beiden Integrale

---

*) In mehr analytischer Weise kann man sich von der Richtigkeit dieser Behauptung auch wie folgt überzeugen.

Bezeichne $\psi(\vartheta,\varphi)$ eine solche Function von $\vartheta$ und $\varphi$, die den entgegengesetzten Werth erwirbt, wenn die Argumente $\vartheta$ und $\varphi$ bezüglich in $\pi-\vartheta$ und $\pi+\varphi$ sich verwandeln. Alsdann erhält man wegen

$$\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta,\psi)\,d\varphi=\int_0^{\pi}\psi(\vartheta,\varphi)\,d\varphi+\int_\pi^{2\pi}\psi(\vartheta,\varphi)\,d\varphi$$
$$=\int_0^{\pi}\psi(\vartheta,\varphi)\,d\varphi+\int_0^{\pi}\psi(\vartheta,\pi+\varphi)\,d\varphi$$

ohne Weiteres die Beziehung

$$\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta,\varphi)\,d\varphi=\int_0^\pi d\vartheta\int_0^\pi\psi(\vartheta,\varphi)\,d\varphi+\int_0^\pi d\vartheta\int_0^\pi\psi(\vartheta,\pi+\varphi)\,d\varphi,$$

und diese verwandelt sich durch Umkehrung der Integrationsordnung mit darauf folgender Substitution von $\pi-\vartheta$ statt $\vartheta$ in dem letzten Integrale, sowie durch nochmalige Aenderung der Integrationsordnung im transformirten Integrale und schliessliche Vereinigung des ersten und letzten Integrales in die identische Gleichung

$$\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\,\psi(\vartheta,\varphi)=\int_0^\pi d\vartheta\int_0^\pi d\varphi\,[\psi(\vartheta,\varphi)+\psi(\pi-\vartheta,\pi+\varphi)]=0.$$

$$\frac{b}{\beta^2}\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta^2 \cos\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{l}\, d\varphi \text{ und } \frac{c}{\gamma^2}\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta^2 \cos\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{l}\, d\varphi$$

den Werth Null besitzen und dass sonach

$$X = -a\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta^2 \sin\vartheta\, d\varphi}{\cos\vartheta^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin\vartheta^2\cos\varphi^2 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\sin\vartheta^2\sin\varphi^2}$$

ist.

Diese Relation gestattet eine bemerkenswerthe Folgerung. Das Integral nämlich behält augenscheinlich denselben Werth, wenn die Verhältnisse der Achsen unverändert bleiben, d. h. wenn man ein dem ersten concentrisches, ähnliches und ähnlich liegendes Ellipsoid construirt. Und da nun — wie aus den früher gepflogenen Erörterungen sofort erhellt — bezüglich der beiden Componenten $Y$ und $Z$ ein gleicher Erfolg eintritt; so ist offenbar die Wirkung der von den beiden concentrisch ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden gebildeten Schicht auf einen im innern Hohlraume derselben befindlichen Punkt der Null gleich.*) Die Anziehung eines Ellipsoides auf einen Punkt seiner Masse reducirt sich daher auf diejenige des Ellipsoidentheils, welcher von einer mit der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden, durch den angezogenen Punkt gehenden Oberfläche begrenzt wird.

Giebt man dem obigen Doppelintegrale die Gestalt

$$X = \frac{a}{\alpha^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\cos\vartheta^2\, d(\cos\vartheta)}{\frac{\cos\varphi^2}{\beta^2} + \frac{\sin\varphi^2}{\gamma^2} + \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\cos\varphi^2}{\beta^2} - \frac{\sin\varphi^2}{\gamma^2}\right]\cos\vartheta^2},$$

so erkennt man ohne Weiteres, dass dasselbe nach $\vartheta$ unbestimmt sich integriren und zwar auf cyklometrische oder logarithmische Functionen sich zurückführen lässt. Da jedoch die hierdurch entspringende Form des neuen Integrales gerade

---

*) Dieser von Newton entdeckte Satz lässt sich auch auf synthetischem Wege ohne Mühe nachweisen. Man vergl. z. B. darüber: Schell. Theorie der Bewegung und der Kräfte, S. 702; — Sturm. Cours de mécanique de l'école polytechnique, tome I., Nro. 142; — Duhamel. Mechanik, Thl. 1., Nro. 134.

nicht durch Eleganz sich auszeichnet, diese vielmehr erzielt wird, wenn man mit der Integration nach $\varphi$ beginnt; so werden wir auch diesen Weg befolgen. Wir schreiben zu dem Behufe das Integral nach $\varphi$ zunächst in nebenstehender Gestalt

$$v = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2}{\beta^2}\right)\cos\varphi^2 + \left(\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2}{\gamma^2}\right)\sin\varphi^2}$$

und bedenken, dass durch die Substitution $\pi + \varphi$ statt $\varphi$ die Function unter dem Integralzeichen unverändert bleibt, die Grenzen des Integrales dagegen in $-\pi$ und $+\pi$ sich verwandeln und dass überdies die Function zu den geraden Functionen von $\varphi$ gehört. Dadurch bekommen wir augenscheinlich die Gleichung

$$v = 2\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\lambda^2 \cos\varphi^2 + \mu^2 \sin\varphi^2},$$

wenn wir der Kürze halber unter $\lambda$ und $\mu$ beziehungsweise die Wurzelwerthe der Coefficienten von $\cos\varphi^2$ und $\sin\varphi^2$ verstehen. Zerlegen wir aber nochmals das Integral in zwei andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ und substituiren in dem letzten dieser Theilintegrale $\frac{\pi}{2} + \varphi$ statt $\varphi$, so geht $v$ offenbar über in

$$v = \frac{4}{\lambda\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\operatorname{tang}\varphi\right)}{1+\left(\frac{\mu}{\lambda}\operatorname{tang}\varphi\right)^2} = \frac{4}{\lambda\mu}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{\mu}{\lambda}\operatorname{tg}\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{\lambda\mu}.\text{*)}$$

Und daher ist

$$X = -\frac{2\pi a}{\alpha^2}\int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta^2\, d\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2}{\beta^2}\right)\left(\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2} + \frac{\sin\vartheta^2}{\gamma^2}\right)}}.$$

*) Hätten wir $\lambda$ und $\mu$ mit verschiedenen Zeichen behaftet vorausgesetzt, so würde formell $-\frac{2\pi}{\lambda\mu}$ das Ergebniss der Integration gewesen sein.

Weil aber für je zwei Supplementarwerthe $\vartheta$ und $\pi - \vartheta$ die Function unter dem Integralzeichen keine Aenderung erleidet, je zwei diesen Argumenten entsprechende Elemente also gleich sind; so erhält man die einfachere Beziehung

$$X = -\frac{4\pi a}{\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta^2\, d\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2}+\frac{\sin\vartheta^2}{\beta^2}\right)\left(\frac{\cos\vartheta^2}{\alpha^2}+\frac{\sin\vartheta^2}{\gamma^2}\right)}}.$$

Und hieraus entspringt durch Einführung der neuen Variabeln $t$ mittelst der Gleichung $t = \cos\vartheta$ die andere Form

$$X = -\frac{4\pi a\beta\gamma}{\alpha^2}\int_0^1 \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left[1-\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]\left[1-\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]}}.$$

Da nun mit der Seitenkraft $X$ zugleich die Componenten $Y$ und $Z$ gegeben sind, indem diese aus $X$ durch blosse Permutation der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ gewonnen werden, so hat man auch unmittelbar die Beziehungen

$$Y = -\frac{4\pi b\alpha\gamma}{\beta^2}\int_0^1 \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left[1-\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)t^2\right]\left[1-\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]}}.$$

und

$$Z = -\frac{4\pi c\alpha\beta}{\gamma^2}\int_0^1 \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left[1-\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]\left[1-\left(1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)t^2\right]}}.$$

In jedem der drei zusammengehörigen elliptischen Integrale erscheint also eine andere Wurzelgrösse; die Reduction dieser Integrale auf die Normalformen der ersten und zweiten Gattung wird desshalb völlig unsymmetrische Resultate liefern. Ihrer Natur nach aber sind die drei Componenten $X$, $Y$, $Z$ symmetrisch geformte Ausdrücke, weil sie ja durch blosse Permutation der in ihnen enthaltenen Constanten auseinander hervorgehen. Um dieser Symmetrie willen ist es daher weit zweckmässiger, bei den allgemeinen Betrachtungen von der

Herstellung der canonischen Form der obigen Integrale abzusehen. Geschieht dies, so lassen sich dieselben ohne Schwierigkeit derart schreiben, dass dasselbe Radical in ihnen vorkommt. Behufs Erzielung dieser Form betrachten wir wieder die Componente $X$, und zwar ersetzen wir in dem Integrale die Variabele $t$ durch die neue $s$, welche mit jener durch die Gleichung $t^2 = \frac{1}{1+\lambda s}$ verbunden ist, wo $\lambda$ eine positive, gleich näher zu bestimmende Constante bezeichnet. Da unter dieser Voraussetzung für $t = 0$, 1 die entsprechenden Werthe von $s$ 0 und $\infty$ heissen und da ausserdem

$$dt = -\frac{\lambda}{2}\frac{ds}{\sqrt{(1+\lambda s)^3}}, \quad \frac{t^2\, dt}{\sqrt{\left[1-\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]\left[1-\left(1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)t^2\right]}}$$

$$= \frac{\lambda\, ds}{\left(1+\lambda s\right)\sqrt{\left(1+\lambda s\right)\left(\lambda s+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\left(\lambda s+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)}}$$

ist, so wird

$$X = -\frac{2\pi a\beta\gamma\lambda}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\left(1+\lambda s\right)\sqrt{\left(1+\lambda s\right)\left(\lambda s+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\left(\lambda s+\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)}}.$$

Und schreibt man nun $\lambda = \frac{1}{\alpha^2}$, so entspringt

$$X = -\frac{2\pi a}{\alpha^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Die Componenten $X$, $Y$, $Z$ besitzen demnach die Gestalt

$$X = -2\pi a\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}\frac{ds}{s+\alpha^2}, \quad Y = -2\pi b\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}\frac{ds}{s+\beta^2}, \quad Z = -2\pi c\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}\frac{ds}{s+c^2},$$

d. h. wenn wir die drei für dasselbe Ellipsoid constant bleibenden Integrale zur Abkürzung bezüglich durch $A$, $B$, $C$ bezeichnen,

$$X = -2\pi a A, \quad Y = -2\pi b B, \quad Z = -2\pi c C.$$

Offenbar lehren diese Formeln, dass für alle Punkte, welche in einer Ebene sich befinden, die senkrecht zu einer

der Achsen des Ellipsoides steht, die dieser Achse parallele Attractionscomponente dieselbe bleibt und dass die jedesmalige Grösse derselben der Entfernung zwischen der senkrechten und der ihr parallelen Hauptebene des Ellipsoides proportional ist. Die bezügliche Componente ist daher am grössten für die in der letzten senkrechten Ebene befindlichen Punkte und am kleinsten, nämlich $= 0$, in der Hauptebene.

Heisst $R$ die Gesammtwirkung des Ellipsoids auf einen innern Punkt, und sind $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die drei Winkel, welche die Richtung von $R$ mit den Achsen der $x, y, z$ bildet; so ist

$$R \cos \lambda = X, \quad R \cos \mu = Y, \quad R \cos \nu = Z.$$

Und weil nun anderseits für das stets absolut zu nehmende $R$ die Beziehung besteht

$$R = 2\pi \sqrt{A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2},$$

so wird

$$\cos \lambda = \frac{-Aa}{\sqrt{A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2}}, \quad \cos \mu = \frac{-Bb}{\sqrt{A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2}},$$

$$\cos \nu = \frac{-Cc}{\sqrt{A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2}}.$$

Daraus aber fliesst sofort weiter, dass für alle Punkte, welche auf demselben Halbmesser $\varrho$ des Ellipsoids sich befinden, die Resultante $R$ sich parallel bleibt und ihrer Grösse nach der jedesmaligen Entfernung des afficirten Punktes vom Centrum proportional ist. Denn sind $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ die drei Winkel zwischen $\varrho$ und den Achsen des Ellipsoides, so hat man die Gleichungen

$$a = \varrho \cos \lambda', \quad b = \varrho \cos \mu', \quad c = \varrho \cos \nu',$$

diese Ausdrücke aber in die oben gegebenen Werthe für $R$, $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ eingesetzt zeigen unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung. Für je zwei um $\varrho$ vom Centrum abstehende Punkte desselben Durchmessers ist daher die Richtung der Gesammtwirkung entgegengesetzt.

## §. 164.

### Reduction der Integrale *A*, *B*, *C* auf die canonische Form.*)

Eine Zurückführung der Integrale *A*, *B*, *C* auf Elementarfunctionen ist nur für das Rotationsellipsoid möglich, für den Fall eines dreiachsigen Ellipsoides dagegen bilden — wie schon angedeutet — die elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung, also die Integrale

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin\varphi^2}} \text{ und } E(\varphi, k) = \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1-k^2 \sin\varphi^2}$$

die Grundbestandtheile der Integrale *A*, *B*, *C*. Um sie zu erzielen, kehren wir zu den früher gefundenen Formen

$$X = -\frac{4\pi a\beta\gamma}{\alpha^2} \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{\left[1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2\right]\left[1+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}t^2\right]}},$$

$$Y = -\frac{4\pi b\alpha\gamma}{\beta^2} \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{\left[1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}t^2\right]\left[1+\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2}t^2\right]}},$$

$$Z = -\frac{4\pi c\alpha\beta}{\gamma^2} \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{\left[1+\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2}t^2\right]\left[1+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma^2}t^2\right]}}$$

zurück. Setzen wir nun der Kürze halber $\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2} = \lambda^2$, $\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2} = \mu^2$, $M = \frac{4}{3}\alpha\beta\gamma$, und substituiren wir alsdann in den Integralen für *Y* und *Z* beziehungsweise statt *t* die Ausdrücke

$$\frac{t\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2 t^2}} = \frac{\beta t}{\alpha\sqrt{1+\lambda^2 t^2}} \text{ und } \frac{t\sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu^2 t^2}} = \frac{\gamma t}{\alpha\sqrt{1+\mu^2 t^2}};$$

so können wir die vorstehenden Integrale zunächst in der einfacheren Gestalt

---

*) Vergl. Sturm. Cours de mécanique de l'école polytechnique, tome I, p. 99 etc.

$$X = -\frac{3\,Ma}{\alpha^3}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{[1+\lambda^2 t^2][1+\mu^2 t^2]}},\quad Y = -\frac{3\,Mb}{\alpha^3}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{[1+\lambda^2 t^2]^3[1+\mu^2 t^2]}},$$

$$Z = -\frac{3\,Mc}{\alpha^2}\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{[1+\mu^2 t^2]^3\,[1+\lambda^2 t^2]}}$$

schreiben. Und hieraus entspringen wieder die Formen

$$X = -\frac{3\,M\,a}{\alpha^3\,\mu^3}\int_0^\vartheta \frac{\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},\quad Y = -\frac{3\,Mb}{\alpha^3\,\mu^3}\int_0^\vartheta \frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)^3}},$$

$$Z = -\frac{3\,Mc}{\alpha^3\,\mu^3}\int_0^\vartheta \frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},$$

wenn man nämlich beachtet, dass in Folge unserer frühern Annahme $\alpha < \beta < \gamma$ die Constante $\lambda < \mu$ ist und demnach $k^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}$, $\operatorname{tang}\vartheta = \mu = \sqrt{\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}}$, $t\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{tang}\varphi = \mu t$ gesetzt werden kann. Von diesen Integralen aber bedürfen nur noch das erste und zweite einer weitern Entwicklung, indem das dritte wegen

$$\int_0^\vartheta \frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} = \frac{1}{k^2}\int_0^\vartheta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} - \frac{1}{k^2}\int_0^\vartheta \frac{1-k^2\sin\varphi^2}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}\,d\varphi$$

sofort als identisch mit $\frac{1}{k^2}\,[F(k,\vartheta) - E(k,\vartheta)]$ sich zu erkennen giebt.

Für das unbestimmte Integral $\int \frac{\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$ nun findet man, wenn der Bequemlichkeit wegen statt $\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}$ das gebräuchliche $\Delta$ geschrieben wird,

$$\int \frac{\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi}{\Delta} = \int \frac{\sin\varphi^2\,d(\operatorname{tang}\varphi)}{\Delta} = \frac{1}{k^2}\int \frac{d\operatorname{tang}\varphi}{\Delta} - \frac{1}{k^2}\int \Delta\,d\operatorname{tg}\varphi,$$

und hieraus folgt durch theilweise Integration mit Beachtung der Beziehung

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = -\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}:$$

$$\int \frac{\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2\,\Delta} - \frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\Delta} - \frac{\operatorname{tang}\Delta}{k^2} + \frac{1}{k^2}\int \Delta\,d\varphi,$$

d. g.

$$\int^{\circ}\frac{\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi}{\Delta}=\frac{\operatorname{tang}\varphi\,.\,\Delta-E(k,\varphi)}{1-k^2}.$$

Integrirt man dagegen $\int^{\circ}\frac{\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi}{\Delta}$ unmittelbar partiell, so entspringt mit Berücksichtigung der Relation

$$\frac{d}{d\varphi}\,\frac{\sin\varphi^2}{\Delta}=\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta}+\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta^3}:$$

$$\int^{\circ}\frac{\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi}{\Delta}=\frac{\operatorname{tang}\varphi\,\sin\varphi^2}{\Delta}-\int^{\circ}\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\Delta}-\int^{\circ}\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\Delta^3};$$

mithin ist

$$\int^{\circ}\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\Delta^3}=\frac{\operatorname{tang}\varphi\,\sin\varphi^2}{\Delta}-\int^{\circ}\frac{\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi}{\Delta}-\int^{\circ}\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\Delta}$$

oder nach einigen leichten Reductionen

$$\int^{\circ}\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\Delta^3}=\frac{E(k,\varphi)}{k^2(1-k^2)}-\frac{1}{k^2}F(k,\varphi)-\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{(1-k^2)\,\Delta}.$$

Die zwischen den Grenzen 0 und $\vartheta$ genommenen Integrale heissen daher

$$\int_0^{\vartheta}\frac{\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi}{\Delta}=\left[\mu\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1+\mu^2}}-E\,(k,\operatorname{arc\,tang}\mu)\right].\ \frac{1}{1-k^2}$$

$$=\left\{\frac{\beta}{\gamma}\,\frac{\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}{\alpha}-E\left[\sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2}},\ \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}{\alpha}\right]\right\}\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2},$$

$$\int_0^{\vartheta}\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\Delta^3}=\frac{E(k,\vartheta)}{k^2(1-k^2)}-\frac{1}{k^2}F(k,\vartheta)-\frac{\operatorname{tang}\vartheta}{1+\operatorname{tg}\vartheta^2}\,\frac{1}{1-k^2}\,\frac{1}{\Delta(k,\vartheta)},$$

und folglich ergeben sich durch Wiedereinführung der Werthe von $k$, $\vartheta$, $\mu$ in sämmtliche bestimmten Integrale nach einigen leicht zu vollziehenden Reductionen die Schlussgleichungen:

$$X=-3\,Ma(\beta^2-\alpha^2)^{-1}(\gamma^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\beta}{\alpha\gamma}\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}-E\right],$$

$$Y=-3\,Mb\left[-(\gamma^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}(\gamma^2-\beta^2)^{-1}F\right.$$

$$\left.+(\gamma^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2-\beta^2)^{-1}(\beta^2-\alpha^2)^{-1}E-\frac{\alpha}{\beta\gamma}(\beta^2-\alpha^2)^{-1}\right],$$

$$Z=-3\,Mc\,(\gamma^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}(\gamma^2-\beta^2)^{-1}\Big[F-E\Big];$$

um der kürzern Schreibweise willen sind hierin statt der Grössen

$$F\left(\sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2}}, \text{arc tang}\frac{\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}{\alpha}\right) \text{ und } E\left(\sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2}}, \text{arc tg}\frac{\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}}{\alpha}\right)$$

einfach die Zeichen $F$ und $E$ gewählt worden.

## §. 165.

### Das Rotationsellipsoid.

Die Integrale $A$, $B$, $C$ verlieren den Charakter der elliptischen Integrale, sofern das Ellipsoid durch Umdrehung einer Ellipse um ihre grosse oder kleine Achse entstanden ist; alsdann nämlich hängen die genannten Integrale entweder von cyklometrischen, oder logarithmischen Functionen ab.

In der That, setzen wir zunächst $\alpha = \beta$, nehmen wir also an, dass die grösste Achse $2\gamma$ die Umdrehungsachse des Ellipsoides darstellt, so wird der Modul $k = 1$, und folglich gelten jetzt für die Componenten $X$, $Y$, $Z$ die Gleichungen

$$X = -\frac{3\,M a}{\alpha^3\mu^3}\int_0^{\vartheta}\frac{\text{tang}\,\varphi^2\,d\varphi}{\cos\varphi},\quad Y = -\frac{3\,M b}{\alpha^3\mu^3}\int_0^{\vartheta}\frac{\text{tang}\,\varphi^2\,d\varphi}{\cos\varphi},$$

$$Z = -\frac{3\,M c}{\alpha^3\mu^3}\int_0^{\vartheta}\text{tang}\,\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi.$$

Nun zeigt aber die Integration durch Theile, dass

$$\int\frac{\text{tang}\,\varphi^2}{\cos\varphi}\,d\varphi = \int\frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi}\,d(\text{tang}\,\varphi)$$

$$= \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi}\,\text{tang}\,\varphi - 2\int\text{tang}\,\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi - \int\text{tang}\,\varphi^3\,\sin\varphi\,d\varphi,$$

$$\int\text{tang}\,\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi = -\text{tang}\,\varphi\cos\varphi + \lg\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) + \text{const.},$$

$$\int\text{tang}\,\varphi^3\,\sin\varphi\,d\varphi = -\text{tg}\,\varphi^3\cos\varphi + 3\int\frac{\text{tang}\,\varphi^2}{\cos\varphi}\,d\varphi$$

und demnach

$$\int\frac{\text{tang}\,\varphi^2}{\cos\varphi}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\,\text{tg}\,\varphi\sqrt{1+\text{tg}\,\varphi^2} - \tfrac{1}{2}\lg(\text{tg}\,\varphi + \sqrt{1+\text{tg}\,\varphi^2}) + \text{cst}.$$

ist. Geht man also zu den bestimmten Integralen über, so kommt schliesslich

$$X = -\frac{3\,Ma}{2\,\alpha^3\,\mu^3}\left[\mu\sqrt{1+\mu^2} - \lg\left(\mu + \sqrt{1+\mu^2}\right)\right],$$

$$Y = -\frac{3\,Mb}{2\,\alpha^3\,\mu^3}\left[\mu\sqrt{1+\mu^2} - \lg\left(\mu + \sqrt{1+\mu^2}\right)\right],$$

$$Z = -\frac{3\,Mc}{\alpha^3\,\mu^3}\left[\lg\left(\mu + \sqrt{1+\mu^2}\right) - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right].\text{*)}$$

Nimmt man dagegen $\beta = \gamma$, bezeichnet folglich die kleinste Achse $2\alpha$ die Rotationsachse, so wird $k = 0$, demnach

$$X = -\frac{3\,Ma}{\alpha^3\mu^3}\int_0^{\vartheta}\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi,\quad Y = -\frac{3\,Mb}{\alpha^3\mu^3}\int_0^{\vartheta}\sin\varphi^2\,d\varphi,$$

$$Z = -\frac{3\,Mc}{\alpha^3\mu^3}\int_0^{\vartheta}\sin\varphi^2\,d\varphi.$$

Aber

$$\int\sin\varphi^2\,d\varphi = -\sin\varphi\cos\varphi + \int\cos\varphi^2 d\varphi = \frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2} + \text{const.},$$

$$\int\operatorname{tang}\varphi^2\,d\varphi = \sin\varphi^2\operatorname{tang}\varphi + \sin\varphi\cos\varphi - \varphi + \text{const.},$$

mithin entspringen durch Uebergang zu den bestimmten Integralen schliesslich die Beziehungen

$$X = -\frac{3Ma}{\alpha^3\mu^3}\left[\frac{\mu^3}{1+\mu^2} + \frac{\mu}{1+\mu^2} - \operatorname{arc\,tg}\mu\right] = -\frac{3Ma}{\alpha^3\mu^3}\left[\mu - \operatorname{arc\,tg}\mu\right],$$

$$Y = -\frac{3Mb}{2\alpha^3\mu^3}\left[\operatorname{arc\,tg}\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2}\right],\ Z = -\frac{3Mc}{2\alpha^3\mu^3}\left[\operatorname{arc\,tg}\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2}\right].\text{**)}$$

Kaum nöthig ist übrigens die Bemerkung, dass man behufs Herleitung dieser Resultate durchaus nicht an die trigonometriche Form der Integrale $A$, $B$, $C$ gebunden ist; im Gegen-

---

*) Der absolute Werth der den Componenten $X$ und $Y$ entsprechenden Resultirenden $R_1$ besitzt offenbar die Form

$$R_1 = \frac{3\,M\delta}{2\alpha^3\mu^3}\left[\mu\sqrt{1+\mu^2} - \lg\left(\mu + \sqrt{1+\mu^2}\right)\right],$$

wo $\delta = \sqrt{a^2+b^2}$ die Länge des vom afficirten Punkte auf die Rotationsachse gefällten Perpendikels ausdrückt.

**) $R_1 = \sqrt{Y^2+Z^2} = \frac{3\,M\delta}{2\,\alpha^3\,\mu^3}\left[\operatorname{arc\,tg}\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2}\right]$, $\delta = \sqrt{b^2+c^2}$.

theil scheinen sogar die zwischen den Grenzen 0 und 1 genommenen Integrale noch zweckmässiger zu sein, weil es bei diesen ganz gleichgültig ist, ob man $\alpha = \beta$, oder $\alpha = \gamma$ setzt, für welchen letztern Fall bei den oben benutzten trigonometrischen Formen der Integrale der Modul $k$ ins Unendliche wächst und demnach diese unbrauchbar werden.*)

## §. 166.

### Der angezogene Punkt ist ein äusserer.

Wenn der von dem Ellipsoid $[\alpha, \beta, \gamma]$ angezogene Punkt $(a, b, c)$ ausserhalb desselben sich befindet, so ist offenbar

$$1. \qquad \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{b}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2 > 1.$$

Betrachten wir nun wieder die Componente

$$X = \int\!\!\int\!\!\int \cos\vartheta \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi,$$

so ist den in §. 163. gegebenen Lehren zufolge die Integration nach $r$ zwischen den Grenzen $r = \frac{-m - \sqrt{ln + m^2}}{l}$ und $r = \frac{-m + \sqrt{ln + m^2}}{l}$ auszuführen. Mithin wird jetzt

$$X = 2\int\!\!\int \frac{\sqrt{ln + m^2}\cos\vartheta \sin\vartheta}{l} \, d\vartheta \, d\varphi,$$

und dieses Doppelintegral ist nun über alle Werthe von $\vartheta$ und $\varphi$ auszudehnen, welche innerhalb des früher erwähnten Umhüllungskegels sich befinden. Wir können jedoch von dieser mit grossen Schwierigkeiten verknüpften Integration absehen, weil wir vermöge des Ivory'schen Theoremes den vorliegenden Fall auf den einfachern eines innern Punktes zurückführen können.

Denken wir uns also durch den angezogenen Punkt $(a, b, c)$ ein mit $[\alpha, \beta, \gamma]$ confocales Ellipsoid $[\alpha', \beta', \gamma']$ gelegt und nennen wie früher $(a', b', c')$ den auf dem Ellipsoid $[\alpha, \beta, \gamma]$ gelegenen correspondirenden Punkt von $(a, b, c)$, sowie $X'$ die der $x$-Achse parallele Attractionscomponente zwischen $(a', b', c')$ und $[\alpha', \beta', \gamma']$; so bestehen die Gleichungen

*) Die vorhin genannten Formen wählt z. B. Sturm. Cours de mécanique, tome I, Nro. 137. (Vergl. S. 551.)

2. $$X = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'} X';$$

3. $$a\alpha = a'\alpha',\ b\beta = b'\beta',\ c\gamma = c'\gamma',\ \beta'^2 = \alpha'^2 + \beta^2 - \alpha^2,$$
$$\gamma' = \alpha'^2 + \gamma^2 - \alpha^2$$

und

4. $$\frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\alpha'^2 + \beta^2 - \alpha^2} + \frac{c^2}{\alpha'^2 + \gamma^2 - \alpha^2} = 1,$$

von denen zunächst die letztere nach $\alpha'^2$ aufzulösen ist. Offenbar muss der sich ergebende Werth von $\alpha'^2$ grösser, als $\alpha^2$ sein, weil, wenn man $\alpha'^2 = \alpha^2$ setzt, in Folge der Relation 1. das Trinom der cubischen Gleichung 4. grösser, als 1 wird; selbst die blosse Anschauung führt schon zu diesem Resultate. Wir wählen daher für $\alpha'^2$ den Ausdruck $\alpha^2 + \sigma$, wo $\sigma$ positiv ist und zwar die einzige positive Wurzel der cubischen Gleichung

4ª. $$1 = \frac{a^2}{\alpha^2 + \sigma} + \frac{b^2}{\beta^2 + \sigma} + \frac{c^2}{\gamma^2 + \sigma}$$

bedeutet. Ist nun diese Wurzel $\sigma$ ermittelt worden, so wird

$$\alpha' = \sqrt{\alpha^2 + \sigma},\ \beta' = \sqrt{\beta^2 + \sigma},\ \gamma' = \sqrt{\gamma^2 + \sigma},\ a' = \frac{a\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma}}$$

und

$$X = -\frac{2\pi\beta\gamma a'}{\beta'\gamma'} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\alpha'^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma'^2}\right)}} \frac{1}{s + \alpha'^2},$$

wofür wir auch wegen $a'\alpha' = a\alpha$

$$X = -2\pi a \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'} \int_0^\infty \frac{ds}{(s + \alpha'^2)\sqrt{\left(1 + \frac{s}{\alpha'^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma'^2}\right)}}$$

schreiben können. Diese Gleichung aber vereinfacht sich noch mehr, wenn wir $s - \sigma$ statt $s$ wählen, demnach $s - \sigma + \alpha'^2$, $s - \sigma + \beta'^2$, $s - \sigma + \gamma'^2$ bezüglich durch $s + \alpha^2$, $s + \beta^2$, $s + \gamma^2$ ersetzen; denn nun gilt die Beziehung

$$X = -2\pi a\, \alpha\beta\gamma \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(s + \alpha^2)\sqrt{(s + \alpha^2)(s + \beta^2)(s + \gamma^2)}},$$

d. h.

$$X = -2\pi a \int_{\sigma}^{\infty} \frac{ds}{(s+\alpha^2)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}.$$

Die für den Fall eines äussern Punktes Statt findenden Integrale unterscheiden sich mithin von den frühern $A$, $B$, $C$ bloss dadurch, dass bei diesen das Integrationsintervall mit Null beginnt, während bei jenen eine Zahl $\sigma$, die von der Lage des angezogenen Punktes $(a, b, c)$ abhängt und nur für ein und dieselbe mit $[\alpha, \beta, \gamma]$ confocale ellipsoidische Fläche constant bleibt, die untere Grenze der Integrale bildet.

## §. 167.*)

### Das Maclaurin'sche Theorem.

Vor der Entdeckung des Ivory'schen Lehrsatzes konnte man nur mit Hülfe des sogenannten Maclaurin'schen Theoremes**) die Bestimmung der Attractionscomponente für den Fall eines ausserhalb der anziehenden ellipsoidischen Masse belegenen Punktes von der Ermittlung der Componente für einen innern Punkt abhängig machen. Dieses Theorem, das nur bei Voraussetzung des Newton'schen Attractionsgesetzes Geltung besitzt und dessen Allgemeingültigkeit für das Rotationsellipsoid zuerst von Legendre***), für das ungleichachsige Ellipsoid hingegen zuerst von Laplace†) nachgewiesen wurde, ergiebt sich aus den vorhergehenden Betrachtungen ohne die geringste Mühe, wie wir sogleich zeigen werden, nachdem wir noch folgende Sätze über confocale Ellipsoide erwähnt haben.

Da dem Begriffe confocaler Ellipsoide zufolge die Differenzen zwischen den Quadraten ihrer Halbachsen gleich gross sind, so kann offenbar durch ein und denselben Punkt nur ein mit dem gegebenen confocales Ellipsoid gelegt werden.

*) Ueber die Geschichte des Maclaurin'schen Satzes vergl. man eine Abhandlung Grube's in Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys., Jahrgg. 14. S. 261 ff.

**) Maclaurin: Treatise of fluxions, 1734.

***) Mém. de math. et de phys. présentés par divers savans, Paris 1785.

†) Histoire de l'Académie des sciences de Paris, 1782; Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes; Mécanique céleste, T. II.

Und ebenso unmittelbar einleuchtend ist der andere Satz, dass zwei mit einem dritten confocale Ellipsoide auch unter sich confocal sind.

Bezeichnen nun wie vorhin $\alpha, \beta, \gamma$ und $\alpha', \beta', \gamma'$ beziehungsweise die Halbachsen des gegebenen und des mit diesem durch den afficirten Punkt $(a, b, c)$ gelegten confocalen Ellipsoides, sind ferner $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Halbachsen eines mit jenen confocalen, aber eines solchen Ellipsoides, für welches der angezogene Punkt noch ein äusserer bleibt: so wird nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze

$$X = -2\pi a \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+\alpha'^2)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma'^2}\right)}}$$

die dem Ellipsoid $[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]$ entsprechende Attractionscomponente $X_1$ dargestellt durch

$$X_1 = -2\pi a \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{\alpha'\beta'\gamma'} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+\alpha'^2)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma'^2}\right)}}.$$

Mithin gilt die Beziehung

$$\frac{X_1}{X} = \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{\alpha\beta\gamma},$$

und daher ist wegen der hier Statt findenden Symmetrie auch

$$\frac{Y_1}{Y} = \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{Z_1}{Z}.$$

Man kann diese den Maclaurin'schen Lehrsatz begründenden Relationen in einer andern Gestalt aussprechen, wenn man statt der Producte $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha\beta\gamma$ die Massen $M$ und $M_1$ der beiden confocalen Ellipsoide $[\alpha, \beta, \gamma]$ und $[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]$ einführt. So nämlich gewinnt man die Beziehung

$$\frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{M_1}{M},$$

d. h. die gleichnamigen Componenten der Anziehung homogener confocaler Ellipsoide auf einen und denselben äussern Punkt verhalten sich zu einander wie die Massen der Ellipsoide. Die Resultanten der Componenten sind daher demselben Gesetze unterworfen, und

die Richtung derselben bleibt, wie unmittelbar aus der Anschauung erhellt, immer die nämliche.

## §. 168.

### Anwendung des Maclaurin'schen Satzes.*)

Zwar ist das Theorem Maclaurin's nur für den Fall bewiesen, dass in Bezug auf die beiden confocalen Ellipsoide $[\alpha,\beta,\gamma]$, $[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]$ der angezogene Punkt $(a, b, c)$ ein äusserer ist. Wie aber sofort einleuchtet, besitzt der Satz selbst dann noch Geltung, wenn der angezogene Punkt der Oberfläche des einen der beiden confocalen Ellipsoide angehört. Offenbar braucht man, um hiervon sich zu überzeugen, nur das mit $[\alpha, \beta, \gamma]$ confocale Ellipsoid $[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]$ dem durch $(a, b, c)$ gelegten confocalen Ellipsoide $[\alpha', \beta', \gamma']$ unendlich naheliegend anzunehmen, dann die im Vorhergehenden bewiesenen Relationen zu bilden und nun endlich den Unterschied $\alpha'^2 - \alpha_1^2 = \varepsilon^2$ bis zu seiner Grenze Null abnehmen zu lassen.

Bezeichnet daher $X'$ die der $x$-Achse parallele Componente des mit $[\alpha, \beta, \gamma]$ durch den Punkt $(a, b, c)$ gelegten confocalen Ellipsoides, so besteht zunächst noch immer die Gleichung

$$X' = -2\pi a \int_0^\infty \frac{ds}{(s+\alpha'^2)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma'^2}\right)}}.$$

Daraus aber folgt nun durch Multiplication mit $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}$ für die Componente $X$ des Ellipsoides $[\alpha, \beta, \gamma]$ der Ausdruck

$$X = -2\pi a \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+\alpha'^2)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta'^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma'^2}\right)}}.$$

In der That also können mittelst des Maclaurin'schen Theoremes die Componenten der Wirkung des Ellipsoides $[\alpha, \beta, \gamma]$ auf einen äussern Punkt bestimmt werden.

*) Um Missverständnissen vorzubeugen, erinnern wir nochmals ausdrücklich daran, dass Maclaurin's Theorem ganz unabhängig von dem Vorhergehenden sich begründen lässt. Den Chasles'schen rein geometrischen Beweis desselben findet man z. B. in Duhamel's Mechanik, Bd. 1, Nr. 146.

## III. Kapitel.

### Reduction vielfacher Integrale auf einfache nach verschiedenen Methoden.

### §. 169.

#### Winckler'sche Formeln.*)

Schon in §. 158. wurde erwähnt, dass die Behandlung eines bestimmten vielfachen Integrales als vollendet angesehen werden darf, sofern seine Zurückführung auf ein einfaches Integral gelungen ist. Dieser Gedanken nun wird in der That das leitende Princip in den nachfolgenden Untersuchungen bilden, und nur in wenigen Fällen wird es möglich sein, die Werthe vorkommender vielfacher Integrale frei vom Integralzeichen darzustellen oder doch wenigstens auf bekannte Functionen, wie z. B. Gammafunctionen, zu reduciren.

Die uns jetzt vorliegende Aufgabe der Reduction vielfacher Integrale nun beginnen wir mit der Darstellung einer von Winckler gegebenen Relation zwischen zwei vielfachen Integralen derselben Form, aus der mit Leichtigkeit sofort zwei andere Formeln sich ziehen lassen, die ihrerseits wieder einige bekannten Resultate als blosse Corollare enthalten.

Zu dem Behufe seien $x_0, x_1, x_2, \ldots x_m$ und $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ von einander unabhängige Veränderlichen; die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$; $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ ferner sollen positive Constanten bedeuten, und endlich bezeichne das Symbol $c_{\mu,\nu}$ alle positiven Werthe, welche die Constante $c$ erwirbt, wenn für $\mu$ und $\nu$ beziehungsweise die ganzen Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m$ und $0, 1, 2, \ldots, n$ gesetzt werden. Nennt man nun um der Kürze willen die Producte

$$x_1^{\alpha_1-1}\, x_2^{\alpha_2-1}\, x_3^{\alpha_3-1} \ldots x_m^{\alpha_m-1},\quad y_1^{\beta_1-1}\, y_2^{\beta_2-1} \ldots y_n^{\beta_n-1}$$

bezüglich $X$, $Y$, schreibt ferner

$$u = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu}\, x_\mu\, y_\nu$$

*) Siehe A. Winckler: Ueber einige vielfache Integrale. Aus dem LX. Bde. d. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissscht. zu Wien. II. Abthl. Juliheft. Jahrg. 1869.

und integrirt schliesslich, was offenbar angeht, den Ausdruck $X\,Ye^{-u}$ zwischen den Grenzen 0 und $\infty$; so entsteht das $(m+n)$fache Integral

$$W = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots X\,Ye^{-u}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m\,dy_1\,dy_2\ldots dy_n,$$

in welchem die einzelnen Integrationen entweder nach den $x$, oder nach den $y$ unmittelbar sich vollziehen lassen, je nachdem man nämlich zuerst nach jenen, oder diesen integrirt. Denn da die Grössen $x$ und $y$ völlig unabhängig von einander und die Integrationsgrenzen sämmtlich constant sind, so darf man dem Integrale $W$ augenscheinlich die folgenden Formen geben:

$$W = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots dx_1\,dx_2\ldots dx_m\,X\,W_y \text{ und } W = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots dy_1\,dy_2\ldots dy_n\,Y\,W_x,$$

wenn man nämlich für den Augenblick der kürzern Schreibweise halber die Gleichungen

$$W_y = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots dy_1\,dy_2\ldots dy_n\,Y e^{-\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=n} y_n \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu}\,x_\mu}$$

und

$$W_x = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots dx_1\,dx_2\ldots dx_m\,X e^{-\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m} x_\mu \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu,\nu}\,y_\nu}$$

bildet. Jede dieser letztern Grössen $W$ aber zerfällt ersichtlich in ein Product einzelner Integrale, deren jedes nach der Formel

$$\frac{\Gamma(a)}{s^a} = \int_0^\infty e^{-sv}\,v^{a-1}\,dv$$

entwickelbar ist, und folglich gewinnt man die Beziehungen

$$W_y = \frac{\Gamma(\beta_1)\,\Gamma(\beta_2)\ldots\Gamma(\beta_n)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\left(\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu}\,x_\mu\right)^{\beta_\nu}}\,e^{-y_0\sum\limits_0^m c_{\mu,0}\,x_\mu}$$

und

$$W_x = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_m)}{\prod\limits_{\mu=1}^{\mu=m}\left(\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu,\nu}\, y_\nu\right)^{\alpha_\mu}} e^{-x_0 \sum\limits_0^n c_{0,\nu}\, y_\nu}.$$

Die Einführung dieser Werthe in die entsprechenden Formen des Integrales $W$ liefert daher die Relation

$$\text{I.}\quad \Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\dots\Gamma(\beta_n)\int_0^\infty\int_0^\infty\dots\frac{dx_1\,dx_2\dots dx_m\, X e^{-y_0\sum\limits_0^m c_{\mu,0}\, x_\mu}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\left[\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m} c_{\mu,\nu}\, x_\mu\right]^{\beta_\nu}}$$

$$= \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_m)\int_0^\infty\int_0^\infty\dots\frac{dy_1\,dy_2\dots dy_n\, Y e^{-x_0\sum\limits_0^n c_{0,\nu}\, y_\nu}}{\prod\limits_{\mu=1}^{\mu=m}\left[\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=n} c_{\mu,\nu}\, y_\nu\right]^{\alpha_\mu}}.$$

Hieraus aber fliessen für gewisse besonderen Annahmen wieder zwei neue Beziehungen. Schreibt man nämlich einerseits $x_0 = y_0 = 1$, $c_{0,0} = 0$ und ersetzt anderseits die Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_m$ durch $x_0 x_1, x_0 x_2, \dots, x_0 x_m$ und $y_0$ durch 1, multiplicirt alsdann Gleichung I. mit $x_0^{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n+\lambda-1}\, dx_0$ und integrirt diese schliesslich in Bezug auf $x_0$ zwischen den Grenzen 0 und $\infty$: so ergeben sich, wenn man noch zur Abkürzung

$$A = \Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_m),\quad B = \Gamma(\beta_1)\,\Gamma(\beta_2)\dots\Gamma(\beta_n),$$
$$a = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m+\lambda > 0,\quad b = \beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n+\lambda > 0$$

setzt, wo $\lambda$ constant, den beiden genannten Fällen entsprechend die Formeln

$$1.\quad B\int_0^\infty\int_0^\infty\dots\frac{x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\dots x_m^{\alpha_m-1}\, e^{-(c_{1,0}x_1+c_{2,0}x_2+\dots+c_{m,0}x_m)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\left\{c_{0,\nu}+c_{1,\nu}x_1+c_{2,\nu}x_2+\dots+c_{m,\nu}x_m\right\}^{\beta_\nu}}\, dx_1\,dx_2\dots dx_m$$

$$= A\int_0^\infty\int_0^\infty\dots\frac{y_1^{\beta_1-1}y_2^{\beta_2-1}\dots y_n^{\beta_n-1}\, e^{-(c_{0,1}y_1+c_{0,2}y_2+\dots+c_{0,n}y_n)}\, dy_1\,dy_2\dots dy_n}{\prod\limits_{\mu=1}^{\mu=m}\left\{c_{\mu,0}+c_{\mu,1}y_1+c_{\mu,2}y_2+\dots+c_{\mu,n}y_n\right\}^{\alpha_\mu}}$$

und

$$\frac{B}{\Gamma(b)}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\!\!\cdots\frac{x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\dots x_m^{\alpha_m-1}\,dx_1\,dx_2\dots dx_m}{\left[c_{0,0}+c_{1,0}x_1+\dots+c_{m,0}\,x_m\right]^a\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\left(c_{0,\nu}+c_{1,\nu}x_1+\dots+c_{m,\nu}x_m\right)^{\beta_\nu}}\,{}^{*)}$$

$$=\frac{A}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\!\!\cdots\frac{y_1^{\beta_1-1}y_2^{\beta_2-1}\dots y_n^{\beta_n-1}\,dy_1\,dy_2\dots dy_n}{\left[c_{0,0}+c_{0,1}\,y_1+\dots+c_{0,n}\,y_n\right]^b\prod\limits_{\mu=1}^{\mu=m}\left(c_{\mu,0}+c_{\mu,1}y_1+\dots+c_{\mu,n}y_n\right)^{\alpha_\mu}}.$$

Schreibt man in der ersten Gleichung $m=n=1$ und unterdrückt in den Veränderlichen $x$, $y$, sowie in den Constanten $\alpha$, $\beta$ den Index 1, so entspringt die in §. 43. bewiesene Dirichlet'sche Relation

$$\Gamma(\beta)\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}\,e^{-c_{1,0}\,x}\,dx}{(c_{0,1}+c_{1,1}\,x)^\beta}=\Gamma(\alpha)\int_0^\infty\frac{y^{\beta-1}\,e^{-c_{0,1}\,y}\,dy}{(c_{1,0}+c_{1,1}\,y)^\alpha}.\,{}^{**)}$$

*) Wenn man zuerst nach $x_0$ integrirt, so hat man für diesen Theil des Integrales auf der linken Seite der Relation

$$B\int_0^\infty x_0^{a+b-\lambda-1}\,dx_0\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\!\!\cdots\frac{X.e^{-x_0\left(\sum\limits_1^m c_{\mu,0}\,x_\mu+c_{0,0}\right)}dx_1\,dx_2\dots dx_m}{\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\left[x_0\left(c_{0,0}+\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=m}c_{\mu,\nu}\,x_\mu\right)\right]^{\beta_\nu}}$$

$$=A\int_0^\infty x_0^{b-1}\,dx_0\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\!\!\cdots\frac{Y e^{-x_0\sum\limits_0^n c_{0,\nu}y_\nu}\,dy_1\dots dy_n}{\prod\limits_{\mu=1}^{\mu=m}\left[\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=n}c_{\mu,\nu}y_\nu\right]^{\alpha_\mu}}$$

den Ausdruck

$$\int_0^\infty e^{-\left(c_{0,0}+\sum\limits_1^m c_{\mu,0}\,x_\mu\right)x_0}\,x_0^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_m+\lambda-1+\sum\limits_1^n\beta_\nu-\sum\limits_1^n\beta_\nu}\,dx_0$$

$$=\frac{\Gamma(a)}{\left(c_{0,0}+\sum\limits_1^m c_{\mu,0}\,x_\mu\right)^a}.$$

**) Von dieser Formel sagt Winckler, dass Cauchy dieselbe gefunden und im Journal de l'école polytechnique, tome XVII, page 154 mitgetheilt hat.

Unter denselben Voraussetzungen fliesst ferner aus Gleichung 2.

$$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\lambda)}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{(c_{0,0}+c_{1,0}\,x)^{\alpha+\lambda}\,(c_{0,1}+c_{1,1}\,x)^{\beta}}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\lambda)}\int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}\,dy}{(c_{0,0}+c_{0,1}\,y)^{\beta+\lambda}\,(c_{1,0}+c_{1,1}\,y)^{\alpha}},$$

die ihrerseits wieder in die von Abel*) gefundene Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^{\beta}\,(x+a)^{\gamma}}=\frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)}\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{1-\alpha}\,(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}$$

übergeht, sofern man $c_{0,0}=a$, $c_{1,0}=c_{0,1}=c_{1,1}=1$, $\alpha+\lambda=\gamma$ schreibt und schliesslich $\alpha$ durch $1-\alpha$ ersetzt, wo aber nunmehr das neue $\alpha$ einen positiven echten Bruch bezeichnen muss.

Auch die Euler'sche Relation zwischen den $B$ und $\Gamma$ lässt sich aus der obigen Gleichung herleiten; zu dem Behufe braucht man nur $c_{0,0}=c_{1,0}=c_{0,1}=c_{1,1}=\beta=1$ und $\lambda=\gamma-1$ zu setzen, indess ist eine derartige Herleitungsweise der genannten Beziehung nicht zu empfehlen, weil für $\alpha+\gamma<1$ die Function $B$ unter einer illusorischen Form erscheint.

Wählt man in Gleichung 1. $n=1$ und schreibt $\beta$, $y$ statt $\beta_1$, $y_1$, so entspringt die Formel

$$1''.\quad \int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\frac{x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_m^{\alpha_m-1}\,e^{-(c_{1,0}x_1+c_{2,0}x_2+\ldots+c_{m,0}x_m)}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m}{(c_{0,1}+c_{1,1}\,x_1+c_{2,1}\,x_2+\ldots+c_{m,1}\,x_m)^{\beta}}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_m)}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}\,e^{-c_{0,1}y}\,dy}{\prod_1^m\left(c_{\mu,0}+c_{\mu,1}\,y\right)^{\alpha_\mu}}$$

Die Gleichung 2. dagegen führt unter denselben Voraussetzungen zu der Beziehung

*) Oeuvres complètes, tome I, page 96.

$$2^a. \int_0^\infty\int_0^\infty \cdots \frac{x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \ldots x_m^{\alpha_m-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m}{(c_{0,0}+c_{1,0}x_1+\ldots+c_{m,0}x_m)^\alpha (c_{0,1}+c_{1,1}x_1+\ldots+c_{m,1}x_m)^\beta}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+\lambda)}{\Gamma(\beta)} \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}\, dy}{\left(c_{0,0}+c_{0,1}y\right)^{\beta+\lambda} \prod_1^m \left(c_{\mu,0}+c_{\mu,1}y\right)^{\alpha_\mu}}$$

Und hieraus fliesst wieder für $c_{\mu,0} = c_{\mu,1}$, $\mu = 0, 1, \ldots m$:

$$2^b. \int_0^\infty\int_0^\infty \cdots \frac{x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \ldots x_m^{\alpha_m-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m}{(c_{0,0}+c_{1,0}x_1+\ldots+c_{m,0}x_m)^{\alpha+\beta}}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+\lambda)\,\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_m)}{c_{0,0}^{\beta+\lambda} \prod_1^m c_{\mu,0}^{\alpha_\mu}\,\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

## §. 170.

### Bemerkungen zu dem Vorhergehenden. Cauchy'sche Reductionsmethode.

Zu den Formeln $1^a$. und $2^b$. oder vielmehr zu denjenigen, welche beziehungsweise für $c_{0,1}$ und $c_{0,0} = 1$, $\alpha + \beta = \mu$, also $\beta + \lambda = \mu - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)$ aus denselben entspringen, ist Moigno*) vermittelst der früher erörterten Cauchy'schen Integrationsmethode gelangt. Dieselbe gestattet in der That die Erweiterung auf vielfache Integrale unmittelbar; man schliesst dies auch sofort, wenn man sich erinnert, dass die Methode dadurch charakterisirt ist, einen passenden Factor der Function unter dem Zeichen der Integration durch ein solches bestimmtes Integral zu ersetzen, dass nach dieser Substitution die einzelnen Integrationen sich vollziehen lassen. Betrachten wir z. B., um einen allgemeinen Fall vorzuführen, ein vielfaches Integral von der Form

$$S = \int\int\int \cdots \frac{P}{Q^\mu}\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

in welchem $P$ und $Q$ Functionen der Variabeln $x, y, z, \ldots$

*) Calcul intégral. §. 121.

bedeuten und $\mu$ eine positive oder auch eine solche complexe Constante vorstellt, deren reeller Theil wesentlich positiv ist; so lässt sich — wie aus früher gepflogenen Untersuchungen bekannt ist — der Factor $\frac{1}{Q^\mu}$ immer durch das Integral

$$\frac{1}{Q^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{-Qt}\, t^{\mu-1}\, dt$$

ersetzen, und sonach wird schliesslich

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \int\int\int \dots t^{\mu-1}\, P e^{-Qt}\, dx\, dy\, dz \dots dt.$$

Nun seien $P$ und $Q$ derartige Functionen von $x, y, z, \dots$, für welche die Beziehungen gelten

$$P = P_x\, P_y\, P_z \dots, \quad Q = c + Q_x + Q_y + Q_z + \dots,$$

in denen $c$ constant ist und die Symbole $P_x, P_y, \dots; Q_x, Q_y, \dots$ bezüglich Functionen bloss von $x$, bloss von $y$ u. s. f. bedeuten sollen; alsdann wird augenscheinlich das Integral $S$ auf ein einfaches

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{-ct}\, u\, v\, w \dots t^{\mu-1}\, dt$$

reducirt, sofern die einzelnen Integrationen

$$u = \int e^{-Q_x t}\, P_x\, dx, \quad v = \int e^{-Q_y t}\, P_y\, dy, \dots$$

sich ausführen lassen.

Zu den Fällen dieser Art gehören offenbar die im vorigen Paragraphen mitgetheilten speciellen Integrale, und zwar gelten diese, weil in der Gleichung

$$\frac{1}{Q^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{-Qt}\, t^{\mu-1}\, dt$$

unsern frühern Betrachtungen zufolge nicht nur die Grösse $\mu$, sondern auch $Q$ eine complexe Grösse vorstellen darf, sofern nur deren reeller Theil positiv ist, auch dann noch, wenn die in ihnen vorkommenden Constanten complexe Zahlen der eben erwähnten Art bezeichnen. Selbst für die Formel I. bleibt diese Behauptung richtig.

## §. 171.

**Darstellung willkürlicher Functionen mit beliebig vielen Veränderlichen durch Fourier'sche Integrale.*)**

Wenn es sich darum handelt, eine Function $s$ zu bestimmen, welche erstens der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right),$$

wo $a$ constant, Genüge leistet, die zweitens für $t=0$ eine willkürliche Function $f(x, y, z)$ repräsentirt und deren partielle Derivirte $\frac{\partial s}{\partial t}$ endlich drittens ebenfalls für $t=0$ auf eine beliebig gegebene Function $F(x, y, z)$ sich reducirt**): so wird, wie nach den Lehren der Theorie partieller Differentialgleichungen leicht bewiesen werden kann, diese Aufgabe gelöst durch das sechsfache Integral

$$s = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 (6) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos P \left[f(\alpha,\beta,\gamma) \cos a\varrho t + \frac{F(\alpha,\beta,\gamma) \sin a\varrho t}{a\varrho}\right] d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

wo $P = \lambda(\alpha - x) + \mu(\beta - y) + \nu(\gamma - z)$ und $\varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ ist. Von der Richtigkeit dieses Satzes können wir uns jedoch auch *a posteriori* überzeugen; zu dem Behufe brauchen wir in der That das Integral $s$ nur der Derivation in der vorgeschriebenen Weise zu unterwerfen und ausserdem zu zeigen, dass Fourier's Theorem von der Darstellbarkeit einer beliebigen Function $\varphi(x)$ durch das Doppelintegral

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda(\alpha - x)\, d\alpha\, d\lambda$$

die Erweiterung auf Functionen mehrer Veränderlichen zulässt. Da die erstere Aufgabe mit keinerlei Schwierigkeiten verknüpft ist und bloss die letztere einer nähern Begründung bedarf, ja im Grunde genommen für den Augenblick unser

*) Aus Dirichlet's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen entlehnt.

**) Die Untersuchungen über die Bewegung elastisch-flüssiger Körper führen wirklich zu dieser Aufgabe. Man vergl. beispielsweise Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, §. 106.

Interesse allein beansprucht; so beschränken wir uns auch auf diese, und zwar untersuchen wir zunächst den Fall, in welchem die willkürliche Function $\varphi$ nur zwei von einander unabhängige Veränderlichen $x$, $y$ enthält. Betrachten wir nun $y$ vorläufig als eine beliebige Constante, so lässt sich offenbar vermöge des Fourier'schen Lehrsatzes die Function $\varphi(x)$ in folgender Form darstellen:

$$1. \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha, y) \cos \lambda\,(\alpha - x)\, d\alpha\, d\lambda.$$

Anderseits aber gilt die Gleichung

$$\varphi(\alpha, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha, \beta) \cos \mu\,(\beta - y)\, d\mu\, d\beta,$$

und folglich ergiebt sich durch Substitution dieses Werthes in Gleichung 1. die neue Beziehung

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \overline{\int\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha,\beta) \cos\lambda(\alpha - x) \cos\mu(\beta - y)\, d\alpha\, d\beta\, d\lambda\, d\mu.$$

In ganz ähnlicher Weise aber fliesst weiter, dass für eine von den drei unabhängig veränderlichen Grössen $x$, $y$, $z$ abhängende willkürliche Function $\varphi(x, y, z)$ die Relation besteht

$$2. \quad \varphi(x, y, z)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 (6) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \cos\lambda\,(\alpha - x) \cos\mu\,(\beta - y) \cos\nu\,(\gamma - z)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

ja man schliesst leicht, dass überhaupt eine Function beliebig vieler Variabeln durch ein mehrfaches Integral darstellbar ist.

Man kann diesen Integralen eine elegantere Gestalt geben, wie wir sogleich an dem sechsfachen Integrale 2. zeigen werden. Bedenkt man nämlich, dass in Folge der Relation

$$\cos a \cos b \cos c = \tfrac{1}{4}\,[\cos\,(a + b + c) + \cos\,(a + b - c) + \cos\,(a - b + c) + \cos\,(-a + b + c)]$$

das Product $\cos \lambda\,(\alpha - x) \cos \mu\,(\beta - y) \cos \nu\,(\gamma - z)$ mit

$$\frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} \cos[\lambda(\alpha - x) + \mu(\beta - y) + \nu(\gamma - z)] + \cos[\lambda(\alpha - x) + \mu(\beta - y) - \nu(\gamma - z)] \\ + \cos[\lambda(\alpha - x) - \mu(\beta - y) + \nu(\gamma - z)] + \cos[-\lambda(\alpha - x) + \mu(\beta - y) + \nu(\gamma - z)] \end{array} \right\}$$

gleichbedeutend ist; so lässt sich das Integral 2. in eine

Summe von Integralen zerfällen, deren jedes nur einen Cosinus in sich begreift. Vertauscht man nun in den gewonnenen Integralen die Veränderlichen $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$ bezüglich mit $+\lambda$, $+\mu$, $+\nu$ und nimmt endlich die hierdurch erzeugten Minusglieder additiv, d. h. verwechselt man die Grenzen der mit dem Minuszeichen behafteten Integrale; so entspringen vier Integrale von der Form

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} (6) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha,\beta,\gamma) \cos[\lambda(\alpha-x)+\mu(\beta-y)+\nu(\gamma-z)]\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Und daher wird schliesslich

$$\varphi(x, y, z)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 (6) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha,\beta,\gamma) \cos[\lambda(\alpha-x)+\mu(\beta-y)+\nu(\gamma-z)]\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

und allgemein für eine Function von $n$ Variabeln

$$\varphi(x,y,z,\ldots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n (2n) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots) \cos[\lambda(\alpha-x)+\ldots]\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots \text{*})$$

## §. 172.

**Reduction des sechsfachen Integrales $s$ (§. 171.) auf ein Doppelintegral.**)**

Das im vorigen Paragraphen erwähnte sechsfache Integral

$$s = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 (6) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f(\alpha,\beta,\gamma) \cos a\varrho t + F(\alpha,\beta,\gamma) \frac{\sin a\varrho t}{a\varrho} \right] \cos P\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

lässt sich auf ein Doppelintegral reduciren, und zwar gelingt diese Reduction theils durch Einführung von Polarcoordinaten, theils durch Benutzung des Fourier'schen Satzes von der Darstellbarkeit einer willkürlichen Function durch ein Sinus-Doppelintegral.

Um dies zu beweisen, genügt es offenbar, bloss das

*) Auch mit Hülfe des Imaginären kann man sich von der Richtigkeit dieser Umformung überzeugen; man vergleiche beispielsweise: Riemann, partielle Diffgl., S. 284.

**) Aus Dirichlet's Vorlesungen über partielle Differentialgl.

Integral

$$s' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 (6) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha,\beta,\gamma) \frac{\sin a\varrho t}{a\varrho} \cos P\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

einer nähern Betrachtung zu unterwerfen, indem der andere, die Function $f$ enthaltende Theil des Integrales $s$ durch Differentiation von $s'$ nach $t$ und Vertauschung von $F$ mit $f$ aus $s'$ hervorgeht, also unmittelbar aus dem für $s'$ gewonnenen Resultate abgelesen werden kann.

Geben wir nun $s'$ die Gestalt

$$s' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, F(\alpha,\beta,\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int \cos P \frac{\sin a\varrho t}{a\varrho} d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

und ersetzen überdies der leichtern Schreibweise halber $\alpha - x$, $\beta - y$, $\gamma - z$ bezüglich durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, wodurch $P$ in $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$ und $s'$ in

$$s' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int d\alpha\, d\beta\, d\gamma\; F(\alpha+x,\beta+y,\gamma+z) \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int \cos P \frac{\sin a\varrho t}{a\varrho}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

sich verwandelt; so besteht unsere nächste Aufgabe in der Reduction des dreifachen Integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos P \frac{\sin a\varrho t}{a\varrho}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Wie man sieht, besitzt dasselbe die Form $\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda,\mu,\nu)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$ und kann also unsern frühern Lehren zufolge entweder als der analytische Ausdruck eines auf die rechtwinkligen Achsen der $\lambda$, $\mu$, $\nu$ bezogenen Volumens, oder als der Repräsentant der in diesem Volumen befindlichen Masse angesehen werden. Behalten wir nun aber das rechtwinklige Coordinatensystem bei, so lässt sich keine der auszuführenden Integrationen vollziehen, vielmehr gelingt dies, wenn statt der rechtwinkligen Coordinaten $\lambda$, $\mu$, $\nu$ Polarcoordinaten $\varrho$, $\vartheta$, $\varphi$ gewählt werden. In welcher Weise aber ist diese Wahl hier zu treffen? Offenbar werden wir schon durch $\varrho = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$ darauf hingewiesen, den Pol mit dem Ursprunge des rechtwinkligen Coordi-

natensystems zusammenfallen zu lassen. Wir denken uns dann ferner durch die Punkte $(\lambda, \mu, \nu)$ und $(\alpha, \beta, \gamma)$ die Radienvectoren $\varrho$ und $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ gezogen und nennen $\vartheta$ den zwischen $\varrho$ und $r$ befindlichen Winkel. Nun bezeichnen augenscheinlich $\frac{\lambda}{\varrho}, \frac{\mu}{\varrho}, \frac{\nu}{\varrho}$ und $\frac{\alpha}{r}, \frac{\beta}{r}, \frac{\gamma}{r}$ die Cosinus der Winkel, welche die Geraden $\varrho$ und $r$ mit den Achsen der $\lambda, \mu, \nu$ oder — wie wir jetzt sagen wollen — der $x, y, z$ bilden. Zwischen diesen Cosinus und dem Cosinus des Winkels $\vartheta$ aber besteht nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie die Relation

$$\cos\vartheta = \frac{\alpha}{r}\frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\beta}{r}\frac{\mu}{\varrho} + \frac{\gamma}{r}\frac{\nu}{\varrho},$$

d. g.

$$r\varrho\cos\vartheta = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = P,$$

und hieraus schliesst man nun weiter, dass die Polarachse, deren Lage vorläufig ganz unbestimmt gelassen war, in die Gerade $r$ zu verlegen ist. Die Lage der Polarebene dagegen ist völlig gleichgültig, weil rund um $r$ herum Symmetrie sich zeigt.

Heisst jetzt $\varphi$ der Winkel, welchen eine durch $\varrho$ und $r$ gehende Ebene mit der Polarebene bildet, so stellt bekanntlich $\varrho^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\varrho$ das Raumelement $d\lambda\, d\mu\, d\nu$ vor. Die zu integrirende Differentialfunction $\cos P \frac{\sin a\varrho t}{a\varrho}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$ wird mithin in $\frac{1}{a}\cos(r\varrho\cos\vartheta)\sin a\varrho t \,.\, \varrho\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\varrho$ sich verwandeln, und dieser Ausdruck ist nunmehr von $\varrho=0$, $\vartheta=0$, $\varphi=0$ bis $\varrho=+\infty$, $\vartheta=\pi$, $\varphi=2\pi$ zu integriren, weil das ursprüngliche Integral sämmtliche Elemente von $-\infty$ bis $+\infty$ umfasst. Daher die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos P \sin a\varrho t}{a\varrho}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(r\varrho\cos\vartheta)\sin a\varrho t\; \varrho\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\varrho.$$

Integriren wir aber zunächst nach $\varphi$, so kommt statt des dreifachen Integrales rechts das zweifache

$$\frac{2\pi}{a}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi \cos(r\varrho\cos\vartheta)\sin a\varrho t\,\varrho\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varrho.$$

Nun ist

$$\int\limits_0^\pi \cos(r\varrho\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = -\frac{1}{r\varrho}\int\limits_0^\pi d[\sin(r\varrho\cos\vartheta)] = \frac{2\sin r\varrho}{r\varrho},$$

folglich

$$\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \cos(r\varrho\cos\vartheta)\sin a\varrho t\,\varrho\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,d\varrho$$

$$= \frac{4\pi}{a}\int\limits_0^\infty \frac{\sin r\varrho}{r\varrho}\,\varrho\sin a\varrho t\,d\varrho;$$

und daher wird jetzt

$$s' = \frac{1}{2\pi^2 a}\overline{\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,F(\alpha+x,\beta+y,\gamma+z)\int\limits_0^\infty \frac{\sin r\varrho}{r}\sin a\varrho t\,d\varrho.$$

Dieses vierfache Integral aber gestattet eine fernere Vereinfachung. Denn schreibt man dasselbe wie folgt

$$s' = \frac{1}{2\pi^2 a}\int\limits_0^\infty \sin a\varrho t\,d\varrho\,\overline{\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,F(\alpha+x,\beta+y,\gamma+z)\frac{\sin r\varrho}{r}$$

und wählt auch hier wieder Polarcoordinaten $r$, $\vartheta$, $\varphi$ statt der rechtwinkligen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und zwar jetzt in der gewöhnlichen Weise, d. h. setzt man

$$\alpha = r\cos\vartheta,\ \beta = r\sin\vartheta\cos\varphi,\ \gamma = r\sin\vartheta\sin\varphi;$$

so verwandelt sich $s'$ in

$$s' = \frac{1}{2\pi^2 a}\int\limits_0^\infty d\varrho\sin at\varrho\int\limits_0^\infty dr\int\limits_0^\pi d\vartheta\int\limits_0^{2\pi} F(x+r\cos\vartheta,$$

$$y+r\sin\vartheta\cos\varphi,\ z+r\sin\vartheta\sin\varphi)\sin(r\varrho)\,r\sin\vartheta\,d\varphi$$

oder, was dasselbe, in

$$s' = \frac{1}{2\pi^2 a}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta\,d\varphi\sin\vartheta\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty F(x+r\cos\vartheta,\ldots)\sin at\varrho\sin(r\varrho)\,r\,d\varrho\,dr.$$

Erinnert man sich aber nunmehr der bekannten Beziehung

$$\frac{\pi}{2}\varphi(v)=\int_0^\infty\int_0^\infty d\varrho\, dr \sin(\varrho v)\sin(\varrho r)\,\varphi(r),$$

so erkennt man bei einiger Aufmerksamkeit leicht, dass das Doppelintegral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty d\varrho\, dr\, r\, F(x+r\cos\vartheta,\, y+r\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$z+r\sin\vartheta\sin\varphi)\sin r\varrho\sin at\varrho$$

die Function

$$\frac{\pi}{2}\, at\, F(x+at\cos\vartheta,\, y+at\sin\vartheta\cos\varphi,\, z+at\sin\vartheta\sin\varphi)$$

repräsentirt und dass folglich

$$s'=\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\vartheta\, d\varphi \sin\vartheta\, F(x+at\cos\vartheta,\, y+at\sin\vartheta\cos\varphi,\, z+at\sin\vartheta\sin\varphi)$$

ist. Hieraus aber fliesst mit Beachtung der oben über die Bildung des Integrales $s$ gemachten Bemerkungen sogleich weiter, dass

$$s=\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\vartheta\, d\varphi \sin\vartheta\, .\, F(x+at\cos\vartheta,\;y+at\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$z+at\sin\vartheta\sin\varphi)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[t\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\vartheta\, d\varphi\sin\vartheta\, .\, f(x+at\cos\vartheta,\, y+at\sin\vartheta\cos\varphi,\right.$$

$$\left. z+at\sin\vartheta\sin\varphi)\right].$$

Diese für die mathematische Physik sehr wichtige Formel wurde zuerst von Poisson mittelst einer sehr umständlichen Reihenentwickelung begründet.*)

Nicht ohne Interesse dürfte übrigens die Bemerkung noch sein, dass das Doppelintegral $s'$ geometrisch genommen

*) Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques. (Lu à l'Académie le 19 juillet 1819.) Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France. Année 1818. T. III. P. 121.

über die Oberfläche derjenigen Kugel sich erstreckt, welche mit dem Halbmesser $at$ aus dem Punkte, dessen rechtwinklige Coordinaten $x$, $y$, $z$ heissen, beschrieben ist, dass also dieses Integral den mit $t$ multiplicirten mittleren Werth der Function $F$ für jene Kugelfläche darstellt. Und zwar überzeugt man sich hiervon sogleich, wenn man das Integral $s'$ in der Form

$$\frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta\, d\varphi\, (at)^2 \sin\vartheta \,.\, F(x + at\cos\vartheta,\ y + at\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$z + at\sin\vartheta\sin\varphi)$$

schreibt und ausserdem beachtet, dass $at\cos\vartheta$, $at\sin\vartheta\cos\varphi$ und $at\sin\vartheta\sin\varphi$ die rechtwinkligen, mit den Achsen der $x$, $y$, $z$ parallelen Coordinaten irgend eines Punktes der Kugelfläche sind, welche den Punkt $(x, y, z)$ zum Centrum und die Strecke $at$ zum Halbmesser besitzt, dass also $(at)^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ das Element dieser Kugelfläche repräsentirt.

## §. 173.

### Dirichlet's Reductionsmethode vielfacher Integrale.*)

Welch' ausserordentliche Vortheile mit der Wahl der Integrationsgrenzen 0 und $\infty$ oder $-\infty$ und $+\infty$ in der Theorie der bestimmten einfachen Integrale verbunden sind, ist aus unsern frühern Lehren mehr als genügend ersichtlich. Aber auch die im Vorhergehenden angestellten Betrachtungen über gewisse vielfache Integrale haben schon gezeigt, dass in der Theorie der bestimmten vielfachen Integrale die Wahl der genannten Grenzen ebenfalls mit günstigem Erfolg gekrönt ist. Noch mehr aber werden dies die nachfolgenden Untersuchungen bestätigen, und namentlich der Umstand, dass die Entwicklung, ja selbst die Reduction vielfacher Integrale im Allgemeinen mit den grössten Schwierigkeiten zu

*) Ueber eine neue Methode, die Werthe vielfacher Integrale zu finden. (Abhandlgen. der k. Akad. der Wissenschft. zu Berlin aus dem Jahre 1839.)

Sur une nouvelle Méthode pour la détermination des Intégrales multiples, par M. Lejeune Dirichlet (Liouville. Journal, t. IV, p. 164—168).

kämpfen hat, wenn in den Ungleichheiten, welche den Umfang der Integrationen bestimmen, mehrere der Veränderlichen erscheinen, dass diese Schwierigkeiten aber in vielen Fällen sich bedeutend vermindern, sofern statt der veränderlichen Grenzen die constanten 0 und $\infty$ oder $-\infty$ und $+\infty$ gewählt werden, liefert einen glänzenden Beleg für die Richtigkeit unserer Behauptung. Die Erfindung der Methode, durch welche gerade diese letztere Reduction möglich wird, ist Dirichlet's Verdienst. Sie charakterisirt sich dadurch, dass man das vorgelegte vielfache Integral mit einem Factor multiplicirt, der innerhalb der Grenzen, zwischen denen die Integrationen auszuführen sind, den Werth 1 besitzt, ausserhalb derselben hingegen verschwindet. Dabei kann es sich freilich sehr wohl ereignen, dass in Folge der unendlichen Grenzen das zu behandelnde Integral unbestimmt wird. Tritt aber ein Fall dieser Art ein, so wird man das vorgelegte Integral immer als die Grenze eines andern ansehen können, welches, nach der Dirichlet'schen Methode behandelt, vollständig bestimmt bleibt.*) Das Wesen dieses soeben angedeuteten, von Poisson und Cauchy mehrfach angewendeten Kunstgriffes ist übrigens aus der in §. 71. geführten Untersuchung zur Genüge ersichtlich.

Bevor wir nun aber die Anwendung der Dirichlet'schen Methode näher erläutern, wollen wir in dem Folgenden zuerst die Bildung des von Dirichlet gebrauchten discontinuirlichen Factors zeigen und gleich hier erwähnen, dass man auf Grund der Fourier'schen Integrale ohne grosse Mühe noch andere Discontinuitätsfactoren angeben könnte.

## §. 174.

### Dirichlet's discontinuirlicher Factor.

Frühern Lehren zufolge besitzt bekanntlich das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \vartheta x}{x}\, dx$ die Eigenschaft, dass es für ein positives $\vartheta$ dem Werthe $+\frac{\pi}{2}$ gleich ist, für ein negatives $\vartheta$ hingegen mit

*) Siehe §. 175.

$-\frac{\pi}{2}$ zusammenfällt. Wählt man mithin für $\vartheta$ nach einander die constanten Werthe $1 \pm \lambda$ und setzt zunächst $-1 < \lambda < 1$ voraus, so sind $1 + \lambda$ und $1 - \lambda$ beide positiv, und folglich wird jedes der Integrale

$$1. \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(1+\lambda)x}{x} dx \text{ und } \int_0^\infty \frac{\sin(1-\lambda)x}{x} dx$$

mit der Zahl $\frac{\pi}{2}$, also ihre Summe, d. h. das Integral

$$z = 2\int_0^\infty \frac{\sin x \cos \lambda x \, dx}{x}$$

mit $\pi$ identisch sein. Dagegen ist die eine der beiden Zahlen $1 \pm \lambda$ positiv, die andere negativ, wenn $\lambda$ entweder über 1, oder unter $-1$ sich befindet; in diesen beiden Fällen besitzt daher das Integral $z$ den Werth Null. Fällt endlich die Constante $\lambda$ mit $+1$, oder $-1$ zusammen, so ist das eine der Integrale 1. mit $\frac{\pi}{2}$, das andere mit Null gleichgeltend, und demnach wird diesen Fällen entsprechend das Integral $z$ die Grösse $\frac{\pi}{2}$ besitzen. Aus allem diesem fliesst daher der Satz

$$2\int_0^\infty \frac{\sin x \cos \lambda x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \pi, \ \lambda^2 < 1 \\ 0, \ \lambda^2 > 1 \\ \frac{\pi}{2}, \ \lambda^2 = 1 \end{array} \right. .$$

Das Integral $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x \cos \lambda x}{x} dx$, der sogenannte discontinuirliche Factor Dirichlet's, erhält mithin, wenn $\lambda$ eine von $+1$ verschiedene positive Constante bedeutet, den Werth 1, solange $\lambda$ kleiner als 1 ist, dagegen fällt es mit der Null zusammen, wenn $\lambda$ die Eins überschreitet, und für $\lambda = 1$ endlich ist es $= \frac{1}{2}$.

### §. 175.

**Das Dirichlet'sche Integral $\iiint \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$ für $0 < \left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots < 1$ und positive Constanten.**

Gestützt auf seine im Vorhergehenden erwähnte Reductions-

methode hat Dirichlet ein äusserst wichtiges Theorem entdeckt, das wir jetzt entwickeln wollen. Zu dem Behufe suchen wir vorerst den Werth des vielfachen Integrales

1. $U = \int\int\int e^{-kx} x^{a-1} dx \cdot e^{-ky} y^{b-1} dy \cdot e^{-kz} z^{c-1} dz \ldots$

zu bestimmen, in welchem die positiven Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ der Bedingung

2. $$\sigma = x + y + z + \ldots < 1$$

genügen und die Constanten $k, a, b, c, \ldots$ sämmtlich positiv sein sollen.

Das Integral $U$ würde augenscheinlich einem Producte von Gammafunctionen gleich sein, wenn die Grenzen der einzelnen Integrationen 0 und $\infty$ hiessen. Ob nun gleich ein derartiger, sich von selbst erledigender Fall hier wegen $\sigma < 1$ nicht Statt haben kann, so wird uns doch mit Berücksichtigung der oben bewiesenen Eigenschaft des Dirichlet'schen discontinuirlichen Factors durch die gemachte Bemerkung sehr klar der Weg vorgezeichnet, durch dessen Betretung wir am ehesten die Ermittlung des Werthes von $U$ gewärtigen können. Denn da $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos\sigma\varphi \, d\varphi$ sofort verschwindet, wenn auch bloss eine der in $\sigma$ enthaltenen Variabeln den Werth 1 überschreitet; so werden wir offenbar statt jener Grenzen des Integrales $U$, welche aus der Ungleichheit 2. zu entwickeln sind, durchweg 0 und $\infty$ als Integrationsintervall wählen dürfen, sofern wir $U$ mit dem vorhin genannten Factor multipliciren.*) Eine weitere Vereinfachung der Rechnung wird ferner noch eintreten, wenn wir die goniometrische Function $\cos\sigma\varphi$ durch die Grösse $e^{-\sigma\varphi i}$ ersetzen, was augenscheinlich geschehen darf, insofern wir bei der nachfolgenden

---

*) Da die Bedingung $\sigma < 1$ auch jene Werthe $x, y, z, \ldots$ in sich begreift, welche der Gleichung $\sigma = 1$ genügen, für $\sigma = 1$ aber der Discontinuitätsfactor die Grösse $\frac{1}{2}$ besitzt; so müsste eigentlich der diesen $x, y, z, \ldots$ entsprechende Integralwerth $U$ auf die Hälfte reducirt werden. Ohne Zweifel darf man indess hiervon absehen, weil jene $x, y, z, \ldots$ offenbar nur einen unendlich kleinen Beitrag zum Endwerthe des Integrales $U$ liefern. Eine indirecte Bestätigung der Richtigkeit dieser Behauptung wird man übrigens durch den später folgenden Liouville'schen Beweis der Dirichlet'schen Formel erhalten.

Entwickelung immer nur den reellen Theil der entstehenden Resultate berücksichtigen. Um dies übrigens in Kürze gleich sichtbar zu machen, wollen wir statt des Gleichheitszeichens mit dem Zusatze „dem reellen Theile von“ das Zeichen ‡ in Anwendung bringen, so dass wir schreiben

$$U \ddagger \frac{2}{\pi} \overline{\int\int\int\int}_0^\infty \ldots e^{-k\sigma} x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots dx\,dy\,dz \ldots \left\{ \frac{\sin\varphi}{\varphi} e^{-\sigma\varphi i} \right\} d\varphi.$$

Integriren wir nun zunächst nach $x$, darauf nach $y, z, \ldots$, so folgt, dass für den ersten Fall die Relation

$$U \ddagger \frac{2}{\pi} \overline{\int\int\int\int}_0^\infty \ldots e^{-k(y+z+\ldots)} y^{b-1}\, dy\, z^{c-1}\, dz \ldots$$

$$\ldots e^{-(y+z+\ldots)\varphi i} \frac{\sin\varphi}{\varphi} \frac{\Gamma(a)}{(k+\varphi i)^a} d\varphi,$$

also schliesslich die Beziehung

$$3. \quad U \ddagger \frac{2}{\pi} \Gamma(a)\, \Gamma(b)\, \Gamma(c) \ldots \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \frac{d\varphi}{(k+\varphi i)^{a+b+c+\ldots=m}}$$

gelten wird.

Um jetzt den Werth des Integrales rechts zu entdecken, wollen wir annehmen, dass statt des vielfachen Integrales $U$ das einfache

$$V = \int_0^1 e^{-kx} x^{m-1}\, dx,$$

wo $m = a + b + c + \ldots$ sein soll, zu berechnen sei. Wird dasselbe mit $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos x\varphi\, d\varphi$ multiplicirt und darauf einer dem Obigen ganz analogen Behandlungsweise unterworfen, so ergiebt sich offenbar die Beziehung

$$V \ddagger \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(k+\varphi i)x} x^{m-1} \frac{\sin\varphi}{\varphi} d\varphi\, dx$$

oder

$$V \ddagger \frac{2}{\pi} \Gamma(m) \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \frac{d\varphi}{(k+\varphi i)^m}.$$

Daraus aber fliesst weiter, dass der reelle Theil von

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{(k+\varphi i)^m}$$

mit dem Integrale $\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^1 e^{-kx}\,x^{m-1}\,dx$ identisch ist. Mithin muss $U$ den Werth

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(a+b+c+\ldots)}\int_0^1 e^{-kx}\,x^{a+b+c+\ldots-1}\,dx$$

besitzen. Dieses Resultat bleibt selbst dann noch in Kraft, wenn die Constante $k$ mit Null zusammenfällt. Dem bekannten Maximum-Minimum-Satze zufolge liegt nämlich das Integral $U$ zwischen den Integralen

$$M\iint\ldots x^{a-1}\,y^{b-1}\,z^{c-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$
$$\text{und } N\iint\ldots x^{a-1}\,y^{b-1}\,z^{c-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots,$$

wenn $M=1$ und $N=e^{-k}$ beziehungsweise das Maximum und Minimum der Function $e^{-k\sigma}$ innerhalb der Grenzen 0 und 1 bedeuten. Da nun das mit $M$ und $N$ multiplicirte vielfache Integral wegen der positiven Werthe von $a, b, c, \ldots$ niemals sinnlos wird, und da ausserdem mit der Null sich näherndem $k$ das Maximum und Minimum von $e^{-k\sigma}$ zusammenfallen, so geht offenbar für $k=0$ das Integral $U$ in das folgende

$$\iiint\ldots x^{a-1}\,y^{b-1}\,z^{c-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

über, in welchem die Grenzen der verschiedenen Integrationen immer noch aus der Ungleichheit 2. zu entlehnen sind. Anderseits aber nähert sich das Integral

$$\int_0^1 e^{-kx}\,x^{a+b+c+\ldots-1}\,dx$$

für $k=0$ der Grenze

$$\int_0^1 x^{a+b+c+\ldots-1}\,dx = \frac{1}{a+b+c+\ldots}.\text{*)}$$

Man hat daher den Satz:

---

*) Man vergl. hier den in §. 67. bewiesenen Lehrsatz.

4. $$\int\int\int \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots dx\,dy\,dz \ldots = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(1+a+b+c+\ldots)},$$

wenn $0 < \sigma = x + y + z + \ldots < 1$ und $a, b, c, \ldots$ sämmtlich positiv sind. Daraus aber fliesst sogleich eine neue Folgerung. Wenn man nämlich statt jeder der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ neue positive Variabeln $x', y', z', \ldots$ einführt, die mit jenen durch die Gleichungen

$$x = \left(\frac{x'}{\alpha}\right)^p,\; y = \left(\frac{y'}{\beta}\right)^q,\; z = \left(\frac{z'}{\gamma}\right)^r, \ldots,$$

in denen die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots;\; p, q, r, \ldots$ ebenfalls zu den positiven Grössen gehören, verbunden sind; so erhält man die Relation

$$\frac{p}{\alpha^{ap}}\frac{q}{\beta^{bq}}\frac{r}{\gamma^{cr}}\ldots\int\int\ldots x^{ap-1} y^{bq-1} z^{cr-1}\ldots dx\,dy\,dz \ldots = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(1+a+b+c+\ldots)},$$

wo jetzt die positiven Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ die Bedingung

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots < 1$$

zu erfüllen haben. Und setzt man nun für den Augenblick $ap = a'$, $bq = b'$, $cr = c'$, $\ldots$, so verwandelt sich die vorstehende Beziehung in diese:

$$\frac{p}{\alpha^{a'}}\frac{q}{\beta^{b'}}\frac{r}{\gamma^{c'}}\ldots\int\int\ldots x^{a'-1} y^{b'-1} z^{c'-1}\ldots dx\,dy\,dz \ldots$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{a'}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b'}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c'}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{a'}{p}+\frac{b'}{q}+\frac{c'}{r}+\ldots\right)}.$$

Hieraus aber ergiebt sich das elegante und äusserst wichtige Theorem Dirichlet's:

Sind $a, b, c, \ldots;\; p, q, r, \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ positive Constanten, bezeichnen ferner $x, y, z, \ldots$ positive, der Bedingung

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots < 1$$

unterworfene Veränderlichen; so findet die Gleichung Statt:

$$\text{I.} \qquad \iiint \ldots x^{a-1}\, y^{b-1}\, z^{c-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$
$$= \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots}{p\, q\, r \ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \Gamma\left(\frac{c}{r}\right) \ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \ldots\right)}.$$

Die Bedingung, dass die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ den positiven Grössen angehören sollen, können wir offenbar beseitigen, wenn wir die Constanten $a, b, c, \ldots$ ungerade, die Constanten $p, q, r, \ldots$ hingegen gerade ganze Zahlen bedeuten lassen. Alsdann aber erscheint jede Variabele in ihrer Verbindung mit den übrigen Veränderlichen nicht bloss als positive, sondern auch als negative Grösse und folglich setzt sich bei zwei, drei, $\ldots$, $n$ Variabeln das Integral aus Elementen zusammen, von denen bezüglich je 4, 8, $\ldots$, $2^n$ einander gleich sind. In dem nun vorliegenden Falle ist daher

$$\text{I}^a. \qquad \iiint \ldots x^{a-1}\, y^{b-1}\, z^{c-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$
$$= 2^n \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots}{p\, q\, r \ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \Gamma\left(\frac{c}{r}\right) \ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \ldots\right)}$$

## §. 176.

### Einige Anwendungen des Dirichlet'schen Theoremes I$^a$. auf geometrische und mechanische Fragen.

Besondere Beachtung verdient das Dirichlet'sche Theorem in dem speciellen Falle dreier Veränderlichen, weil die nun Statt findenden Gleichungen mit Leichtigkeit zur Beantwortung von Fragen über Bestimmungen von Körperinhalten, Schwerpunkten, Trägheitsmomenten u. s. f. sich benutzen lassen.

Seien z. B. vorerst in I$^a$. die Constanten $a, b, c,$ sämmtlich der Einheit, die Grössen $p, q, r$ hingegen sämmtlich der Zahl 2 gleich; so drückt das Integral

$$V = \iiint dx\, dy\, dz = \frac{\alpha \beta \gamma}{8} \cdot 8\, \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^3}{\Gamma(1 + \frac{3}{2})}$$

geometrisch gedeutet offenbar den Inhalt des dreiachsigen Ellipsoides

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1$$

aus. Da nun $[\Gamma(\frac{1}{2})]^3 = \pi\sqrt{\pi}$ und $\Gamma(1+\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ ist, so ergiebt sich ohne Weiteres das bekannte Resultat $V = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma\pi$.

Behufs einer zweiten Anwendung des dreifachen Integrales $V$ legen wir den Constanten $p$, $q$, $r$ den Werth 4 bei, alsdann wird das zu berechnende Volumen $V$ von einer Fläche des vierten Grades

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^4 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^4 = 1$$

begrenzt, und man erhält die Gleichung

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{8}\,\frac{(\Gamma\frac{1}{4})^3}{\Gamma(1+\frac{3}{4})} = \frac{\alpha\beta\gamma}{2\cdot 3}\,\frac{(\Gamma\frac{1}{4})^3}{\Gamma(\frac{3}{4})}.$$

Nun ist einerseits $\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{3}{4}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$, und andererseits gilt die Beziehung

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}\sqrt{\pi} = \int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}\,(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

d. h., wenn man $\sqrt[4]{x} = y$ setzt,

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}\sqrt{\pi} = 4\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

Durch Multiplication beider Gleichungen aber entspringt weiter

$$\Gamma(\tfrac{1}{4})^2 = \sqrt{2\pi}\cdot 4\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}},$$

also

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})^3}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \sqrt{2\pi}\cdot 4\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}\cdot\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

Nennt man mithin der Kürze halber das Integral rechts $A$, so hat man die Beziehung

$$V = \frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot\alpha\beta\gamma A^2.$$

Sie gewinnt dadurch ein besonderes Interesse, dass $A$ geometrisch genommen die Länge eines Lemniscatenbogens aus-

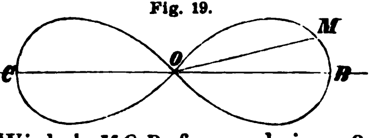


Fig. 19.

drückt.*) In der That, sei in der nebenstehenden Figur $OM = \varrho$ der Radiusvector eines beliebigen Punktes $M$ der Lemniscate $COMB$, der Winkel $MOB$ ferner heisse $\vartheta$, und $OB$ besitze die Länge 1. Die Polargleichung der Lemniscate lautet unter diesen Voraussetzungen $\varrho^2 = \cos 2\vartheta$; die Länge $A$ des Bogens $BMO$ wird daher gemäss der bekannten Rectificationsformel für Polarcoordinaten, in denen $\varrho$ als unabhängige Veränderliche auftritt, dargestellt durch das Integral

$$A = \int_0^1 d\varrho \sqrt{\varrho^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\varrho}\right)^2 + 1}.$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{d\vartheta}{d\varrho}\right)^2 = \frac{\cos 2\vartheta}{1 - \cos 2\vartheta^2} = \frac{\varrho^2}{1 - \varrho^4},$$

also

$$d\varrho \sqrt{\varrho^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\varrho}\right)^2 + 1} = \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^4}}$$

und demnach

$$A = \int_0^1 \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}}.$$

Welchen Vortheil endlich das Dirichlet'sche Theorem bei der Lösung mechanischer Fragen zu bieten im Stande ist, davon mögen die beiden folgenden Beispiele der Bestimmung des Trägheitsmomentes Zeugniss ablegen. Vorher jedoch möge des bessern Verständnisses wegen nachstehende Bemerkung eine Stelle hier finden.

Nach den in der Mechanik üblichen Benennungen versteht man unter dem Ausdrucke Trägheitsmoment eines materiellen Punktes in Bezug auf eine Achse das Product aus der Masse dieses Punktes in das Quadrat seiner Entfernung von jener Achse. Bezeichnen demnach $m_1, m_2, m_3, \ldots$ ein System von unabänderlich mit einander verbundenen Punkten und $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ihre respectiven Entfernungen

*) Vergl. Abel. Oeuvres complètes, tome I., p. 229.

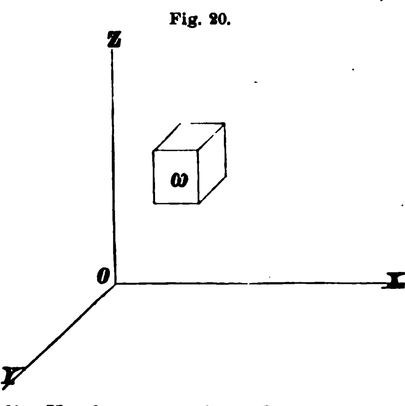
von einer gegebenen Achse, so wird die Summe

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots = \Sigma m r^2$$

das Trägheitsmoment dieses Systemes darstellen. Für den Fall einer stetigen Folge von materiellen Punkten geht mithin diese endliche Summe in ein Integral über.

Sei nun eine continuirliche, homogene Masse $M$, deren Dichtigkeit $\varrho$ heisse, auf ein rechtwinkliges Achsensystem $OX$, $OY$, $OZ$ bezogen, und stellen wir uns die Aufgabe, das Trägheitsmoment dieser Masse in Bezug auf die genannten Achsen zu berechnen. Denken wir uns die ganze Masse in parallelepipedische Elemente $\omega$ zerlegt, so bestimmt z. B. $\sqrt{x^2+y^2}$ die Entfernung eines Elementes, dessen Coordinaten $x$, $y$, $z$ heissen, von der $z$-Achse. Und da nun $\varrho\, dx\, dy\, dz$ die Masse dieses Elementes vorstellt, so wird das dreifache Integral

Fig. 20.




$$\varrho \iiint (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

das Trägheitsmoment der Masse $M$ in Bezug auf die $z$-Achse liefern, und ähnliche Formeln finden für die beiden andern Achsen Statt. Der Umfang der einzelnen Integrationen muss dabei selbstverständlich durch gegebene Bedingungen regulirt werden. Setzen wir z. B. voraus, dass $M$ durch die Oberfläche

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1$$

begrenzt wird, so würde das vorstehende Integral in folgender Gestalt erscheinen

$$T = \varrho \int_{\alpha}^{+\alpha} dx \int_{-\beta\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}}^{+\beta\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}} dy \int_{-\gamma\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}^{+\gamma\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}} (x^2+y^2)\, dz,$$

und man fände durch Ausführung der Integrationen

$$T = \frac{4\pi\varrho\alpha\beta\gamma}{15}(\alpha^2+\beta^2)$$

oder, weil $\frac{4}{3}\,\varrho\alpha\beta\gamma\pi$ die Masse $M$ des Ellipsoides ausdrückt,

$$T = \frac{M}{5}(\alpha^2+\beta^2).$$

Mit Benutzung des Dirichlet'schen Theoremes ergiebt sich dieses Resultat in nachstehender Weise. Da

$$1.\quad \varrho\iiint(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \varrho\iiint x^2\,dx\,dy\,dz + \varrho\iiint y^2\,dx\,dy\,dz$$

ist, so erhält man für das erste Integral rechts den Ausdruck

$$\frac{8}{8}\,\frac{\varrho\,\alpha^3\beta\gamma\pi}{\frac{5}{2}\,\Gamma(\frac{5}{2})}\,\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{1}{5}\,\varrho\alpha\beta\gamma\,\alpha^2\pi;$$

das zweite Integral hingegen besitzt den Werth $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5}\,\alpha\beta^3\gamma\varrho\pi$. Durch Vereinigung beider Resultate folgt daher, wie oben behauptet wurde,

$$T = \frac{M}{5}(\alpha^2+\beta^2).$$

Bildet endlich die Oberfläche

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^4 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^4 = 1$$

die Begrenzung der Masse $M$, so hat man wegen 1.:

$$\varrho\iiint x^2\,dx\,dy\,dz = \varrho\,8\,\frac{\alpha^3\beta\gamma}{4^3}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\,\Gamma(\frac{1}{4})^2}{\Gamma(1+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})}$$

$$= \frac{2\varrho\alpha^3\beta\gamma}{5}\,\Gamma(\tfrac{3}{4})\,\Gamma(\tfrac{1}{4}) = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\,\varrho\alpha\beta\gamma\,\alpha^2$$

und

$$\varrho\iiint y^2\,dx\,dy\,dz = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\,\varrho\alpha\beta\gamma\beta^2,$$

also

$$T = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\,\varrho\,\alpha\beta\gamma\,[\alpha^2+\beta^2].$$

## §. 177.

### Bestimmung der Attractionscomponente eines homogenen ungleichachsigen Ellipsoides nach Dirichlet's Methode.*)

Ein sehr passendes und von Dirichlet selbst gewähltes Beispiel zur Erläuterung seiner Integrationsmethode liefert

*) Vergl. §. 173. Dirichlet. Sur une nouvelle Méthode etc.

die Bestimmung der zwischen einem ungleichachsigen und einem materiellen Punkte Statt findenden Attractionscomponente. Ja, die auf diesem Wege zu vollziehende Rechnung zeichnet sich noch dadurch besonders aus, dass sie eine ganz gleichmässige ist für den Fall des innern und äussern Punktes.

Unsern frühern Lehren zufolge gelten bekanntlich für die Componenten $X$, $Y$, $Z$ irgend einer den Punkt $(a, b, c)$ anziehenden Masse die Gleichungen

$$X = \int^{\bullet} \frac{x-a}{r}\,\varphi(r)\,du,\ Y = \int^{\bullet} \frac{y-b}{r}\,\varphi(r)\,du,\ Z = \int^{\bullet} \frac{z-c}{r}\,\varphi(r)\,du,$$

wenn wir den verschiedenen Grössen $du$, $\varphi(r)$, ... die ehemalige Bedeutung auch hier beilegen.*) Von diesen Integralen aber lässt sich noch zeigen, dass sie bei jeder Begrenzung und selbst bei variabeler Dichtigkeit der anziehenden Masse als die Derivirten einer und derselben Function, der sogenannten Kräftefunction, die für den Fall des Newton'schen Gravitationsgesetzes mit dem Namen des Potentials belegt wird, sich darstellen lassen. In der That, sei wieder wie früher $\varphi(r) = \frac{d\,f(r)}{dr}$, so ist zunächst

$$X = \int^{\bullet} \frac{x-a}{r}\,\frac{d\,f(r)}{dr}\,du.$$

Weil aber

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

folglich

$$r\,\frac{\partial r}{\partial a} = -\,(x-a)$$

ist, so entspringt

$$X = -\int^{\bullet} \frac{\partial f(r)}{\partial a}\,du, \text{ also auch } Y = -\int^{\bullet} \frac{\partial f(r)}{\partial b}\,du, Z = -\int^{\bullet} \frac{\partial f(r)}{\partial c}\,du.$$

Und hieraus fliesst weiter

$$X = -\frac{\partial}{\partial a}\int^{\bullet} f(r)\,du,\ Y = -\frac{\partial}{\partial b}\int f(r)\,du,\ Z = -\frac{\partial}{\partial c}\int f(r)\,du.$$

Setzen wir nun $\varphi(r) = \frac{\text{const}}{r^p}$ oder einfacher $\varphi(r) = \frac{1}{r^p}$ voraus, wo $p$ eine zwischen 2 und 3 liegende Constante

*) Vergl. §. 161.

bedeuten soll*); so ist $f(r) = -\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{r^{p-1}}$ und demnach

$$X = \frac{1}{p-1} \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{du}{r^{p-1}}.$$

Bei Annahme eines rechtwinkligen Coordinatensystemes und einer ellipsoidischen Begrenznng der anziehenden Masse erfordert also die Bestimmung der Componenten $X$, $Y$, $Z$ nur die Kenntniss des dreifachen Integrales

$$T = \frac{1}{p-1} \int\int\int \frac{dx\, dy\, dz}{r^{p-1}}$$

unter der Bedingung, dass die Integrationen über alle jene Punkte $(x, y, z)$ sich erstrecken, welche der Ungleichheit

$$1. \qquad \lambda = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 < 1$$

Genüge leisten. Multipliciren wir nun das Integral $T$ mit dem discontinuirlichen Factor

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cos \lambda \varphi \, d\varphi,$$

*) Diese Annahme ist für die nachfolgende Betrachtung nothwendig, indess wird hierdurch die Allgemeingültigkeit unserer Untersuchung auch für die Fälle, in welchen $p$ grössere Werthe als 3 annimmt, keineswegs beeinträchtigt. Denn nennen wir die beiden dreifachen Integrale $\frac{1}{p-1} \int \frac{du}{r^{p-1}}$ und $\frac{1}{p+1} \int \frac{du}{r^{p+1}}$ für den Augenblick beziehungsweise $v_p$ und $v_{p+2}$; so besteht, wie unmittelbar durch die einfachste Rechnung sich ergiebt, immer die Relation

$$v_{p+2} = \frac{1}{(p-2)(p+1)} \left[\frac{\partial^2 v_p}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 v_p}{\partial c^2}\right].$$

Nur dies ist zu beachten, dass für $p \geqq 3$ der Punkt $(a, b, c)$ ausserhalb der anziehenden Masse sich befinden muss, weil für einen innern Punkt die auftretenden Integrale sinnlos sein würden.

Fälle der Art, in welchen man bei der anzustellenden Betrachtung vorerst an gewisse Bedingungen gebunden ist, die nachher beseitigt werden können, zeigen sich übrigens öfter in der Theorie der bestimmten Integrale. Man vergleiche in dieser Hinsicht z. B. die Paragraphen 63, 76—77, 180 (4).

so können wir die Variabeln $x$, $y$, $z$ augenscheinlich zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ sich bewegen lassen*); die Integralbestimmung selbst aber wird hierdurch noch keinesweges gelingen, weil das Integral $T$ im Allgemeinen weder nach $x$, noch nach $y$, noch nach $z$ unbestimmt integrirt werden kann. Unser Integral bedarf mithin noch weiterer Umformungen, und hierzu wählen wir mit Dirichlet den folgenden äusserst eleganten Weg.

Den in §. 65. — 70. gepflogenen Betrachtungen zufolge bestehen die beiden Gleichungen

$$2. \qquad \int_0^{\infty} e^{\vartheta i x}\, x^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma(q)}{(\pm\vartheta)^q}\, e^{\pm\frac{q\pi i}{2}}$$

und

$$3. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\lambda x^2+2\nu x)i}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\, e^{-\frac{\nu^2}{\lambda}i}(1+i) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu^2}{\lambda}\right)i}$$

und zwar unter folgenden Voraussetzungen. Die Constanten $q$ und $\lambda$ müssen wesentlich positiv sein, ja $q$ muss überdies einen echten Bruch bezeichnen; die Constanten $\vartheta$ und $\nu$ dagegen sind beliebig; einem positiven $\vartheta$ ferner entspricht in dem Ausdrucke rechts der ersten Gleichung das obere, einem negativen $\vartheta$ hingegen das untere Zeichen, und $(\pm\vartheta)^q$ endlich bedeutet den absoluten Werth von $(\vartheta^2)^{\frac{q}{2}}$.

Dies vorausgeschickt können wir offenbar vermöge der Gleichung 2. den in $T$ vorkommenden Factor $\frac{1}{r^{p-1}} = \frac{1}{\sqrt{(r^2)^{p-1}}}$ durch das bestimmte Integral

$$\frac{e^{(1-p)\frac{\pi}{4}i}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{r^2 i\psi}\, \psi^{\frac{p-3}{2}}\, d\psi$$

$$= \frac{e^{(1-p)\frac{\pi}{4}i}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} \int_0^{\infty} \psi^{\frac{p-1}{2}-1}\, e^{[x^2-2ax+y^2-2by+z^2-2cz+(a^2+b^2+c^2)]\psi i}\, d\psi$$

---

*) Die Werthe von $x$, $y$, $z$, für welche $\lambda = 1$, können, weil sie eine unendlich dünne Schicht liefern, ausser Acht gelassen werden. Vergl. die Anmerkg. in §. 175.

ersetzen, weil unserer Annahme gemäss die Constante $p$ zwischen 2 und 3 liegt. Schreiben wir nun ausserdem noch statt $\cos \lambda\varphi$ die Exponentialgrösse $e^{\lambda\varphi i}$ und nennen für den Augenblick das dreifache Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\, dz\; e^{(r^2\psi + \lambda\varphi)i}$$

$U$, so wird offenbar $T$ mit dem reellen Theile des Integrales

$$V = \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{(1-p)\frac{\pi}{4}i}}{\frac{p-1}{2}\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\int_0^\infty d\varphi \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,\psi^{\frac{p-1}{2}-1}\,U\,d\psi$$

zusammenfallen. Mit Benutzung der Formel 3. aber lässt sich dieses Integral ohne Mühe auf ein zweifaches reduciren. Denn führen wir in $U$ statt $r^2$ und $\lambda$ ihre oben gegebenen Werthe ein und ordnen dieselben nach den Potenzen von $x, y, z$, so verwandelt sich $U$, abgesehen von dem Factor $e^{(a^2+b^2+c^2)\psi i}$, in das Product der einfachen Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)x^2 - 2a\psi x\right]i}\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)y^2 - 2b\psi y\right]i}\,dy,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[\left(\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)z^2 - 2c\psi z\right]i}\,dz;$$

diese aber gestatten wegen der positiven Grössen $\psi + \frac{\varphi}{\alpha^2}$, $\psi + \frac{\varphi}{\beta^2}$ und $\psi + \frac{\varphi}{\gamma^2}$ unmittelbar die Anwendung der Gleichung 3. Das Integral $U$ ist daher mit

$$\frac{i\pi\sqrt{\pi}\, e^{\frac{\pi}{4}i}\, e^{a^2\psi i\left[1-\frac{\psi}{\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}}\right] + b^2\psi i\left[1-\frac{\psi}{\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}}\right] + c^2\psi i\left[1-\frac{\psi}{\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}}\right]}}{\sqrt{\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)}}$$

$$= i\pi\sqrt{\pi}\, e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{\psi\varphi i\left[\frac{a^2}{\varphi+\alpha^2\psi} + \frac{b^2}{\varphi+\beta^2\psi} + \frac{c^2}{\varphi+\gamma^2\psi}\right]} \left\{\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

identisch. Und demnach wird

$$V = \frac{i\sqrt{\pi}\, e^{(2-p)\frac{\pi}{4} i}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \int_0^\infty d\varphi \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \frac{\psi^{\frac{p-1}{2}-1} e^{\psi\varphi i\left(\frac{a^2}{\varphi+\alpha^2\psi}+\ldots\right)} d\psi}{\sqrt{\left(\psi+\frac{\varphi}{\alpha^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\beta^2}\right)\left(\psi+\frac{\varphi}{\gamma^2}\right)}}.$$

Hieraus aber fliesst weiter, wenn man $\psi = \frac{\varphi}{s}$ setzt, wo $s$ eine neue Veränderliche bedeutet, dass

$$V = \frac{i\sqrt{\pi}\, e^{(2-p)\frac{\pi}{4} i}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \int_0^\infty d\varphi \int_0^\infty \frac{s^{1-\frac{p}{2}} \sin\varphi \,.\, \varphi^{\frac{p}{2}-2-1} e^{\varphi i\left(\frac{a^2}{s+\alpha^2}+\frac{b^2}{s+\beta^2}+\frac{c^2}{s+\gamma^2}\right)} ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}$$

und somit

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -\frac{2a\sqrt{\pi}\, e^{(2-p)\frac{\pi}{4} i}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \int_0^\infty d\varphi \int_0^\infty \frac{s^{1-\frac{p}{2}} \sin\varphi \,.\, \varphi^{\frac{p}{2}-1-1} e^{\varphi i\left(\frac{a^2}{s+\alpha^2}+\ldots\right)} ds}{(s+\alpha^2)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}$$

ist. Und kehrt man jetzt die Reihenfolge der Integrationen um, schreibt dann statt $\sin\varphi$ die Exponentialgrösse $\frac{i}{2}(e^{-\varphi i} - e^{\varphi i})$ und bezeichnet endlich der Kürze halber den Ausdruck $\frac{a^2}{s+\alpha^2} + \frac{b^2}{s+\beta^2} + \frac{c^2}{s+\gamma^2}$ durch $\sigma$, so sieht man auf den ersten Blick, dass jedes der in $\frac{\partial V}{\partial a}$ enthaltenen Integrale

$$\int_0^\infty e^{(\sigma-1)\varphi i} \varphi^{\frac{p}{2}-1-1} d\varphi, \quad \int_0^\infty e^{(\sigma+1)\varphi i} \varphi^{\frac{p}{2}-1-1} d\varphi$$

vermöge der Formel 2. sich entwickeln lässt. Die Grösse $\sigma+1$ ist dabei unter allen Umständen mit $+\vartheta$ zu identificiren, $\sigma-1$ dagegen tritt an die Stelle von $+\vartheta$, oder $-\vartheta$, je nachdem man $\sigma > 1$, oder $\sigma < 1$ hat. Diesen beiden Fällen entsprechend erhält man daher für die Differenz der beiden Integrale die Ausdrücke

$$4. \quad \frac{i}{2}\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right) e^{\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{\pi}{2} i} \left[\frac{1}{(\sigma-1)^{\frac{p}{2}-1}} - \frac{1}{(\sigma+1)^{\frac{p}{2}-1}}\right], \sigma > 1$$

und

5. $\frac{i}{2}\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\left[\frac{e^{-\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{\pi}{2}i}}{(1-\sigma)^{\frac{p}{2}-1}}-\frac{e^{\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{\pi}{2}i}}{(1+\sigma)^{\frac{p}{2}-1}}\right]$, $\sigma<1$.

Da nun

$$e^{(2-p)\frac{\pi}{4}i}\,e^{\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{\pi}{2}i}=e^{\frac{\pi}{2}i-\frac{p\pi}{4}i+\frac{p\pi}{4}i-\frac{\pi}{2}i}=1$$

und

$$e^{(2-p)\frac{\pi}{4}i}\,e^{-\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{\pi}{2}i}=e^{\frac{\pi}{2}i-\frac{p\pi}{4}i-\frac{p\pi}{4}i+\frac{\pi}{2}i}=-e^{-\frac{p\pi}{2}i}$$

ist, also in $\frac{\partial V}{\partial a}$ wegen des Factors $i$ für $\sigma>1$ die Differenz der beiden vorhin erwähnten Integrale imaginär wird und nur das Integral $\int_0^\infty e^{(\sigma-1)\varphi i}\varphi^{\frac{p}{2}-1-1}d\varphi$ für $\sigma<1$ zu einem reellen Werthe führt: so ist der reelle Theil von $\frac{\partial V}{\partial a}$ mit Null identisch, wenn $\sigma>1$, dagegen besitzt er für $\sigma<1$ den Werth

$$\frac{2\sqrt{\pi}\,a\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\sin\frac{p\pi}{2}}{2\alpha^2\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\times$$

$$\int_0^\infty\frac{s^{1-\frac{p}{2}}ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\left(1-\frac{a^2}{s+\alpha^2}-\frac{b^2}{s+\beta^2}-\frac{c^2}{s+\gamma^2}\right)^{1-\frac{p}{2}},$$

d. g., weil wegen $\frac{p}{2}-1<1$

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\sin\frac{p\pi}{2}=\frac{-\pi}{\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)}$$

ist,

$$\frac{-a\pi\sqrt{\pi}}{\alpha^2\,\Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\times$$

$$\int_0^\infty\frac{s^{1-\frac{p}{2}}ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}}\left(1-\frac{a^2}{s+\alpha^2}-\frac{b^2}{s+\beta^2}-\frac{c^2}{s+\gamma^2}\right)^{1-\frac{p}{2}}.$$

Befindet sich nun der angezogene Punkt $(a, b, c)$ im Innern der ellipsoidischen Masse, so ist $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{b}{\beta}\right)^2+\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2$ und

demnach auch $\sigma$ kleiner, als 1; mithin wird die der $x$-Achse parallele Attractionscomponente $X$ durch den vorhergehenden Ausdruck dargestellt. Ist dagegen der angezogene Punkt ein äusserer, also $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{b}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{c}{\gamma}\right)^2 > 1$, so kann $\sigma \gtrless 1$ sein.

Nun wird die stetig veränderliche Grösse

$$\frac{a^2}{s+\alpha^2} + \frac{b^2}{s+\beta^2} + \frac{c^2}{s+\gamma^2} = \sigma$$

für $s = 0$ den grössten, für $s = \infty$ hingegen den kleinsten Werth — die Null — erwerben; es muss daher $\sigma$ nothwendig einmal mit der Zahl 1 zusammenfallen. Der positive Werth, für welchen dies geschieht, heisse $\mu$; alsdann ist augenscheinlich $\sigma < 1$, so lange $s > \mu$, dagegen wird $\sigma > 1$ für jedes unter $\mu$ befindliche $s$. Die Attractionscomponente $X$ wird daher im gegenwärtigen Falle durch die Gleichung gegeben

$$X = \frac{-\pi\sqrt{\pi}\, a}{\alpha^2\, \Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \times$$

$$\int_\mu^\infty \frac{s^{1-\frac{p}{2}}\, ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3 \left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}} \left(1 - \frac{a^2}{s+\alpha^2} - \frac{b^2}{s+\beta^2} - \frac{c^2}{s+\gamma^2}\right)^{1-\frac{p}{2}}.$$

Ersetzt man in derselben die Veränderliche $s$ durch $\mu + s$ und schreibt gleichzeitig

$$\alpha^2 + \mu^2 = \alpha_1^2,\quad \beta^2 + \mu = \beta_1^2,\quad \gamma^2 + \mu = \gamma_1^2,$$

$$\frac{a\,\alpha}{\alpha_1} = a_1,\quad \frac{b\beta}{\beta_1} = b_1,\quad \frac{c\gamma}{\gamma_1} = c_1,$$

d. h. construirt man ein durch den Punkt $(a, b, c)$ gehendes, dem ursprünglichen Ellipsoide confocales Ellipsoid, so erhält man

$$X = \frac{-\pi\sqrt{\pi}\, a_1 \beta \gamma}{\alpha_1^2 \beta_1 \gamma_1 \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{p}{2}\right)} \times$$

$$\int_0^\infty \frac{s^{1-\frac{p}{2}}\, ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha_1^2}\right)^3 \left(1+\frac{s}{\beta_1^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma_1^2}\right)}} \left(1 - \frac{a_1^2}{s+\alpha_1^2} - \frac{b_1^2}{s+\beta_1^2} - \frac{c_1^2}{s+\gamma_1^2}\right)^{1-\frac{p}{2}},$$

also die nämliche Form, wie sie für den Fall eines innern Punktes gilt und wie es in der That dem Ivory'schen Theoreme gemäss Statt finden muss. Behufs ihrer Gewinnung beachte man, dass

$$\left(\frac{a}{\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{b}{\beta_1}\right)^2+\left(\frac{c}{\gamma_1}\right)^2=\left(\frac{a_1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{b_1}{\beta}\right)^2+\left(\frac{c_1}{\gamma}\right)^2=1$$

ist und dass sonach der Ausdruck

$$\left(1-\frac{a^2}{s+\alpha_1^2}-\frac{b^2}{s+\beta_1^2}-\frac{c^2}{s+\gamma_1^2}\right)^{1-\frac{p}{2}}$$

in der Gestalt

$$\left[\frac{a^2}{\alpha_1^2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{s+\alpha_1^2}\right)+\frac{b^2}{\beta_1^2}\left(1-\frac{\beta_1^2}{s+\beta_1^2}\right)+\frac{c^2}{\gamma_1^2}\left(1-\frac{\gamma_1^2}{s+\gamma_1^2}\right)\right]^{1-\frac{p}{2}}$$
$$=\left[\frac{a^2}{\alpha_1^2}\frac{s}{s+\alpha_1^2}+\frac{b^2}{\beta_1^2}\frac{s}{s+\beta_1^2}+\frac{c^2}{\gamma_1^2}\frac{s}{s+\gamma_1^2}\right]^{1-\frac{p}{2}}$$

sich schreiben lässt. Mit Zuziehung des Factors $(s+\mu)^{1-\frac{p}{2}}$, wo $\mu$ nach einander durch $\alpha_1^2-\alpha^2$, $\beta_1^2-\beta^2$, $\gamma_1^2-\gamma^2$ zu ersetzen ist, ergiebt sich daher für die mit dem Exponenten $1-\frac{p}{2}$ behaftete Grösse die im transformirten Integrale angezeigte Form; die auf das Radical bezügliche Rechnung bedarf ihrer ausserordentlichen Einfachheit wegen keiner Erläuterung.

Wie man übrigens noch sieht, gehen die vorstehenden Ausdrücke des $X$ für $p=2$ in die früher entwickelten Formeln über.*)

## §. 178.

### Liouville's Begründung der Dirichlet'schen Formel.**)

Wie Dirichlet selbst erwähnt hat, lässt sich die von ihm entdeckte Relation

*) Bezüglich weiterer Studien über die Attraction eines homogenen Ellipsoides vergl. man noch: Grube. Borchardt's Journal, Bd. 69, S. 359; Mertens ebendaselbst. Bd. 70, S. 1. Und in Betreff einer fernern Anwendung der Dirichlet'schen Methode sehe man namentlich: Mehler. Ueber die Anziehung einer von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Schale. Borchardt's Journal. Bd. 60. S. 321 ff. Mertens. De functione potentiali duarum ellipsoidium homogenearum. Borchardt's Journal. Bd. 63. S. 360 ff.

**) Note sur quelques intégrales définies. (Journal de math., t. 4, p. 225—235.)

1. $$V = \iint \ldots x^{a-1}\, y^{b-1}\, z^{c-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$
$$= \frac{\alpha^a\, \beta^b\, c^\gamma \ldots}{p\, q\, r \ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \Gamma\left(\frac{c}{r}\right) \ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \ldots\right)},$$
$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots < 1 \text{ etc.}$$

auch auf anderm Wege, als dies früher geschah, beweisen, und in der That hat Liouville eine andere Begründung der obigen Formel bald nach ihrer Veröffentlichung bekannt gemacht. Das Wesen dieses Beweises besteht in Folgendem.

Bekanntlich resultirt das Integral $V$ aus dem Integrale

2. $$U = \iint \ldots x^{k-1}\, y^{l-1}\, z^{m-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$
$$= \frac{\Gamma(k)\, \Gamma(l)\, \Gamma(m) \ldots}{\Gamma(1 + k + l + m + \ldots)},$$

in welchem die Constanten $k, l, m, \ldots$ sämmtlich positiv sind und die gleichfalls positiven Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ der Bedingung

$$x + y + z + \ldots < 1$$

Genüge leisten. Gelingt es mithin, unabhängig von dem Frühern die Richtigkeit dieser Formel darzuthun, so ist Dirichlet's Theorem von neuem erwiesen. Für zwei Variabeln erhellt nun die Wahrheit der Relation 2. sofort, weil in diesem Falle das Integral $U$ in

$$\int_0^1 x^{k-1}\, dx \int_0^{1-x} y^{l-1}\, dy = \frac{1}{l} \int_0^1 x^{k-1}\, (1-x)^l\, dx$$

übergeht und folglich wegen der bekannten Eigenschaft des Euler'schen Integrales erster Gattung

$$U = \frac{1}{l}\, \frac{\Gamma(k)\, \Gamma(l+1)}{\Gamma(1+k+l)} = \frac{\Gamma(k)\, \Gamma(l)}{\Gamma(1+k+l)}$$

ist. Heisst dagegen 3 die Anzahl der Veränderlichen in dem Integrale $U$, so besitzt dieses, wenn man mit der Integration nach $z$ beginnt und mit jener nach $x$ endigt, vermöge der Bedingung $x + y + z < 1$ die Form

$$U = \int_0^1 x^{k-1}\, dx \int_0^{1-x} y^{l-1}\, dy \int_0^{1-x-y} z^{m-1}\, dz$$

oder kürzer

$$U = \int_0^1 x^{k-1}\,dx \int_0^{y_1} y^{l-1}\,dy \int_0^{z_1} z^{m-1}\,dz.$$

Hieraus aber fliesst weiter, sofern man vermittelst der Gleichungen $z = v z_1$ und $y = u y_1$ die neuen Veränderlichen $u$, $v$ einführt,

$$U = \int_0^1 x^{k-1}\,dx \int_0^1 u^{l-1}\,y_1^l\,du \int_0^1 v^{m-1}\,z_1\,dv,$$

und dies giebt wegen

$$y = u\,(1-x),\; z = v\,(1-x-y) = v\,(1-x)\,(1-u)$$

$$U = \int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{l+m}\,dx \int_0^1 u^{l-1}\,(1-u)^m\,du \int_0^1 v^{m-1}\,dv.$$

Aber

$$3.\quad \begin{cases} \int_0^1 v^{m-1}\,dv = \frac{1}{m}, \quad \int_0^1 u^{l-1}\,(1-u)^m\,du = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(l+m+1)}, \\ \int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{l+m}\,dx = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(1+k+l+m)}, \end{cases}$$

mithin entspringt

$$U = \frac{1}{m}\,\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(k)\,\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+m+1)\,\Gamma(1+k+l+m)} = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+m)}.$$

Lassen wir jetzt $U$ ein vierfaches Integral bedeuten, dessen unabhängige Veränderlichen $x$, $y$, $z$, $t$ heissen und der Bedingung $x+y+z+t < 1$ genügen; so können wir unter der Voraussetzung, dass wir zuerst nach $t$ integriren und alsdann allmählich bis zu der auf $x$ bezüglichen Integration fortschreiten, zuvörderst die obern Grenzen der einzelnen Integrale nach $t$, $z$, $y$ wieder abkürzend durch $z_1 - z = t_1$, $y_1 - y = z_1$, $1 - x = y_1$ bezeichnen, wodurch wir offenbar die Form

$$U = \int_0^1 x^{k-1}\,dx \int_0^{y_1} y^{l-1}\,dy \int_0^{z_1} z^{m-1}\,dz \int_0^{t_1} t^{n-1}\,dt$$

gewinnen. Nehmen wir nun statt der Variabeln $t$, $z$, $y$ die neuen $u$, $v$, $w$, welche mit jenen durch die Gleichungen $t = w t_1$, $z = v z_1$, $y = u y_1$ verbunden sind, so bewegen sich alle diese neuen Veränderlichen zwischen den Grenzen 0 und 1, und $U$ verwandelt sich in Folge der Beziehungen

$y_1 = 1 - x, z_1 = y_1(1-u) = (1-x)(1-u), t_1 = (1-x)(1-u)(1-v)$
in

$$U = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m+n}\,dx \int_0^1 u^{l-1}(1-u)^{m+n}\,du \times$$

$$\int_0^1 v^{m-1}(1-v)^m\,dv \int_0^1 w^{n-1}\,dw,$$

d. g. mit Rücksicht auf die Formeln 3.:

$$U = \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+1)}\,\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(1+l+m+n)}\,\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l+m+n+1)}{\Gamma(1+k+l+m+n)}$$

$$= \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(1+k+l+m+n)}.$$

Wie man sieht, lässt sich dieser Process beliebig oft wiederholen, und daher ist Dirichlet's Formel von neuem erwiesen.

## §. 179.

### Liouville's Verallgemeinerung des Dirichlet'schen Theoremes.*)

Der im Vorstehenden gegebene Beweis des Dirichlet'schen Theoremes lässt sich in einer andern Form darstellen, die überdies den Vortheil bietet, jenen Lehrsatz allgemeiner ausdrücken zu können. Liouville bedient sich hierzu des von Jacobi**) bei der Reduction der Function $B$ auf Gamma's beobachteten Gedankenganges. Verbindet man nämlich die beiden Integrale

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,dx, \quad \Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-y}\,y^{b-1}\,dy$$

durch Multiplication, so lässt sich das Product $\Gamma(a)\,\Gamma(b)$ als ein Doppelintegral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x}\,x^{a-1}\,e^{-y}\,y^{b-1}\,dx\,dy$$

auffassen. Setzt man aber hierin $x = uv$, $y = u(1-v)$,

---

*) Journal de math., t. 4, p. 225 etc. Ueber eine andere Verallgemeinerung der Dirichlet'schen Formel sehe man einen Aufsatz von Most in Schlömilch's Zeitschrift für Math. etc., Jahrg. 14, Seite 422.

**) Crelle. Journal Bd. 11. Auf einem ähnlichen Gedanken beruht auch der von Poisson im Journal de l'école polytechnique, cah. 19, page 477, gegebene Beweis der Euler'schen Formel $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

wo $u$, $v$ neue unabhängige Veränderlichen bedeuten, so folgt wegen $y = \frac{x}{v}(1-v)$, dass für $y = 0, \infty$ $v = 1, 0$ und demnach für $x = 0, \infty$ die Variabele $u$ ebenfalls zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ sich bewegt. Da nun ferner

$$x+y=u \text{ und } \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = -vu - u(1-v) = -u$$

ist, so wird

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \int_0^\infty\int_0^1 e^{-u}\, u^{a+b-1}\, v^{a-1}\, (1-v)^{b-1}\, du\, dv$$

$$= \Gamma(a+b)\int_0^1 v^{a-1}\,(1-v)^{b-1}\, dv.$$

Dies vorausgeschickt sei

$$W = \int\int \ldots f(x+y+z+\ldots)\, x^{k-1}\, y^{l-1}\, z^{m-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$

ein vielfaches Integral, in welchem die unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ sämmtlich positiv sind und der Ungleichheit

$$x + y + z + \ldots < h,$$

wo $h$ eine positive Constante, genügen und in welchem $f(x+y+z+\ldots)$ eine beliebige Function von $x, y, z, \ldots$ bedeutet*); endlich sind wie früher $k, l, m, \ldots$ positive Constanten.

Reducirt man die Anzahl der Veränderlichen vorerst auf zwei, d. h. betrachtet man das Integral

$$W = \int_0^h x^{k-1}\, dx \int_0^{h-x} f(x+y)\, y^{l-1}\, dy,$$

so folgt durch die Substitutionen $x = uv$, $y = u(1-v)$ ähnlich wie vorhin

$$W = \int_0^h du \int_0^1 u^{k-1}\, v^{k-1}\, f(u)\, u^{l-1}\, (1-v)^{l-1}\, u\, dv$$

1.
$$= \int_0^h u^{k+l-1} f(u)\, du \int_0^1 v^{k-1}(1-v)^{l-1} dv = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}\int_0^h f(u)\, u^{k+l-1}\, du.$$

Ist dagegen das Integral $W$ ein dreifaches, so kann man dasselbe immer in der Form

*) Diese Function ist selbstverständlich immer so zu denken, dass die betreffenden Integrale niemals sinnlos werden. Eine ähnliche Bemerkung gilt übrigens auch für die folgenden Betrachtungen.

$$W=\int_0^h x^{k-1}\,dx\int_0^{y_1} y^{l-1}\,dy\int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{m-1}\,dz$$

darstellen, wenn man unter $y_1$ und $y_1-y$ beziehungsweise die Grössen $h-x$ und $h-x-y$ versteht. Dem Vorhergehenden gemäss aber ist das Integral

$$\int_0^{y_1} y^{l-1}\,dy\int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{m-1}\,dz$$

mit

$$\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}\int_0^{y_1} f(x+u)\,u^{l+m-1}\,du$$

gleichbedeutend und demnach wegen $y_1=h-x$

$$W=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}\int_0^h x^{k-1}\,dx\int_0^{h-x} f(x+u)\,u^{l+m-1}\,du.$$

Nun zeigt der blosse Anblick dieses Doppelintegrales, dass es ebenfalls die Anwendung der Formel 1. gestattet. Man erhält daher durch Ausführung dieser Operation die Gleichung

$$2.\qquad W=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(k)\,\Gamma(l+m)}{\Gamma(l+m)\,\Gamma(k+l+m)}\int_0^h f(\vartheta)\,\vartheta^{k+l+m-1}\,d\vartheta$$

$$=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(k+l+m)}\int_0^h f(\vartheta)\,\vartheta^{k+l+m-1}\,d\vartheta.$$

Offenbar bleibt das bis jetzt beobachtete Reductionsverfahren bei einem Integrale mit beliebiger Anzahl von einander unabhängiger Veränderlichen anwendbar, und folglich ist man zur Aufstellung der nachstehenden Reductionsformel berechtigt:

$$\text{I.}\quad W=\iint\ldots f(x+y+z+\ldots)\,x^{k-1}\,y^{l-1}\,z^{m-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

$$=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)\ldots}{\Gamma(k+l+m+\ldots)}\int_0^h f(\vartheta)\,\vartheta^{k+l+m+\ldots-1}\,d\vartheta,$$

$$0<x+y+z+\ldots<h.$$

Wird in derselben $f(\vartheta)=1$ und $h=1$ angenommen, so entspringt wieder die Dirichlet'sche Formel für das oben betrachtete Integral $U$.*) Und ebenso unmittelbar erhellt, dass

*) Umgekehrt kann man das Dirichlet'sche Theorem zum Beweise der Liouville'schen Formel benutzen. Vergl. beispielsweise Catalan. Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples. Liouville. Journal, t. 4, p. 323—341. §. 7.

man wie bei der Ableitung des Dirichlet'schen Integrales $V$ aus dem Integrale $U$ auch hier die allgemeinere Formel wird erzielen können:

$$\int\int\ldots f\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p+\left(\frac{y}{\beta}\right)^q+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^r+\ldots\right]x^{a-1}\,y^{b-1}\,z^{c-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

$$=\frac{\alpha^a\,\beta^b\,\gamma^c\ldots}{p\,q\,r\ldots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots\right)}\int\limits_0^h f(\vartheta)\,.\,\vartheta^{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots-1}\,d\vartheta,$$

in welcher die Constanten $a, b, c, \ldots;\ p, q, r, \ldots$ sämmtlich positiv sind und in der man die Integrationen über alle positiven Werthe der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ zu erstrecken hat, welche die Bedingung erfüllen

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p+\left(\frac{y}{\beta}\right)^q+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^r+\ldots<h.$$

Bezeichnet $f(\vartheta)$ eine solche Function von $\vartheta$, dass das Integral $\int\limits_0^h f(\vartheta)\ \vartheta^{k+l+m+\ldots-1}\,d\vartheta$ für $h=\infty$ nicht sinnlos wird, so darf ersichtlich in den vorhergehenden Formeln die positive Constante $h$ über jede Grenze hinaus wachsen. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich z. B. unmittelbar gewisse von Raabe auf anderm Wege abgeleitete Integralformeln.*) Er-

---

*) Reduction des $p$fachen Integrales

$$\int\limits_0^{\infty}{}^{(p)}\varphi(a_1x_1^{n_1}+a_2x_2^{n_2}+\ldots+a_px_p^{n_p})\,x_1^{r_1-1}\,x_2^{r_2-1}\ldots x_p^{r_p-1}\,dx_1dx_2dx_3\ldots dx_p$$

Crelle. Journal. Bd. 28. S. 19. — Raabe geht dabei von der in §. 158 bewiesenen Relation

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\varphi(x^m+y^n)\,dx\,dy=2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}\int\limits_0^{\infty}\varphi(v^2)\,v^{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1}\,dv$$

aus, indem er diese zunächst auf den Fall dreier Veränderlichen anwendet, das erzielte Resultat mittelst der Substitution $v^2=v_1^{\frac{mn}{m+n}}$ umformt und dann durch vollständige Induction die Richtigkeit der allgemeinern Formel

setzt man nämlich, um hier bei dem allgemeinen Falle stehen zu bleiben, die positiven Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bezüglich durch $\sqrt[p]{\frac{1}{\alpha}}, \sqrt[q]{\frac{1}{\beta}}, \sqrt[r]{\frac{1}{\gamma}}, \ldots$ und in dem einfachen Integrale $\vartheta$ durch $\vartheta^2$, so verwandelt sich die Gleichung I$^a$. in die folgende

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots f\left[\alpha x^p + \beta y^q + \gamma z^r + \ldots\right] x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots dx\,dy\,dz \ldots$$

$$= \frac{2}{p\,q\,r \ldots \alpha^{\frac{a}{p}} \beta^{\frac{b}{q}} \gamma^{\frac{c}{r}} \ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots\right)} \times$$

$$\int_0^\infty f(\vartheta^2)\,\vartheta^{2\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots\right)-1} d\vartheta.$$

---

$$\int_0^{\infty\,(p)} \varphi(x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \ldots + x_p^{m_p})\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_p$$

$$= 2\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\Gamma\left(1+\frac{1}{m_p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\cdots\frac{1}{m_p}\right)} \int_0^\infty \varphi(v^2)\,v^{2\left(\frac{1}{m_1}+\ldots\right)-1} dv$$

beweist. Durch die Substitutionen $x_1 = x^{\frac{1}{m_1}}$, $x_2 = x^{\frac{1}{m_2}}$, . . . gewinnt nun Raabe die Formel

$$\int_0^{\infty\,(p)} \varphi(x_1+x_2+\ldots+x_p)\,x_1^{\frac{1}{m_1}-1}\,x_2^{\frac{1}{m_2}-1} \ldots x_p^{\frac{1}{m_p}-1}\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_p$$

$$= 2\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m_2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{m_p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\cdots+\frac{1}{m_p}\right)} \int_0^\infty \varphi(v^2)\,v^{\left(\frac{2}{m_1}+\frac{2}{m_2}+\cdots+\frac{2}{m_p}\right)-1} dv,$$

und aus dieser folgt dann schliesslich, wenn $x_1 = a_1\,x_1^{m_1}$, $x_2 = a_2\,x_2^{m_2}, \ldots$ und statt der $m$ zunächst die reciproken Werthe derselben gewählt und diese endlich der Reihe nach durch $\frac{r_1}{n_1}, \frac{r_2}{n_2}, \ldots \frac{r_p}{n_p}$ ersetzt werden, die obige allgemeine Relation, freilich in anderer Schreibweise.

## §. 180.

### Anwendung der Liouville'schen Formel.

Die Liouville'schen Gleichungen geben zu interessanten Folgerungen Veranlassung, von denen wir einige nicht unberücksichtigt lassen wollen.*)

1. Zu dem Behufe setzen wir zunächst in der Formel $I^a$. die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, sowie $h$ sämmtlich der Einheit gleich und wählen für die Function $f$ beziehungsweise die folgenden Ausdrücke

$$f[x^p+y^q+z^r+\ldots] = [1-(x^p+y^q+z^r+\ldots)]^{\frac{1}{m}}$$

und

$$f[x^p+y^q+z^r+\ldots] = [1-(x^p+y^q+z^r+\ldots)]^{-\frac{1}{m}},$$

wo $m$ irgend eine positive Constante bedeutet, die aber im letztern Falle grösser als 1 sein muss.**) Offenbar erhält man hierdurch die beiden Relationen

$$\int\int\ldots dx\,dy\,dz\ldots x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\ldots\sqrt[m]{1-x^p-y^q-z^r-\ldots}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\cdots}{pqr\ldots\,\Gamma\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\ldots\right)}\int_0^1(1-\vartheta)^{\frac{1}{m}}\vartheta^{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots-1}d\vartheta$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\cdots\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}{pqr\ldots\,\Gamma\left(1+\frac{1}{m}+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots\right)};$$

$$\int\int\ldots\frac{dx\,dy\,dz\ldots x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\ldots}{\sqrt[m]{1-x^p-y^q-z^r-\ldots}}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\cdots}{pqr\ldots\,\Gamma\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots\right)}\int_0^1(1-\vartheta)^{1-\frac{1}{m}-1}\vartheta^{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots-1}d\vartheta$$

---

*) Vergl. Catalan. Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples. §§. VI—IX. a. a O. und Liouville a. a. O.

**) $1-\frac{1}{m}$ wird Argument einer Gammafunction.

$$=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma\left(\frac{c}{r}\right)\cdots}{pqr\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}+\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\ldots\right)},$$

in denen also die positiven Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ sämmtliche Werthe umfassen, die der Ungleichheit $x^p+y^q+z^r+\ldots<1$ Genüge leisten.

2. Sei jetzt

$$W=\iint\ldots dx\, dy\, dz\ldots\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}{1+(x^2+y^2+z^2+\ldots)}},$$

wo die $n$ positiven Variabeln $x, y, z, \ldots$ der Bedingung $x^2+y^2+z^2+\ldots<1$ unterworfen sind. Schreibt man in der Formel I$^a$. $p=q=r=\ldots=2,\ a=b=c=\ldots=1$ und ebenfalls wieder $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=1$ und wählt endlich für die Function $f$ das Radical

$$\sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-\ldots}{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}},$$

so entspringt wegen $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ unmittelbar die Beziehung

$$W=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1\vartheta^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}}\,d\vartheta.$$

Aber

$$\int_0^1\vartheta^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}}\,d\vartheta=\int_0^1\frac{\vartheta^{\frac{n}{2}-1}\,d\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}}-\int_0^1\frac{\vartheta^{\frac{n}{2}}\,d\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}},$$

d. g. mit Beachtung der in §. 60. bewiesenen Formel

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}\,dx=\frac{1}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}:$$

$$\int_0^1\vartheta^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}}\,d\vartheta=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}-\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+1\right)}.$$

Mithin wird schliesslich

$$W = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+1\right)}\right].$$

Man erkennt hieraus leicht, wenn man die bekannten Relationen

$$\Gamma(a+n)=(a+n-1)(a+n-2)\ldots a\Gamma(a), \Gamma(\tfrac{1}{4})\Gamma(\tfrac{3}{4}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$$

berücksichtigt, dass für jede ganze Zahl $n$ von der Form $4\mu$ oder $4\mu+2$ das Integral $W$ in letzter Instanz von der Zahl $\pi$, für jede ganze Zahl $n \equiv \pm 1$ (mod. 4) dagegen von der Länge $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ eines Lemniscatenbogens abhängig wird.*)

So hat man beispielsweise:

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{4}\frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2};$$

$$\iint dx\, dy \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} = \frac{\pi}{8}(\pi-2);$$

$$\iiint dx\, dy\, dz \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2}{1+x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{8}\left[\frac{4\pi^2}{(\Gamma\frac{1}{4})^2} - \frac{1}{6}(\Gamma\tfrac{1}{4})^2\right];$$

$$\iiiint dx\, dy\, dz\, du \sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-u^2}{1+x^2+y^2+z^2+u^2}} = \frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Als dritte Anwendung der Liouville'schen Gleichung I$^a$. wählen wir das Integral

$$W = \iint \ldots \frac{dx\, dy\, dz \ldots}{(x^p+y^q+z^r+\ldots)^m},$$

wo

$$0 < x^p + y^q + z^r + \ldots < 1$$

ist und $m$ eine positive gleich noch näher zu bestimmende Constante ausdrückt. Offenbar ist dasselbe wegen

$$a = b = c = \ldots = 1, \quad \alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1$$

mit

*) Vergl. §. 176.

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\cdots}{pqr\ldots\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\ldots\right)}\int_0^1 \vartheta^{-m}\vartheta^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\ldots-1}\,d\vartheta$$

gleichbedeutend, aber nur dann, wenn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\ldots>m$. Wird mithin diese Bedingung erfüllt, so entspringt

$$W=\frac{1}{pqr\ldots\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\ldots-m\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\cdots}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\ldots\right)}.$$

Hat man dagegen

$$W'=\iint\ldots dx\,dy\,dz\ldots(x^p+y^q+z^r+\ldots)^m,$$

so findet immer die Beziehung Statt:

$$W'=\frac{1}{pqr\ldots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\cdots}{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\ldots+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\ldots\right)}.$$

Das so eben betrachtete Integral führt noch zu einer interessanten Folgerung. Setzen wir nämlich die positive Constante $m$ als ganze Zahl voraus und denken uns

$$(x^p+y^q+z^r+\ldots)^m$$

nach dem polynomischen Lehrsatze entwickelt, so entsteht zunächst eine Reihe, welche die Summe aller Combinationen der $m^{ten}$ Klasse aus den unbeschränkt wiederholbaren Elementen $x^p, y^q, z^r, \ldots$, jede Combination mit ihrer Permutationszahl multiplicirt, enthält. Nennen wir nun $a, b, c, \ldots$ die Exponenten beziehlich von $x^p, y^q, z^r, \ldots$ in irgend einem der vorkommenden Glieder, so müssen diese (positiven, ganzen) Exponenten bekanntlich die Bedingung $a+b+c+\ldots=m$ erfüllen, und $\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)\,\Gamma(c+1)\ldots}$ repräsentirt die zu $x^{ap}\,y^{bq}\,z^{cr}\ldots$ gehörige Permutationszahl. Das Integral $W'$ setzt sich daher aus Gliedern von der Form

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)\,\Gamma(c+1)\ldots}\iint\ldots dx\,dy\,dz\ldots x^{ap}\,y^{bq}\,z^{cr}\ldots$$

zusammen, in denen die Integrationen über alle positiven, der Bedingung $x^p+y^q+z^r+\ldots<1$ unterworfenen

Variabeln $x, y, z, \ldots$ auszudehnen sind. Nach Dirichlet's Formel aber ist

$$\int\int \ldots dx\, dy\, dz \ldots x^{ap}\, y^{bq}\, z^{cr} \ldots$$

$$= \frac{1}{pqr\ldots} \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(c+\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(1+m+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots\right)},$$

und folglich findet nunmehr die Gleichung Statt:

$$W = \frac{1}{pqr\ldots} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(1+m+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\ldots\right)} \times$$

$$\sum \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(c+\frac{1}{r}\right)\ldots}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)\,\Gamma(c+1)\ldots}.$$

Dieser Werth aber mit dem oben gefundenen verglichen, zeigt, dass

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\ldots\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\ldots\right)} \sum \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(c+\frac{1}{r}\right)\ldots}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)\,\Gamma(c+1)\ldots}$$

sein muss.

4. Wir beschäftigen uns jetzt mit der Liouville'schen Gleichung I. Setzen wir in derselben $k+l+m+\ldots=1$ und machen gleichzeitig die Annahme, dass $f(\vartheta)$ die Derivirte $F'(\vartheta)$ einer gewissen Function $F(\vartheta)$ vorstellt; so ergiebt sich die Beziehung

$$W = \int\int \ldots F'(x+y+z+\ldots)\, x^{k-1}\, y^{l-1}\, z^{m-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$
$$= \Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)\ldots[F(h)-F(0)],$$

also speciell für zwei Variabeln wegen

$$l = 1-k \text{ und } \Gamma(k)\,\Gamma(1-k) = \frac{\pi}{\sin k\pi}:$$

$$\int_0^h dx\, x^{k-1} \int_0^{h-x} dy\, y^{-k}\, F'(x+y) = \frac{\pi}{\sin k\pi}[F(h)-F(0)].$$

Hieraus aber fliesst sogleich ein neuer Satz. Denn bezeichnet $\mu$ einen Parameter kleiner als die positive Constante $\varrho$, so können wir $h$ durch $\varrho - \mu$ ersetzen, und ist nun ausserdem noch $F(\vartheta) = \varphi(\vartheta+\mu)$, so wird vermöge der vorhergehenden Gleichung die andere Statt finden

$$\int_0^{\varrho-\mu} dx\, x^{k-1} \int_0^{\varrho-\mu-x} y^{-k} \varphi'(x+\mu+y)\, dy = \frac{\pi}{\sin k\pi}\left[\varphi(\varrho) - \varphi(\mu)\right],$$

die ihrerseits wieder zu neuen Folgerungen Veranlassung giebt.

Bezeichnet nämlich $\varphi(\varrho)$ eine solche Function von $\varrho$, die für $\varrho = \infty$ verschwindet, so besteht auch die Relation

$$\int_0^{\infty} dx\, x^{k-1} \int_0^{\infty} dy\, y^{-k} \varphi'(x+\mu+y) = -\frac{\pi\,\varphi(\mu)}{\sin k\pi}.$$

Setzt man dagegen $\varphi(\varrho) - \varphi(\mu) = f(\mu)$, d. h. lässt man $f(\mu)$ eine solche Function von $\mu$ bedeuten, die für $\mu = \varrho$ in Null übergeht, so hat man die allgemeinere Gleichung

$$4^a. \qquad \int_0^{\varrho-\mu} x^{k-1}\, dx \int_0^{\varrho-\mu-x} f'(x+\mu+y)\, y^{-k}\, dy = -\frac{\pi\, f(\mu)}{\sin k\pi},$$

mit deren Hülfe ohne Weiteres die Lösung folgender Aufgabe gelingt:

Sei $f(\mu)$ eine für $\mu = \varrho$ verschwindende Function von $\mu$, ausserdem sei $k$ eine Constante kleiner als 1 und der constante Werth $\varrho$ stets grösser als $\mu$; alsdann soll man eine Function $\psi(\mu)$ finden, welche die Bedingung

$$4^b. \qquad \int_0^{\varrho-\mu} x^{k-1}\, \psi(\mu+x)\, dx = f(\mu)$$

befriedigt.

Offenbar zeigt der blosse Vergleich dieser und der vorhergehenden Gleichung, dass der gestellten Forderung Genüge geschieht, wenn man

$$\psi(\mu) = -\frac{\sin k\pi}{\pi} \int_0^{\varrho-\mu} f'(\mu+y)\, y^{-k}\, dy$$

setzt. Nur dies bleibt ungewiss, ob die auf diese Weise ermittelte Function $\psi(\mu)$ die einzig mögliche ist, welche der

gegebenen Bedingung nachkommt. Um hierüber Aufklärung uns zu verschaffen, ersetzen wir in Gleichung $4^b$. die Grösse $\mu$ durch $\mu + y$, multipliciren das erhaltene Resultat mit $y^{-k}\,dy$ und integriren hierauf die gewonnene Beziehung zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = \varrho - \mu$. Dadurch entspringt die Gleichung

$$\int_0^{\varrho-\mu} y^{-k}\,dy \int_0^{\varrho-\mu-y} x^{k-1}\,\psi(\mu+y+x)\,dx = \int_0^{\varrho-\mu} f(\mu+y)\,y^{-k}\,dy,$$

in der das Doppelintegral offenbar den Inbegriff aller Werthe darstellt, welche die Differentialfunction

$$x^{k-1}\,y^{-k}\,\psi(\mu + y + x)\,dx\,dy$$

erwirbt, wenn in ihr die positiven Veränderlichen $x$, $y$ alle der Bedingung $x + y < \varrho - \mu$ unterworfenen Werthe annehmen. Integrirt man nun aber diese Function zuerst nach $y$ anstatt nach $x$, so repräsentirt das Integral

$$\int_0^{\varrho-\mu} x^{k-1}\,dx \int_0^{\varrho-\mu-x} y^{-k}\,\psi(\mu+x+y)\,dy$$

die Summe aller jener Elemente, und daher hat man, wie sofort einleuchtet, die Beziehung

$$\int_0^{\varrho-\mu} x^{k-1}\,dx \int_0^{\varrho-\mu-x} y^{-k}\,\psi(\mu+x+y)\,dy = \int_0^{\varrho-\mu} f(\mu+y)\,y^{-k}\,dy,$$

d. g. mit Beachtung der Gleichung $4^a$.

$$-\frac{\pi}{\sin k\pi}\int_\varrho^\mu \psi(\mu)\,d\mu = \int_0^{\varrho-\mu} f(\mu+y)\,y^{-k}\,dy.$$

Hieraus aber fliesst durch Differentiation nach $\mu$ wegen $f(\varrho)=0$ die zu beweisende Relation

$$\psi(\mu) = -\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^{\varrho-\mu} y^{-k}\,f'(\mu+y)\,y^{-k}\,dy.$$

Nimmt man noch an, dass für $\varrho = \mu$ auch die Derivirte $f'(\mu)$ von $f(\mu)$ der Null gleich wird, so lässt sich auch für $k > 1$, also z. B. für eine zwischen 1 und 2 liegende Constante $k$ die Function $\psi(\mu)$ bestimmen. Denn differentiirt man Gleichung $4^b$. nach $\mu$, so kommt zunächst

$$-(\varrho-\mu)^{k-1}\,\psi(\varrho) + \int_0^{\varrho-\mu} x^{k-1}\,\psi'(\mu+x)\,dx = f'(\mu),$$

und hieraus entspringt durch theilweise Integration

$$-(\varrho-\mu)^{k-1}\psi(\varrho)+(\varrho-\mu)^{k-1}\psi(\varrho)$$
$$-(k-1)\int_0^{\varrho-\mu} x^{k-2}\,\psi(\mu+x)\,dx=f'(\mu),$$

d. h.

$$-(k-1)\int_0^{\varrho-\mu} x^{k-2}\,\psi(\mu+x)\,dx=f'(\mu).$$

Da nun für $\varrho=\mu$ augenscheinlich die identische Gleichung $0=0$ erscheint und überdies $k-1<1$ ist, so wird auch die Beziehung

$$\psi(\mu)=\frac{\sin(k-1)\pi}{(k-1)\pi}\int_0^{\varrho-\mu} f''(y+\mu)\,y^{-(k-1)}\,dy$$

Statt haben. In ganz ähnlicher Weise aber wird man die Function für eine zwischen 2 und 3, überhaupt für eine zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegende Constante $k$ anzugeben im Stande sein.

5. Zum Schlusse dieser Betrachtungen führen wir noch folgende, später zu benutzende Formel an.

Wenn $\lambda$ eine beliebige Constante ausdrückt und die Function $\varphi(\vartheta')$ für $\vartheta'=\infty$ die folgenden Integrale nicht sinnlos macht, so ist das $(n-1)$fache Integral

$$W=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\varphi(\lambda+x+y+\ldots+u)\,x^{\frac{1}{n}-1}\,y^{\frac{2}{n}-1}\ldots u^{\frac{n-1}{n}-1}\,dx\,dy\ldots du$$
$$=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty\varphi(\lambda+\vartheta)\,\vartheta^{\frac{n-1}{2}-1}\,d\vartheta.$$

In der That, lässt man in der Liouville'schen Gleichung I. die Function $f(x+y+z+\ldots)$ mit der andern $\varphi(\lambda+x+y+z\ldots)$ zusammenfallen, wo $\lambda$ eine beliebige Constante bedeutet und die positiven Veränderlichen noch immer der Ungleichheit $x+y+z+\ldots<h$ genügen, so entspringt die Relation

$$\iint\ldots\varphi(\lambda+x+y+z+\ldots)\,x^{k-1}\,y^{l-1}\,z^{m-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$
$$=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\,\Gamma(m)\ldots}{\Gamma(k+l+m+\ldots)}\int_0^h\varphi(\lambda+\vartheta)\,\vartheta^{k+l+m+\ldots-1}\,d\vartheta.$$

Und ist nun $\varphi(\vartheta')$ eine solche Function, die für $\vartheta' = \infty$ das Integral nicht sinnlos werden lässt, so folgt ohne Weiteres, dass in dem vorstehenden Integrale die Constante $h$ über jede Grenze hinaus wachsen kann.

Mit Berücksichtigung der bekannten Beziehung

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$$

aber fliesst daraus nun sogleich der besondere Satz, dass für $k = \frac{1}{n}$, $l = \frac{2}{n}$, $m = \frac{3}{m}$, ... das $(n-1)$fache Integral $W$ die oben erwähnte Gleichung liefert.

## §. 181.

### Liouville's Beweis des Gauss'schen Fundamentaltheoremes über Gammafunctionen.*)

In §. 48. erwähnten wir, dass es Liouville gelungen sei, das Gauss'sche Fundamentaltheorem in der Theorie der Gammafunctionen mit Hülfe vielfacher Integrale zu beweisen. Indem wir jetzt zur Darstellung des hierauf bezüglichen eleganten Liouville'schen Gedankenganges schreiten, beschäftigen wir uns vorerst mit der Werthermittlung des bestimmten Integrales

$$S = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots e^{-\left(x+y+z+\ldots+\frac{r^n}{xy\ldots u}\right)} x^{\frac{1}{n}-1} y^{\frac{2}{n}-1} \ldots u^{\frac{n-1}{n}-1} dx\, dy \ldots du,$$

in welchem die Anzahl der Veränderlichen $x, y, \ldots, u$ $n-1$ heisst und in dem $r$ eine positive Constante ausdrücken soll. Wie man ohne Weiteres erkennt, darf dasselbe stets der Differentiation nach $r$ unterworfen werden. Führt man die Rechnung aus, so erhält man die Beziehung

$$\frac{dS}{dr} = -nr^{n-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots e^{-\left(x+y+\ldots+u+\frac{r^n}{xy\ldots u}\right)} x^{\frac{1}{n}-1} y^{\frac{2}{n}-1} \ldots u^{\frac{n-1}{n}-1} \frac{dx\, dy \ldots du}{xy\ldots u},$$

der man nun sogleich wieder die andere Form

---

*) Journal de math. etc. Februarheft 1856 und Schlömilch. Zeitschrift für Math. u. s. w. Jahrg. 1. S. 184.

$$\frac{dS}{dr} = -n \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots e^{-\left(\frac{r^n}{x' y \ldots u} + y + z + \ldots + x\right)} y^{\frac{1}{n}-1} z^{\frac{2}{n}-1} \ldots$$

$$\ldots u^{\frac{n-1}{n}-2} x'^{\frac{n-1}{n}-1} dy\, dz \ldots du\, dx'$$

geben kann, wenn man statt der Veränderlichen $x$ eine neue $x'$ substituirt, die mit der alten durch die Gleichung

$$x = \frac{r^n}{y z \ldots u x'}$$

verbunden ist. Erwägt man nun, dass bei bestimmten Integralen der Namen der Integrationsbuchstaben ohne jede Bedeutung ist, so sieht man sofort, dass

$$\frac{dS}{dr} = -n\,S, \text{ also } S = c e^{-nr}$$

ist. Die hierin auftretende willkürliche Constante $c$ aber bestimmt sich mittelst der Bemerkung, dass für $r = 0$ das vorgelegte Integral $S$ dem Producte der Gammafunctionen $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right), \Gamma\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$ gleich ist und folglich den Werth $\sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}$ besitzt. Daher die Gleichung

$$\text{I.} \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots e^{-\left(x+y+\ldots+u+\frac{r^n}{xy\ldots u}\right)} x^{\frac{1}{n}-1} y^{\frac{2}{n}-1} \ldots u^{\frac{n-1}{n}-1} dx\, dy \ldots du$$

$$= \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}\, e^{-nr}.$$

Auf diesen Satz gestützt, lässt sich das Gauss'sche Fundamentaltheorem durch folgende Schlüsse beweisen. Wird die vorstehende Gleichung mit $r^{\mu-1}\,dr$, wo $\mu$ positiv ist, multiplicirt und darauf von $r = 0$ bis $r = \infty$ integrirt, so folgt durch Ausführung der Integration und zwar zunächst nach $r$:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \ldots e^{-(x+y+\ldots+u)} x^{\frac{1}{n}-1} y^{\frac{2}{n}-1} \ldots u^{\frac{n-1}{n}-1} dx\, dx \ldots du \int_0^\infty e^{-\frac{r^n}{xy\ldots u}} r^{\mu-1}\, dr$$

$$= \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}\, \frac{\Gamma(\mu)}{n^\mu}.$$

Indem man aber jetzt $r^n = v$ schreibt, erhält man für das

Integral nach $r$ die Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^n}{xy\ldots u}} r^{\mu-1}\,dr = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-\frac{v}{xy\ldots u}} v^{\frac{\mu}{n}-1}\,dv$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)}{\left(\frac{1}{xy\ldots u}\right)^{\frac{\mu}{n}}}.$$

Und daher wird nunmehr die Gleichung gelten

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots e^{-(x+y+\ldots+u)}\, x^{\frac{\mu+1}{n}-1}\, y^{\frac{\mu+2}{n}-1}\ldots u^{\frac{\mu+n-1}{n}-1}\, dx\,dy\ldots du$$

$$= \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}\,\frac{\Gamma(\mu)}{n^\mu}.$$

In dieser aber stellt, wie man sieht, das Integral links das Product der Gammafunctionen

$$\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right),\ \Gamma\left(\frac{\mu+2}{n}\right),\ \ldots\ \Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right)$$

vor. Setzt man folglich $\frac{\mu}{n} = a$, so hat man die Gauss'sche Gleichung

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-na+\frac{1}{2}}\,\Gamma(na).$$

## §. 182.

**Folgerungen aus der im vorigen Paragraphen bewiesenen Gleichung I. Einige andern, Liouville'schen Sätze.*)**

Bezeichnet $\varphi$ eine solche willkürliche Function von $xy\ldots tu$, dass das $n$fache Integral

$$1.\quad S=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots e^{-(x+y+\ldots+t+u)}\varphi(xy\ldots tu)\, x^{\frac{0}{n}}\, y^{\frac{1}{n}}\ldots u^{\frac{n-1}{n}}\, dx\,dy\ldots du$$

---

*) Liouville. Mémoire sur la réduction de classes très-étendues d'intégrales multiples. Journal de Mathématiques; deuxième série, tome I. Août 1856 und Schlömilch. Zeitschrift. Jhrg. I, S. 356.

nicht sinnlos wird, so verwandelt sich dasselbe durch Einführung der neuen Veränderlichen $k$ mittelst der Gleichung

$$x = \frac{k^n}{y z \ldots t u}$$

in

$$n \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots e^{-\left(y+z+\ldots+u+\frac{k^n}{yz\ldots tu}\right)} \varphi(k^n) y^{\frac{1}{n}-1} z^{\frac{2}{n}-1} \ldots u^{\frac{n-1}{n}-1} k^{n-1} dy dz \ldots du dk$$

Nun ist vermöge des vorhin bewiesenen Liouville'schen Theoremes I. das in $S$ enthaltene auf die $n-1$ Veränderlichen $y, z, \ldots u$ bezügliche Integral mit $(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} e^{-nk}$ und demnach $S$ selbst mit dem einfachen Integrale

$$\sqrt{n}\ (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty e^{-nk}\ \varphi(k^n)\ k^{n-1}\ dk$$

gleichgeltend. Daher die Gleichung

$$1.\ \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots e^{-(x+y+\ldots+t+u)} \varphi(xy\ldots tu) x^{\frac{0}{n}} y^{\frac{1}{n}} z^{\frac{2}{n}} \ldots u^{\frac{n-1}{n}}\ dx\ dy \ldots du$$

$$= \sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty e^{-nk}\ \varphi(k^n)\ k^{n-1}\ dk.$$

Wie auf den ersten Blick erhellt, führt sie, wenn $\varphi$ eine Potenz, die $\mu-1^{ste}$, des Argumentes anzeigt, unmittelbar zu dem Gauss'schen Fundamentaltheoreme von den Gammafunctionen.

Lässt man dagegen die willkürliche Function $\varphi(w)$ mit der Exponentialgrösse $e^{-a\sqrt[n]{w}}$ zusammenfallen, in der $a$ eine positive Constante bedeutet; so gewinnt man die Gleichung

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \ldots e^{-\left(x+y+\ldots+u+a\sqrt[n]{xy\ldots u}\right)} x^{\frac{0}{n}} y^{\frac{1}{n}} \ldots u^{\frac{n-1}{n}}\ dx\ dy \ldots du$$

$$= \sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty e^{-nk} e^{-a\sqrt[n]{k^n}} k^{n-1} dk = \sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(n+a)^n},$$

die offenbar auch noch für ein negatives $a$ Geltung besitzt, sofern alsdann nur der absolute Werth von $a$ kleiner als $n$ bleibt.

Aus den über die Bildung des Dirichlet'schen discontinuirlichen Factors angestellten Betrachtungen leuchtet unmittelbar ein, dass, wenn $b$ eine positive Constante bezeichnet, das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin b\vartheta \cos w\vartheta \, d\vartheta}{\vartheta}$$

die Zahl 1, oder die Null repräsentirt, je nachdem die positive, von $\vartheta$ unabhängige Grösse $w$ kleiner als $b$, oder grösser als $b$ ist. Multiplicirt man folglich die Gleichung 1. mit diesem Factor, indem man $w$ beziehungsweise mit $xy\ldots tu$, $k^n$ identificirt und versteht alsdann unter $\varphi(w)$ die Grösse

$$\varphi(w)\,.\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin b\vartheta \cos w\vartheta \, d\vartheta}{\vartheta},$$

so entspringt die Relation

$$\int\int\ldots e^{-(x+y+\ldots+u)}\,\varphi(xy\ldots u)\,x^{\frac{0}{n}}\,y^{\frac{1}{n}}\,z^{\frac{2}{n}}\ldots u^{\frac{n-1}{n}}\,dx\,dy\ldots du$$

$$=\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^{\sqrt[n]{b}} e^{-nk}\,\varphi(k^n)\,k^{n-1}\,dk,$$

in welcher der Umfang der Integrationen durch die Bedingung

$$0 < xyz\ldots u < b$$

regulirt wird.

Mittelst der Methode, durch deren Hülfe wir im vorigen Paragraphen den Werth des $(n-1)$fachen Integrales $S$ fanden, werden wir auch das allgemeinere $(n-1)$fache Integral

$$J=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots f\left(h+x+y+\ldots+t+\frac{k^n}{xy\ldots t}\right)x^{\frac{1}{n}-1}\,y^{\frac{2}{n}-1}\ldots t^{\frac{n-1}{n}-1}\,dx\,dy\ldots dt,$$

in welchem $h$ und $k$ beliebige Constanten bedeuten und die Function $f$ selbstverständlich als eine solche vorausgesetzt wird, dass dem Integrale eine Bedeutung zugeschrieben werden muss, auf ein einfaches Integral zu reduciren vermögen.

In der That, differentiiren wir $J$ einerseits nach $h$, anderseits nach $k$, so gewinnen wir die Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial h}=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots f'\left(h+x+y+\ldots+t+\frac{k^n}{xy\ldots t}\right)x^{\frac{1}{n}-1}y^{\frac{2}{n}-1}\ldots t^{\frac{n-1}{n}-1}\,dx\,dy\ldots d$$

und

$$\frac{\partial J}{\partial k}=n\,k^{n-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots f'\left(h+x+y+\ldots+t+\frac{k^n}{xy\ldots t}\right)x^{\frac{1}{n}-1}y^{\frac{2}{n}-1}\ldots t^{\frac{n-1}{n}-1}\frac{dx\,dy\ldots dt}{xy\ldots t}$$

Indem wir nun aber in dem letzten Integrale die Veränderliche $x$ durch eine neue $x'$ mittelst der Gleichung $x=\frac{k^n}{x'yz\ldots t}$ ersetzen, erhalten wir leicht die Beziehung

$$\frac{\partial J}{\partial k}=n\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots f'\left(h+x'+y+\ldots+t+\frac{k^n}{x'yz\ldots t}\right)y^{\frac{1}{n}-1}z^{\frac{2}{n}-1}\ldots$$

$$\ldots t^{\frac{n-2}{n}-1}x'^{\frac{n-1}{n}-1}\,dy\,dz\ldots dt\,dx',$$

in welcher offenbar das Integral wegen der völlig gleichgültigen Benennung der Integrationsbuchstaben mit dem Integrale für $\frac{\partial J}{\partial h}$ übereinstimmt. Mithin gilt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial J}{\partial k}=n\,\frac{\partial J}{\partial h},$$

deren vollständiges Integral einer bekannten Theorie zufolge durch

$$J=\varphi(h+nk)$$

dargestellt wird, wo $\varphi$ eine willkürliche Function von $h$ und $k$ ausdrückt.

Nun ist aber für $k=0$

$$J=\varphi(h)=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots f(h+x+y+\ldots+t)x^{\frac{1}{n}-1}y^{\frac{2}{n}-1}\ldots t^{\frac{n-1}{n}-1}dxdy..dt,$$

d. g. mit Beachtung der in §. 180 unter 5. bewiesenen Formel

$$\varphi(h)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty f(h+\vartheta)\,\vartheta^{\frac{n-1}{2}-1}d\vartheta,$$

und daher ist allgemein

$$J = \varphi(nk+h) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty f(h+nk+\vartheta)\,\vartheta^{\frac{n-1}{2}-1}\, d\vartheta.$$

Dieser Satz führt zu einer neuen Folgerung; er bietet nämlich das Mittel zur Reduction des $n$fachen Integrales

$$V = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots f(x+y+\ldots+t+u)\,\varphi(xy\ldots tu)\, x^{\frac{0}{n}} y^{\frac{1}{n}} z^{\frac{2}{n}} \ldots$$

$$\ldots t^{\frac{n-2}{n}} u^{\frac{n-1}{n}}\, dx\, dy \ldots du$$

auf ein Doppelintegral von der Form

$$V' = \frac{\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty\int_0^\infty f(n\vartheta+\eta)\,\varphi(\vartheta^n)\,\vartheta^{n-1}\,\eta^{\frac{n-1}{2}-1}\, d\vartheta\, d\eta.$$

In der That, ersetzen wir in dem $n$fachen Integrale $V$ die Variabele $x$ durch eine neue $k$, welche mit jener durch die Gleichung

$$x = \frac{k^n}{yz\ldots tu}$$

verbunden ist, so erhält man zuvörderst die Relation

$$V = n\int_0^\infty\int_0^\infty \ldots f\Big(y+z+\ldots+t+u$$

$$+\frac{k^n}{yz\ldots tu}\Big)\,\varphi(k^n)\, y^{\frac{1}{n}-1} z^{\frac{2}{n}-1} \ldots u^{\frac{n-1}{n}-1} k^{n-1}\, dx\, dy \ldots du\, dk.$$

In dieser aber kann der Werth des $(n-1)$fachen, auf die Veränderlichen $y, z, \ldots u$ bezüglichen Integrales $Q$ unmittelbar aus dem Integrale $J$ abgelesen werden, sofern man daselbst $h=0$ schreibt und die Variabeln $x, y, \ldots t$ durch $y, z, \ldots t, u$ ersetzt. Durch Ausführung der genannten Operation ergiebt sich daher die Gleichung

$$V = n\int_0^\infty k^{n-1}\,\varphi(k^n)\, Q\,.\, dk$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty dk \int_0^\infty k^{n-1}\,\varphi(k^n)\, f(nk+\vartheta)\,\vartheta^{\frac{n-1}{2}-1}\, d\vartheta.$$

Aus derselben hat Schlömilch nach Liouville's Andeutungen noch einige interessanten Folgerungen gezogen, die auch wir nicht unberücksichtigt lassen wollen.

1. Setzt man nämlich zunächst voraus, dass die Function $f(w)$ nur so lange einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so lange die Veränderliche $w$ innerhalb des Intervalles $(0, h)$, wo $h$ natürlich eine positive Constante bedeutet, sich bewegt: so verschwinden in dem $n$fachen Integrale $V$ offenbar alle Elemente, für welche die positiven Variabeln $x, y, \ldots u$ die Bedingung

$$1. \quad x + y + z + \ldots + u < h$$

nicht mehr erfüllen, und in dem Doppelintegrale $V'$ ist die Function $f(n\vartheta + \eta)$ nur so lange mit Null nicht identisch, so lange die Bedingung

$$h > n\vartheta + \eta > 0$$

gilt. Die Grenzen des Doppelintegrales heissen sonach jetzt $\eta = 0$ und $\eta = h - n\vartheta$, $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{h}{n}$. Mithin entspringt die Formel

$$\int\!\!\int \ldots f(x+y+\ldots+t+u)\,\varphi(xy\ldots tu)\,x^{\frac{0}{n}}\,y^{\frac{1}{n}}\ldots u^{\frac{n-1}{n}}\,dx\,dy\ldots du$$

$$= \frac{\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{n}h} \int_0^{h-n\vartheta} f(n\vartheta + \eta)\,\varphi(\vartheta^n)\,\vartheta^{n-1}\,\eta^{\frac{n-1}{2}-1}\,d\vartheta\,d\eta,$$

$$0 < x + y + \ldots + t + u < h.$$

2. Wir setzen jetzt voraus, dass die Function $\varphi(w)$ verschwindet, wenn $w$ ausserhalb des Intervalles $(0, \alpha^n)$ sich bewegt. In diesem Falle sind demnach in dem $n$fachen Integrale $V$ nur diejenigen Elemente mit Null nicht identisch, in welchen die positiven Veränderlichen $x, y, z \ldots$ der Bedingung

$$2. \quad \alpha^n > xyz \ldots u > 0$$

genügen, und in dem Doppelintegrale $V'$ ist $\varphi(\vartheta^n)$ von Null verschieden, so lange

$$\alpha^n > \vartheta^n, \text{ d. h. } \vartheta < \alpha$$

ist. Daher der Satz:

Wenn in dem $n$fachen Integrale

$$\int\int\ldots f(x+y+\ldots+u)\,\varphi\,(xy\ldots u)\,x^{\frac{0}{n}}\,y^{\frac{1}{n}}\ldots u^{\frac{n-1}{n}}\,dy\,dx\ldots du$$

die positiven Variabeln $x, y, \ldots u$ die Bedingung

$$\alpha^n > xy\ \ldots\ u > 0$$

erfüllen, so ist dasselbe mit dem Doppelintegrale

$$\frac{\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_0^\alpha d\vartheta\int\limits_0^\infty f(n\vartheta+\eta)\,\varphi\,(\vartheta^n)\,\vartheta^{n-1}\,\eta^{\frac{n-1}{2}-1}\,d\eta$$

gleichgeltend.

3. Machen wir endlich drittens die Annahme, dass die beiden Bedingungen $h > w > 0$ und $\alpha^n > v > 0$, wo $w$ und $v$ dieselben Variabeln, aber in anderer Verbindung enthalten, einander nicht widersprechen, so können wir die vorhergehenden Einzelfälle des Verschwindens von $f(w)$ und $\varphi(v)$ gleichzeitig bestehen lassen. In dem $n$fachen Integrale sind alsdann die Integrationen über alle positiven, den Ungleichheiten

$$h > x+y+\ldots+u > 0 \text{ und } \alpha^n > xy\ldots u > 0$$

unterworfenen Werthe von $x, y, z, \ldots u$ auszudehnen, und das Doppelintegral muss alle Werthe umfassen, für welche gleichzeitig die Bedingungen

$$h > n\vartheta+\eta > 0 \text{ und } \alpha^n > \vartheta^n > 0$$

befriedigt werden. Mithin haben sich hier die Variabeln $\vartheta$ und $\eta$ innerhalb der Grenzen $\vartheta = 0$, $\vartheta = \alpha$ und $\eta = 0$, $\eta = h - n\vartheta$ zu bewegen, wobei aber zu beachten ist, dass $h - n\vartheta$ für den grössten Werth von $\vartheta$, also für $\vartheta = \alpha$ noch positiv sein muss, was nur geschehen kann, sofern $\alpha$ nicht grösser als $\frac{h}{n}$ ist. Sind nun sämmtliche Voraussetzungen erfüllt, so besteht die Gleichung

$$\int\int\ldots f(x+y+\ldots+u)\,\varphi\,(xy\ldots u)\,x^{\frac{0}{n}}y^{\frac{1}{n}}\ldots u^{\frac{n-1}{n}}\,dx\,dy\ldots du$$

$$=\frac{\sqrt{n}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_0^\alpha d\vartheta\int\limits_0^{h-n\vartheta} f(n\vartheta+\eta)\,\varphi(\vartheta^n)\,\vartheta^{n-1}\,\eta^{\frac{n-1}{2}-1}\,d\eta.$$

In dem speciellen Falle zweier Veränderlichen hat Schlömilch diese Formel mit Zuhülfenahme geometrischer Vorstellungen unmittelbar verificirt, wie man des Nähern in dem oben erwähnten Aufsatze desselben nachsehen möge.

### §. 183.

**Schlömilch's Verallgemeinerung des Liouville'schen Theoremes I. §. 179.*)**

Die früher entwickelte Liouville'sche Relation

$$\int\int\ldots x^{m-1}\, y^{n-1}\, z^{p-1}\ldots f(x+y+z+\ldots)\, dx\, dy\, dz\ldots$$
$$=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)\ldots}{\Gamma(m+n+p+\ldots)}\int_0^1 \varrho^{m+n+p+\ldots-1} f(\varrho)\, d\varrho$$

hat Schlömilch als besondern Fall eines von ihm entdeckten Theoremes dargestellt, das in nachfolgender Weise ausgesprochen werden kann.

Sind wie in Liouville's Gleichung $x,\ y,\ z\ldots$ positive, die Bedingung

$$1 > x+y+z+\ldots > 0$$

befriedigende Veränderlichen, bezeichnet ferner $f(\varrho)$ eine beliebige Function von $\varrho$, und bedeuten endlich $m,\ n,\ p\ldots$ positive und $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots$ willkürliche Constanten, die wir aber so wählen wollen, dass in dem vorkommenden Integrale imaginäre Formen im Allgemeinen nicht erscheinen; so besteht die Gleichung

$$\text{I.}\quad\int\int\int\frac{\ldots x^{m-1}\, y^{n-1}\, z^{p-1}\ldots f(x+y+z+\ldots)\, dx\, dy\, dz\ldots}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^{m+n+p+\ldots}}$$
$$=\frac{\Gamma(m)\ \Gamma(n)\,\Gamma(p)\ldots}{\Gamma(m+n+p+\ldots)}\int_0^1\frac{\varrho^{m+n+p+\ldots-1}\,(f\varrho)\,d\varrho}{(1+\alpha\varrho)^m\,(1+\beta\varrho)^n\,(1+\gamma\varrho)^p\ldots}$$

Beim Beweise derselben folgen wir dem einfachen Gedankengange, welchen Schlömilch am angeführten Orte innegehalten

---

*) Ueber die Entwicklung vielfacher Integrale. Zeitschrft. f. Math. u. Phys. Jahrg. I, S. 75 ff. — Die in §. 184—185 vorgetragenen Materien sind ebenfalls aus dieser Abhandlung entlehnt.

hat. Sein Wesen charakterisirt sich kurz in nachstehender Weise.

Das Integral links, also

$$S = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \ldots \frac{x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} \ldots f(x+y+z+\ldots)}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^{m+n+p+\ldots}}$$

betrachtet Schlömilch als speciellen Fall des andern

$$F(\varrho) = \int_0^\varrho dx \int_0^{\varrho-x} dy \int_0^{\varrho-x-y} dz \ldots \frac{x^{m-1} y^{n-1} \ldots f(x+y+\ldots)}{(1+\alpha x+\beta y+\ldots)^{m+n+\ldots}},$$

welches in jenes für $\varrho = 1$ übergeht. Von dieser Function $F(r)$ bildet Schlömilch alsdann die Abgeleitete $\frac{dF(\varrho)}{d\varrho}$, wodurch er ein Integral erzielt, das durch Einführung neuer Veränderlichen leicht in eine Form sich umsetzen lässt, die ohne Mühe auf Gammafunctionen reducirbar ist. Die nun folgende Integration der für $F'(\varrho)$ gewonnenen Beziehung nach $\varrho$ zwischen den Grenzen $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$ endlich führt zu dem Werthe von $F(1)$, d. h. von $S$, weil $F(0)$ augenscheinlich mit Null äquivalent ist.

Um diesen Gedankengang durch Rechnung näher zu erläutern, wählen wir mit Schlömilch speciell das vierfache Integral

$$F(\varrho) = \int_0^\varrho dx \int_0^{\varrho-x} dy \int_0^{\varrho-x-y} dz \int_0^{\varrho-x-y-z} du \frac{x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} u^{q-1} f(x+y+z+u)}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta u)^{m+n+p+q}}$$

und setzen der bessern Uebersicht wegen zunächst die folgenden Gleichungen fest:

$$\int^{\varrho-x-y-z} \frac{du\, x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} u^{q-1} f(x+y+z+u)}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta u)^{m+n+p+q}} = \chi(\varrho-x-y-z),$$

$$\int_0^{\varrho-x-y} dz\, \chi(\varrho-x-y-z) = \psi(\varrho-x-y), \int_0^{\varrho-x} dy\, \psi(\varrho-x-y) = \varphi(\varrho-x),$$

$$\int_0^\varrho dx\, \varphi(\varrho-x) = F(\varrho).$$

Nun ist dem in §. 9 bewiesenen Theoreme zufolge

$$\frac{dF(\varrho)}{d\varrho}=\varphi(0)+\int^{\varrho} dx\,\frac{\partial\varphi(\varrho-x)}{\partial\varrho}=\int_0^{\varrho}\frac{\partial\varphi(\varrho-x)}{\partial\varrho}\,dx\,,$$

$$\frac{\partial\varphi(\varrho-x)}{\partial\varrho}=\psi(0)+\int_0^{\varrho-x} dy\,\frac{\partial\psi(\varrho-x-y)}{\partial\varrho}=\int_0^{\varrho-x} dy\,\frac{\partial\psi(\varrho-x-y)}{\partial\varrho}\,,$$

$$\frac{\partial\psi(\varrho-x-y)}{\partial\varrho}=[\chi(0)=0]+\int_0^{\varrho-x-y} dz\,\frac{\partial\chi(\varrho-x-y-z)}{\partial\varrho}\,,$$

$$\frac{\partial\chi(\varrho-x-y-z)}{\partial\varrho}=\frac{x^{m-1}\,y^{n-1}\,z^{p-1}\,f(\varrho)\,(\varrho-x-y-z)^{q-1}}{[1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta(\varrho-x-y-z)]^{m+n+p+q}}\,.$$

Mithin wird

$$F'(\varrho)=f(\varrho)\int_0^{\varrho} dx\int_0^{\varrho-x} dy\int_0^{\varrho-x-y}\frac{dz(\varrho-x-y-z)^{q-1}\,x^{m-1}\,y^{n-1}z^{p-1}}{[1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta(\varrho-x-y-z)]^{m+n+p+q}}\,.$$

Indem wir aber hierin allmählich

$$z=(\varrho-x-y)\,z',\ y=(\varrho-x)\,y' \text{ und } x=\varrho x',$$

d. h.

$$x=\varrho x',\ y=\varrho(1-x')\,y' \text{ und } z=\varrho(1-x')(1-y')\,z'$$

setzen ,erhalten wir die Relation $F'(\varrho)=\varrho^{m+n+p+q-1}f(\varrho)\,Q$, wo

$$Q=(s)\int_0^1\frac{dx'\,dy'\,dz'\;x'^{m-1}(1-x')^{n+p+q-1}(1-y')^{p+q-1}\,y'^{n-1}(1-z')^{q-1}\,z'^{p-}}{[1+\alpha\varrho x'+\beta\varrho(1-x')y'+\gamma\varrho(1-x')(1-y')z'+\varrho\delta(1-x')(1-y')(1-z')]^{m+n}}$$

Beachtet man nun die in §. 60 bewiesene Formel

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(\lambda+\mu x)^{p+q}}\,dx=\frac{1}{\lambda^q(\lambda+\mu)^p}\,\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

oder vielmehr die aus derselben für $\lambda=b+c$ und $\mu=a-b$ fliessende

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{(ax+b(1-x)+c)^{p+q}}=\frac{1}{(b+c)^q\,(a+c)^p}\,\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,;$$

so ergeben sich für das dreifache Integral $Q$ nach und nach die Beziehungen

$$Q = \frac{1}{(1+\alpha\varrho)^m} \frac{\Gamma(n+p+q)\Gamma(m)}{\Gamma(m+n+p+q)} \int_0^1\int_0^1 \frac{y'^{n-1}(1-y')^{p+q-1}z'^{p-1}(1-z')^{q-1}dz'dy'}{[1+\beta\varrho y'+\gamma\varrho(1-y')z'+\delta\varrho(1-y')(1-z')]^{n+p+q}}$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha\varrho)^m} \frac{1}{(1+\beta\varrho)^n} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p+q)}{\Gamma(m+n+p+q)} \int_0^1 \frac{z'^{p-1}(1-z')^{q-1}dz'}{[1+\gamma\varrho z'+\delta\varrho(1-z')]^{p+q}}$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha\varrho)^m} \frac{1}{(1+\beta\varrho)^n} \frac{1}{(1+\gamma\varrho)^p} \frac{1}{(1+\delta\varrho)^q} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(m+n+p+q)}.$$

Und daher wird vermöge der Relation

$$\int_0^1 \frac{dF(\varrho)}{d\varrho}d\varrho = \int_0^1 \varrho^{m+n+p+q-1}f(\varrho)\,.\,Q\,d\varrho = F(1) - F(0) = S$$

schliesslich

$$\int\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz\,du\,x^{m-1}y^{n-1}z^{p-1}u^{q-1}f(x+y+z+u)}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta u)^{m+n+p+q}}$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(m+n+p+q)} \int_0^1 \frac{\varrho^{m+n+p+q-1}f(\varrho)\,d\varrho}{(1+\alpha\varrho)^m(1+\beta\varrho)^n(1+\gamma\varrho)^p(1+\delta\varrho)^q},$$

$$1 \geq x+y+z+u \geq 0.\text{*)}$$

Das Theorem I. lässt sich in der Art noch etwas verallgemeinern, dass man statt der Constanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ... beziehungsweise $\frac{\alpha}{K}$, $\frac{\beta}{K}$, $\frac{\gamma}{K}$ ... schreibt, dann, wie wir bei der Dirichlet'schen Formel verfuhren, die Veränderlichen $x, y, z$... bezüglich durch $\left(\frac{x}{a}\right)^{m_1}$, $\left(\frac{y}{b}\right)^{n_1}$, $\left(\frac{z}{c}\right)^{p_1}$... ersetzt und schliesslich die Constanten $\frac{m}{m_1}$, $\frac{n}{n_1}$, $\frac{p}{p_1}$ ... statt der Unveränderlichen

---

*) Integrirt man $F'(\varrho)d\varrho$ zwischen den Grenzen 0 und $h$, wo $h$ eine positive Constante bedeutet, so kommt wegen $F(0) = 0$

$$\int_0^h \frac{dF(\varrho)}{d\varrho}d\varrho = F(h) = \int_0^h \varrho^{m+n+p+q-1}f(\varrho)Q\,d\varrho.$$

Alsdann sind in dem vorgelegten vielfachen Integrale die Integrationen nach den (positiven) Veränderlichen $x, y, z$ ... über alle der Bedingung $h > x+y+z+\ldots > 0$ unterworfenen Werthe zu erstrecken. Daraus kann man nun leicht wieder früher gefundene Formeln ableiten, wenn man $h$ über jede Grenze hinaus wachsen lässt, was freilich verlangt, dass $f(w)$ eine solche Function bedeutet, die eine Integration auch für unendliche obere Grenzen gestattet. Vergl. §. 169.

$m, n, p \ldots$ substituirt. Offenbar werden in diesem Falle die Grenzen der Integrationen durch die Bedingung

$$1 \geqq \left(\frac{x}{a}\right)^{m_1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n_1} + \left(\frac{z}{c}\right)^{p_1} + \ldots \geqq 0$$

regulirt.

Diese letztere Verallgemeinerung gestattet, wie unmittelbar erhellt, auch die folgende Relation

$$\int\int\int \ldots \frac{dx\, dy\, dz \ldots x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} \ldots f(x+y+z+\ldots)}{(K+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^{m+n+p+\ldots+1}}$$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)\ldots}{\Gamma(1+m+n+p+\ldots)} \int_0^1 \frac{\varrho^{m+n+p+\ldots-1} f(\varrho)\, d\varrho}{(K+\alpha\varrho)^m (K+\beta\varrho)^n (K+\gamma\varrho)^p \ldots} \left\{ \frac{m}{K+\alpha\varrho} + \frac{n}{K+\beta\varrho} + \frac{p}{K+\gamma\varrho} + \ldots \right.$$

Sie ergiebt sich aus dem Theoreme I. sofort, wenn man die Integrale, nachdem wie vorhin $\frac{\alpha}{K}, \frac{\beta}{K}, \frac{\gamma}{K} \ldots$ statt $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ der Reihe nach gesetzt wurde, der Differentiation nach dem Parameter $K$ unterwirft, wobei man zweckmässig die bekannte Formel $Pd \lg P = dP$ benutzt, und wenn schliesslich bei der nachfolgenden Reduction die Beziehung $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ berücksichtigt wird.

## §. 184.

### Fernere Anwendung der vorhin gebrauchten Reductionsmethode.

Mittelst des oben erwähnten Verfahrens lässt sich auch das vielfache Integral

$$S = \int\int \ldots x^{m-1} y^{n-1} z^{p-1} \ldots f\left(\frac{1-x-y-z-\ldots}{1+\alpha x+\beta y+\gamma x+\ldots}\right) dx\, dy\, dz \ldots,$$

in welchem ebenfalls die einzelnen Integrationen alle positiven Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ umfassen sollen, die der Ungleichheit $x + y + z + \ldots < 1$ genügen, ohne Schwierigkeit auf ein einfaches Integral reduciren. Und zwar erhellt auch hier wieder die Wahrheit dieser Behauptung ohne Weiteres aus der für eine beschränkte Anzahl von Veränderlichen angestellten Rechnung. Wählen wir z. B. mit Schlömilch den Fall dreier Variabeln, so lässt sich das entsprechende Integral als die für $\varrho = 1$ entstehende Form des Integrales

$$F(\varrho)=\int\limits_0^{\varrho} dx \int\limits_0^{\varrho-x} dy \int\limits_0^{\varrho-x-y} dz\, x^{m-1}\, y^{n-1}\, z^{p-1} f\left(\frac{1-x-y-z}{1+\alpha x+\beta y+\gamma z}\right)$$

betrachten. Aus dieser Gleichung aber fliesst sogleich die andere

$$F'(\varrho)=\int\limits_0^{\varrho} dx \int\limits_0^{\varrho-x} dy f\left[\frac{1-\varrho}{1+\alpha x+\beta y+\gamma(\varrho-x-y)}\right] x^{m-1} y^{n-1} (\varrho-x-y)^{p-1},$$

und diese verwandelt sich, wenn man $y=(\varrho-x)\,y'$ und hierauf $x=\varrho\, x'$ setzt, nach einer leichten Rechnung in

$$F'(\varrho)=\varrho^{m+n+p-1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 x'^{m-1}(1-x')^{n+p-1} y'^{n-1}(1-y')^{p-1} f\left(\frac{1-\varrho}{1+\sigma\varrho}\right) dx'\,dy',$$

wo um der Kürze willen $\sigma=\alpha x'+\beta\,(1-y')\,x'+\gamma\,(1-x')\,(1-y')$ geschrieben wurde. Integrirt man nun diese Gleichung nach $\varrho$ zwischen den Grenzen 0 und 1, so folgt

$$F(1)-F(0)=S$$

$$=\int\limits_0^1 \varrho^{m+n+p-1} d\varrho \int\limits_0^1\int\limits_0^1 x'^{m-1}(1-x')^{n+p-1} y'^{n-1}(1-y')^{p-1} f\left(\frac{1-\varrho}{1+\sigma\varrho}\right) dx'\,dy'.$$

Die Reduction dieses dreifachen Integrales auf ein einfaches aber wird sich mittelst der Formeln

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}{[ax+b(1-x)+c]^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{(a+c)^p(b+c)^q\,\Gamma(p+q)}$$

und

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}{[ax+b(1-x)+c]^{p+q+1}}=-\frac{1}{p+q}\,\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,\frac{d}{dc}\left[\frac{1}{(a+c)^p}\cdot\frac{1}{(b+c)^q}\right]$$

$$=\frac{1}{(a+c)^p}\,\frac{1}{(b+c)^q}\left[\frac{p}{a+c}+\frac{q}{b+c}\right]\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

ohne Mühe bewerkstelligen lassen, wenn man mit der Integration nach $\varrho$ beginnt, das auf $\varrho$ bezügliche Integral durch Einführung der neuen Veränderlichen $\tau=\frac{1-\varrho}{1+\varrho\sigma}$ in

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{1-\tau}{1+\tau\sigma}\right)^{m+n+p-1}\frac{1+\sigma}{(1+\tau\sigma)^2} f(\tau)\, d\tau$$

umformt und nun schliesslich wieder die auf $\tau$ bezügliche Integration zuletzt vollzieht und mit der nach $x'$ den Anfang macht. Auf diese Weise nämlich erhält man, wenn für den Augenblick der Kürze halber das Doppelintegral

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x'^{\mu}(1-x')^{\mu'}y'^{\nu}(1-y')^{\nu'}\,dx'\,dy'}{(1+\tau\sigma)^{m+n+p+1}}$$

wo $\mu = m-1$, $\mu' = n+p-1$, $\nu = n-1$, $\nu' = p-1$ ist, durch das Symbol $Q(\mu, \mu', \nu, \nu')$ angedeutet wird, für $S$ allmählich die Beziehungen:

$$S = \int_0^1 (1-\tau)^{m+n+p-1} f(\tau)\,d\tau \left\{ \begin{array}{c} Q(\mu,\mu',\nu,\nu') + \alpha Q(\mu+1,\mu',\nu,\nu') \\ +\beta Q(\mu,\mu'+1,\nu+1,\nu') + \gamma Q(\mu,\mu'+1,\nu,\nu'+1) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(1+m+n+p)} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{m+n+p-1} f(\tau)}{(1+\alpha\tau)^m(1+\beta\tau)^n(1+\gamma\tau)^p} \left[\frac{m}{1+\alpha\tau} + \frac{n}{1+\beta\tau} + \frac{p}{1+\gamma\tau}\right] d\tau$$

$$+ \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(1+m+n+p)} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{m+n+p-1} f(\tau)}{(1+\alpha\tau)^m(1+\beta\tau)^n(1+\gamma\tau)^p} \left[\frac{m\alpha}{1+\alpha\tau} + \frac{n\beta}{1+\beta\tau} + \frac{\gamma p}{1+\gamma\tau}\right] d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(1+m+n+p)} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{m+n+p-1} f(\tau)}{(1+\alpha\tau)^m(1+\beta\tau)^n(1+\gamma\tau)^p} \left[m\frac{1+\alpha}{1+\alpha\tau} + n\frac{1+\beta}{1+\beta\tau} + p\frac{1+\gamma}{1+\gamma\tau}\right] d\tau.$$

Aus dem Gange dieser Rechnung aber schliesst man — wie schon erwähnt — sofort weiter, dass überhaupt die Relation

$$\int\int\ldots f\left(\frac{1-x-y-z-\ldots}{1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots}\right] x^{m-1}y^{n-1}z^{p-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(1+m+n+p+\ldots)} \times$$

$$\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{m+n+p+\ldots-1} f(\tau)}{(1+\alpha\tau)^m(1+\beta\tau)^n(1+\gamma\tau)^p\ldots} \left[m\frac{1+\alpha}{1+\alpha\tau} + n\frac{1+\beta}{1+\beta\tau} + p\frac{1+\gamma}{1+\gamma\tau} + \ldots\right] d\tau,$$

$$1 \geqq x + y + z + \ldots \geqq 0.$$

Statt finden wird, aus der man leicht wieder allgemeinere Formen ableiten könnte.*)

---

*) Man ersetze beispielsweise die Variabeln $x, y, \ldots$ durch $\frac{x}{h}, \frac{y}{h}, \ldots$, wo $h$ eine positive Constante bedeutet, und ausserdem $f(\tau) = F(h\varrho)$, darauf $\varrho = \frac{b}{h}$ und schliesslich $F(b) = \varphi(\lambda+\tau)$, wo $\lambda$ constant.

Eine ganz hübsche Anwendung dieser allgemeinen Gleichung liefert die bei der Oberflächenbestimmung des dreiachsigen Ellipsoides auftretende Formel

$$\int_0^\alpha dx \int_0^{\beta\sqrt{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}} dy \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\delta x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon y}{\beta}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}}$$

$$= \frac{\pi\alpha\beta}{4}\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\delta^2\tau^2)(1-\varepsilon^2\tau^2)}}\left\{\frac{1-\delta^2}{1-\delta^2\tau^2}+\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2\tau^2}\right\}.$$

Sie lässt sich leicht aus der obigen abstrahiren, wenn man die Anzahl der Veränderlichen auf zwei reducirt, $m = n = \frac{1}{2}$ und $f\left(\frac{1-x-y}{1+\alpha x+\beta y}\right) = \sqrt{\frac{1+\alpha x+\beta y}{1-x-y}}$ setzt und schliesslich statt $x, y, \tau, \alpha, \beta$ beziehungsweise die Grössen

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{y}{\beta}\right)^2, \tau^2, -\delta^2, -\varepsilon^2$$

wählt.

## §. 185.

### Reduction des $n$fachen Integrales.

$$\int\int \ldots dx\, dy \ldots (1-x^2-y^2-\ldots)^m F(\alpha x+\beta y+\ldots),$$
$$1 \geqq x^2+y^2+\ldots \geqq 0.$$

Die aus der früher bewiesenen Relation*)

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\varphi\sqrt{a^2+b^2}\right)d\varphi$$

unmittelbar entspringende Formel

---

*) Siehe S. 64 ÷ 65.

$$1.\ \int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi} f\left(\cos\varphi\sqrt{a^2+b^2}\right)d\varphi\ ^{*)}$$

hat Schlömilch zur Reduction des Doppelintegrales

$$S = \int_{-h}^{+h} dx \int_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{+\sqrt{h^2-x^2}} F(a+bx+cy)(h^2-x^2-y^2)^m dy$$

auf ein einfaches benutzt und mittelst der dadurch erzielten Formel das $n$fache Integral

$$\int^{(n)}\dots F(\alpha x+\beta y+\gamma z+\dots)(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^m dx\,dy\,dz\dots$$

*) Von dieser Formel Schlömilch's hat derselbe die nachstehende Entwicklung gegeben. Sei

$$\int_0^{2\pi} f[k\sin(\alpha+\vartheta)]\,d\vartheta = C.$$

Zerlegt man dies Integral in drei andere zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ und $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ und $2\pi$ und setzt $\sin(\alpha+\vartheta)=z$; so erkennt man leicht, dass wegen

$$\alpha+\vartheta = \arcsin z, 0<\alpha+\vartheta<\frac{\pi}{2};\ \alpha+\vartheta=\pi-\arcsin z, \frac{\pi}{2}<\alpha+\vartheta<\frac{3\pi}{2};$$

$$\alpha+\vartheta = 2\pi+\arcsin z, \frac{3\pi}{2}<\alpha+\vartheta<\frac{5\pi}{2}$$

u. s. w. in dem ersten Theilintegrale

$$d\vartheta = +\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

im zweiten

$$d\vartheta = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

und im dritten endlich

$$d\vartheta = +\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

gewählt werden muss. Daraus aber folgt

$$C = \int_{\sin\alpha}^{+1}\frac{f(kz)\,dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{+1}^{-1}\frac{f(kz)\,dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int_{-1}^{\sin\alpha}\frac{f(kz)\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\int_{-1}^{+1}\frac{f(kz)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Schreibt man nun hierin $z=\cos\varphi$ und $\operatorname{tang}\alpha=\frac{a}{b}$, $k=\sqrt{a^2+b^2}$, so entspringt ohne Weiteres die obige Gleichung.

auf ein einfaches zurückgeführt. Die vorkommenden Integrationen sind dabei auf alle positiven und negativen, der Bedingung

$$1 \geqq x^2 + y^2 + z^2 + \cdots \geqq 0$$

unterworfenen $x, y, z, \ldots$ auszudehnen; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und $m$ ferner sind Constanten. Indem wir diese Reduction jetzt wiederzugeben versuchen, behandeln wir den gemachten Andeutungen gemäss zunächst das Doppelintegral $S$. Substituiren wir in demselben statt der Variabeln $x, y$ die Polarcoordinaten $r, \vartheta$ mittelst der Gleichungen $x = r\cos\vartheta$ und $y = r\sin\vartheta$, in denen wir $r$ absolut wählen und $\vartheta$ alle Werthe von 0 bis $2\pi$ beilegen; so ergiebt sich mit Berücksichtigung der in §. 139 angestellten Betrachtungen, dass $S$ hierdurch die Form

$$\int_0^h r\,dr \int_0^{2\pi} d\vartheta\, F(a + br\cos\vartheta + cr\sin\vartheta)\,(h^2 - r^2)^m$$

annimmt. Daraus aber folgt mit Beachtung der Formel 1. sofort die andere Beziehung

$$S = 2\int_0^h r\,dr \int_0^\pi F\left(a + \sqrt{b^2+c^2}\cos\varphi\right)(h^2 - r^2)^m\,d\varphi$$

Nun entspringt dieses letztere Integral unmittelbar aus dem nachfolgenden

$$2\int_{-h}^{+h} dx \int_0^{\sqrt{h^2-x^2}} F\left(a + \sqrt{b^2+c^2}\,x\right)(h^2 - x^2 - y^2)^m\,dy,$$

sofern man nämlich $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ setzt; es ist daher unser $S$ mit dem eben genannten Integrale gleichbedeutend. Dieses aber bietet den Vortheil, dass die Integration nach $y$ sich ausführen lässt. Denn substituirt man statt $y$ die neue Veränderliche $t$ mittelst der Gleichung

$$\sqrt{t} = \frac{y}{\sqrt{h^2-x^2}},$$

so verwandelt sich

$$\int_0^{\sqrt{h^2-x^2}} (h^2 - x^2 - y^2)^m\,dy \text{ in } \tfrac{1}{2}(h^2 - x^2)^{m+\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-t)^{m+1-1}\,t^{\frac{1}{2}-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(h^2-x^2)^{m+\frac{1}{2}}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}.$$

Und daher wird $S$, d. h.

$$\int_{-h}^{+h} dx \int_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{+\sqrt{h^2-x^2}} F(a+bx+cy)(h^2-x^2-y^2)^m\, dy$$

2.

$$= \frac{\Gamma(m+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})} \int_{-h}^{+h} dx\, F(a+x\sqrt{b^2+c^2})\,(h^2-x^2)^{m+\frac{1}{2}}$$

sein müssen.

Wir wenden uns nunmehr zur Reduction des $n$fachen Integrales

$$\int^{(n)} \ldots dx\, dy\, dz \ldots dw\, F(\alpha x+\beta y+\ldots+\lambda u+\mu v+\nu w)\,(1-x^2-y^2-\ldots-w^2)$$

in welchem wir also die $n$ Variabeln $x, y, \ldots w$ als algebraische, der Ungleichheit $x^2+y^2+\ldots w^2 < 1$ genügende Grössen auffassen. Wie auf den ersten Blick einleuchtet, lässt sich das vorgelegte Integral vermöge der Formel 2. ohne Mühe auf ein Integral der $(n-1)^{sten}$ Ordnung zurückführen. Denn beginnen wir mit der auf $w$ bezüglichen Integration und lassen die nach $v$ folgen, so können wir offenbar in Gleichung 2. von folgenden Substitutionen Gebrauch machen

$$h=\sqrt{1-x^2-y^2-\ldots-u^2}, a=\alpha x+\beta y+\ldots+\lambda u, b=\mu, c=\nu$$

und erhalten daher

$$\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2-\ldots-u^2}}^{+\sqrt{1-x^2-y^2-\ldots-u^2}} dv \int_{-\sqrt{1-x^2-\ldots-v^2}}^{+\sqrt{1-x^2-\ldots-v^2}} dw F(\alpha x+\beta y+\ldots+\lambda u+\mu v+\nu w)(1-x^2-\ldots-u^2-v-w^2$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\frac{3}{2})} \int_{-\sqrt{1-x^2-\ldots-u^2}}^{+\sqrt{1-x^2-\ldots-u^2}} dv\; F(\alpha x+\ldots+\lambda u+v\sqrt{\mu^2+\nu^2})\,(1-x^2-\ldots-v^2)^{m+\frac{1}{2}}$$

Durch Einführung dieses letztern Integrales in das vorgelegte geht dasselbe also wirklich in ein $(n-1)$faches über, dessen weitere Behandlung nun abermals die Anwendung der Relation 2. gestattet, indem man augenscheinlich jetzt nur $m+\frac{1}{2}, \lambda, \sqrt{\mu^2+\nu^2}, \alpha x+\beta y+\cdots+\delta r, \sqrt{1-x^2-y^2-\ldots-v^2}$ beziehlich mit den dortigen Grössen $m, b, c, a, h$ zu identificiren braucht. Die Benutzung der Gleichung 2. aber kann ersichtlich $(n-1)$mal geschehen, wobei zuletzt die in ihr vorkommende Constante $a$ der Null, die Grösse $m$ der Zahl

$m+\frac{n-2}{2}$ und $\sqrt{b^2+c^2}$ dem Radical

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}=\varkappa$$

gleichzusetzen ist. Offenbar erhält man auf diese Weise schliesslich die Beziehung

$$\text{I.}\ \int\int\ldots dx\,dy\ldots dw\,F(\alpha x+\beta y+\ldots+\nu w)(1-x^2-y^2-\ldots-w^2)^m$$

$$=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{n+1}{2}\right)}\pi^{\frac{n-1}{2}}\int_{-1}^{+1}F(\varkappa x)(1-x^2)^{m+\frac{n-1}{2}}dx,$$

$$1\geqq x^2+y^2+z^2+\ldots\geqq 0.$$

Dieselbe lässt sich noch in einer etwas allgemeinern Gestalt darstellen, wenn man auch hier die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ durch $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}, \ldots$ und die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ durch $a\alpha, b\beta, c\gamma, \ldots$ ersetzt. Dadurch nämlich gewinnt man die Gleichung

$$\text{I}^a.\ \int\int\ldots dx\,dy\ldots F(\alpha x+\beta y+\ldots)\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\ldots\right]^m$$

$$=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(m+1)abc\ldots}{\Gamma\left(m+\frac{n+1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}F(\varkappa x)\,(1-x^2)^{m+\frac{n-1}{2}}dx,$$

wo nunmehr die Integrationen links auf alle algebraischen, der Bedingung

$$1\geqq\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\ldots\geqq 0$$

unterworfenen $x, y, z, \ldots$ auszudehnen sind und rechts

$$\varkappa^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2+\ldots$$

gesetzt ist.

Einzelne schon früher bekannten Resultate lassen sich als specielle Fälle dieses Schlömilch'schen Theoremes betrachten. So erhält man z. B. aus I. für den Fall dreier Veränderlichen durch Einführung sogenannter Kugelcoordinaten, nämlich

$$x=\varrho\cos\vartheta,\ y=\varrho\sin\vartheta\cos\varphi,\ z=\varrho\sin\vartheta\sin\varphi,$$

wo $\varrho$ positiv, $\vartheta$ von 0 bis $\pi$ und $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ zu wählen ist, wegen $dx\,dy\,dz = \varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi$

$$\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (1-\varrho^2)^m F(\alpha\varrho\cos\vartheta + \beta\varrho\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$+\gamma\varrho\sin\vartheta\sin\varphi)\,\varrho^2\sin\varphi\, d\vartheta\, d\varphi\, d\varrho$$

$$= \frac{\pi}{m+1}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{m+1}\, F(\varkappa x)\, dx.$$

Und setzt man hierin noch $m = 0$ und bezeichnet das Integral

$$\int_0^1 \varrho^2\, F(\mu\varrho)\, d\varrho$$

durch $f(\mu)$, so gewinnt man die Relation

$$S = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta\cos\varphi + \gamma\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \pi\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\, F(\varkappa x)\, dx.$$

Schreibt man aber in der Gleichung $\int_0^1 \varrho^2\, F(\mu\,\varrho)\, d\varrho = f(\mu)$ links $\varrho\mu = t$ und unterwirft das hierdurch entstehende Integral

$$\int_0^\mu t^2\, F(t)\, dt = \mu^3 f(\mu)$$

der Derivation nach $\mu$, so erkennt man ohne Weiteres, dass

$$F(\mu) = 3f(\mu) + \mu f'(\mu)$$

ist und daher

$$S = \pi\left\{3\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\, f(\varkappa x)\, dx + \varkappa\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\, x f'(\varkappa x)\, dx\right\}$$

sein muss. Nun ist

$$\varkappa\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\, x f'(\varkappa x)\, dx = [f(\varkappa x)(x-x^3)]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} f(\varkappa x)\,(1-3x^2)\, dx$$

$$= -\int_{-1}^{+1} f(\varkappa x)\,(1-3x^2)\, dx,$$

und folglich wird, wie Poisson zuerst bewies,

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \cos\varphi + \gamma \sin\vartheta \sin\varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{+1} f(\varkappa x) \, dx = 2\pi \int_0^{\pi} f(\varkappa \cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta \, .$$

Noch andere aus Schlömilch's Theoreme zu ziehende Folgerungen möge man in seiner §. 183 erwähnten Abhandlung nachsehen.

## §. 186.

### Catalan's Reductionsmethode.*)

In §. 157, III. erwähnten wir, dass die bei dem Doppelintegrale

$$\iint dx\, dy \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\delta x}{a}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon y}{\beta}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{y}{\beta}\right)^2}},\ 1 > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2$$

angewendete Reductionsmethode unmittelbar die Erweiterung auf ähnlich gebaute vielfache Integrale zulasse. Die Richtigkeit dieser Behauptung wollen wir jetzt nachzuweisen versuchen, betrachten aber statt des $n$fachen Integrales

$$\int^{(n)} dx\, dy\, dz \sqrt{\frac{1 - \ldots - c^2 z^2 - b^2 y^2 - a^2 x^2}{1 - \ldots - z^2 - y^2 - x^2}},$$

in welchem $a, b, c, \ldots$ positive Constanten kleiner als 1 bedeuten und in dem die Integrationen über alle positiven Werthe von $x, y, \ldots$ zu erstrecken sind, welche der Ungleichheit $x^2 + y^2 + z^2 + \ldots < 1$ genügen, das allgemeinere

$$V = \int^{(n)} dx\, dy\, dz \ldots F_1(x, y, z, \ldots) f[\varphi(x, y, z, \ldots)].$$

In demselben setzen wir sämmtliche Functionen als stetige voraus und lassen $x, y, z, \ldots$ der Einfachheit wegen mit allen positiven Werthen zusammenfallen, für welche

$$1.\quad \psi(x, y, z, \ldots) \leqq 0$$

ist. Ferner machen wir die Annahme, dass die Function

*) E. Catalan. Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples. Liouville. Journal, t. 4, p. 323—344.

$\varphi\,(x, y, z, \ldots)$ die bestimmten Werthe $\alpha$ und $\beta$ erwirbt, wenn beziehungsweise

$$x = y = z = \ldots = 0 \text{ und } \psi\,(x, y, z, \ldots) = 0$$

gewählt wird. Nun sei

$$\int^{(v)} dx\, dy\, dz \ldots F_1\,(x, y, z,) = F\,(v),$$

wenn die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ alle positiven Werthe annehmen, welche der Bedingung

$$2. \quad \varphi\,(x, y, z, \ldots) \overline{\overline{<}}\, v$$

unterworfen sind. Steht alsdann für alle zwischen $\alpha$ und $\beta$ befindlichen Werthe von $v$ diese Beziehung mit der unter 1. dargestellten nicht im Widerspruch und entspringen, wenn in der Gleichung

$$3. \quad \varphi\,(x, y, z, \ldots) = v$$

dem $v$ alle in unendlich kleinen Intervallen fortschreitenden Werthe von $\alpha$ bis $\beta$ beigelegt werden, aus den hierdurch erhaltenen Gleichungen für die positiven Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ genau dieselben Werthsysteme, welche aus der Bedingung 1. resultiren:*) so ist

$$\text{I.} \quad V = \int_\alpha^\beta f\,(v) \frac{d\,F(v)}{d\,v}\, dv.$$

In der That, seien $v$ und $v + \varDelta v$ zwei verschiedene Werthe von $v$, so werden die ihnen entsprechenden Werthe der Function $F\,(v)$ augenscheinlich durch $F\,(v)$ und $F\,(v + \varDelta v) = F\,(v) + \varDelta\, F\,(v)$ darzustellen sein. Nun ist $F\,(v)$, wenn die $x, y, z, \ldots$ in unendlich kleinen Intervallen von Null bis zu den aus Gleichung 3. entspringenden Werthen von $x, y, z, \ldots$ fortschreiten, die Summe aller Werthe von $F_1\,(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots$. Die Function $F\,(v) + \varDelta\, F\,(v)$ dagegen repräsentirt den Inbegriff aller Werthe von

$$F_1\,(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

wenn die $x, y, z, \ldots$ stetig von Null bis zu den der Bedingung

$$\varphi\,(x, y, z, \ldots) = v + \varDelta\, v$$

*) Wie man sieht, involvirt offenbar diese Voraussetzung schon die andere, dass die Bedingungen 1. und 2. einander nicht widersprechen sollen.

genügenden Werthen sich bewegen. Mithin drückt $\Delta F(v)$ die Summe aller Elemente des bestimmten Integrales $F(v)$ aus, wenn die Veränderlichen mit allen denjenigen Werthen zusammenfallen, welche aus der Gleichung 3. hervorgehen, sofern in ihr $v$ von $v$ bis $v + \Delta v$ fortschreitet. Für alle diese Werthe von $x, y, z, \ldots$ aber weichen die von $\varphi(x, y, z, \ldots)$ um so weniger von einander ab, je kleiner $\Delta v$ gewählt wird. Man darf daher $f[\varphi(x, y, z, \ldots)]$ mit $f(v) + \varepsilon$ identificiren, wenn $\varepsilon$ eine mit $\Delta v$ verschwindende Grösse vorstellt. Daraus aber fliesst weiter, dass, wenn in

$$4. \quad F_1(x, y, z, \ldots) f[\varphi(x, y, z, \ldots)] \Delta x \Delta y \Delta z \ldots$$

die Variabeln $x, y, z, \ldots$ alle Werthe erhalten, welche man soeben den Veränderlichen $x, y, z$, in $F_1(x, y, z, \ldots) \Delta x \Delta y \Delta z \ldots$ beilegte, die Summe jener Werthe $= \Delta F(v)\, f(v) + \varepsilon' \Delta F(v)$ sein wird, wo $\varepsilon'$ einen mit $\Delta v$ verschwindenden Factor bezeichnet. Nun ist den Regeln der Differentialrechnung zufolge

$$\Delta F(v) = \frac{dF(v)}{dv} \Delta v + \eta \Delta v,$$

wenn $\eta$ eine mit $\Delta v$ der Null sich nähernde Grösse ausdrückt, und daher wird jetzt

$$5. \quad \frac{dF(v)}{dv} f(v) \Delta v + \eta \Delta v \,.\, f(v) + \varepsilon' \frac{dF(v)}{dv} \Delta v + \varepsilon' \eta \Delta v$$

die Summe aller Elemente der Function in 4. repräsentiren. Setzt man aber in der Gleichung 3. statt $v$ nach und nach $\alpha, \alpha + \Delta v, \alpha + 2\Delta v, \ldots, \beta - \Delta v$ und bildet die entsprechenden Werthe des Ausdruckes 5., so wird der Inbegriff aller dieser Einzelsummen, weil die Bedingungen 1. und 2. einander nicht widersprechen sollen, von dem Integrale $V$ um so weniger sich unterscheiden, je kleiner $\Delta v$ ist. Lässt man folglich $\Delta v$ über jede Grenze hinaus abnehmen, so werden die zwischen den Grenzen $\alpha$ und $\beta$ genommenen Integrale der drei letzten Grössen in 5., weil sie bezüglich durch

$$k \int_\alpha^\beta f(v)\, dv, \; k' \int_\alpha^\beta \frac{dF(v)}{dv}\, dv, \; k'' \int_\alpha^\beta dv$$

sich darstellen lassen, wo $\lim k = \lim k' = \lim k'' = 0$ ist, sämmtlich verschwinden, und daher wird

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} f(v) \frac{d\,F(v)}{d\,v}\,dv.$$

Sei, behufs der nähern Erläuterung dieser Theorie, der Werth des Integrales

$$V = \int^{(n)} dx\, dy\, dz \ldots x^{p-1}\, y^{q-1}\, z^{r-1} \ldots \left(\frac{1 - a x^{\alpha} - b y^{\beta} - c z^{\gamma} - \ldots}{1 - x^{\alpha} - y^{\beta} - z^{\gamma} - \ldots}\right)^{\frac{1}{m}}$$

zu bestimmen, wenn $p, q, r, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ irgend welche, $a, b, c, \ldots$ aber positive Constanten kleiner als 1 und $m$ eine positive Constante grösser als 1 bedeuten und wenn endlich die Integrationen über alle positiven Werthe von $x, y, z, \ldots$ auszudehnen sind, welche der Bedingung

$$6. \quad x^{\alpha} + y^{\beta} + z^{\gamma} + \ldots < 1$$

Genüge leisten.

Setzt man

$$v^m = \frac{1 - a x^{\alpha} - b y^{\beta} - c z^{\gamma} - \ldots}{1 - x^{\alpha} - y^{\beta} - z^{\gamma} - \ldots} = \varphi(x, y, z, \ldots)$$

und

$$F(v) = \int^{(n)} dx\, dy\, dz \ldots x^{p-1}\, y^{q-1}\, z^{r-1} \ldots,$$

so wird hier der Umfang der Integrationen durch die Ungleichheit

$$7. \quad (v^m - a)\, x^{\alpha} + (v^m - b)\, y^{\beta} + (v^m - c)\, z^{\gamma} + \ldots < v^m - 1$$

regulirt. Die Function $\varphi$ erwirbt ferner für $x = y = z = \ldots = 0$ und $x^{\alpha} + y^{\beta} + z^{\gamma} + \ldots - 1 = 0$ die bestimmten Werthe $v = 1$ und $v = +\infty$; ausserdem ist die Bedingung 7. mit der ursprünglichen 6. nicht im Widerspruch, weil in Folge der Natur von $a, b, c, \ldots$ die Verhältnisse

$$\frac{v^m - a}{v^m - 1}, \frac{v^m - b}{v^m - 1}, \frac{v^m - c}{v^m - 1}, \ldots$$

sämmtlich grösser als die Einheit sind, und endlich genügt, wenn $v$ von 1 bis $\infty$ variirt, das hierdurch resultirende Werthsystem der Grössen $x, y, z, \ldots$ der Bedingung 6. Man hat daher die Gleichung

$$V = \int_{1}^{\infty} v \frac{d\,F(v)}{d\,v}\,dv.$$

Die vollständige Erledigung der uns gestellten Aufgabe erfordert mithin bloss noch die Bestimmung der Function $F(v)$, und hierzu bietet uns das Dirichlet'sche Theorem das Mittel. Denn schreiben wir die Bedingung 7. in folgender Gestalt

$$\left(\frac{x}{\sqrt[\alpha]{\frac{v^m-1}{v^m-a}}}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{\sqrt[\beta]{\frac{v^m-1}{v^m-b}}}\right)^{\beta}+\ldots<1,$$

so entspringt jenem Lehrsatze zufolge die Gleichung

$$'(v)=\frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots\right)}\left(\frac{v^m-1}{v^m-a}\right)^{\frac{p}{\alpha}}\left(\frac{v^m-1}{v^m-b}\right)^{\frac{q}{\beta}}\left(\frac{v^m-1}{v^m-c}\right)^{\frac{r}{\gamma}}\ldots$$

Mithin wird

$$\frac{dF(v)}{dv}=\frac{m}{\alpha\beta\gamma\ldots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots\right)}\,\frac{v^m(v^m-1)^{-1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots}}{(v^m-a)^{\frac{p}{\alpha}}(v^m-b)^{\frac{q}{\beta}}\ldots}\times$$
$$\left[\frac{p}{\alpha}\,\frac{1-a}{v^m-a}+\frac{q}{\beta}\,\frac{1-b}{v^m-b}+\ldots\right]$$

und daher

$$V=\frac{m}{\alpha\beta\gamma\ldots}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots\right)}\int_1^{\infty}\frac{v^m(v^m-1)^{-1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots}}{(v^m-a)^{\frac{p}{\alpha}}(v^m-b)^{\frac{q}{\beta}}\ldots}\times$$
$$\left[\frac{p}{\alpha}\,\frac{1-a}{v^m-a}+\frac{q}{\beta}\,\frac{1-b}{v^m-b}+\ldots\right]dv,$$

wofür man auch

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\Gamma(1+k)}\int_1^{\infty}\frac{(u-1)^{k-1}u^{\frac{1}{m}}}{(u-a)^{\frac{p}{\alpha}}(u-b)^{\frac{q}{\beta}}\ldots}\left[\frac{p}{\alpha}\,\frac{1-a}{u-a}+\frac{q}{b}\,\frac{1-b}{u-b}+\ldots\right]du$$

schreiben kann, sofern man $v^m = u$ und der Kürze halber $k=\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots$ setzt.

Nimmt man in dem Integrale $V$ die Constanten $a, b, c, \ldots$ einander gleich, so erhält man

$$V = \frac{1-a}{\alpha\beta\gamma\ldots}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\cdots}{\Gamma(k)}\int_1^\infty \frac{(u-1)^{k-1}\, u^{\frac{1}{m}}\, du}{(u-a)^{k+1}},$$

und für $a=0$, $u=\frac{1}{\vartheta}$ entspringt hieraus wieder die früher bewiesene Formel*)

$$\int^{(n)} \frac{x^{p-1}\, y^{q-1}\ldots dx\, dy\ldots}{\sqrt{1-x^\alpha-y^\beta-\ldots}} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\cdots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots\right)}.$$

Setzt man dagegen $p=q=r=\ldots=1$, $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=2$, $m=2$, $a=b=c=\ldots=1$, $a^2$; so ergeben sich die beiden Relationen:

$$\int^{(n)} \frac{dx\, dy\, dz\ldots}{\sqrt{1-x^2-y^2-\ldots}} = \frac{(\sqrt{\pi})^{n+1}}{2^n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

und

$$V = \int^{(n)} dx\, dy\, dz\ldots\sqrt{\frac{1-a^2(x^2+y^2+z^2+\ldots)}{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}$$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^n}{2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}n(1-a^2)\int_1^\infty \frac{(v^2-1)^{\frac{n}{2}-1}\, v^2\, dv}{(v^2-a^2)^{\frac{n}{2}+1}}.$$

Das Integral dieser letzten Formel aber gestattet eine fernere Reduction. Schreibt man nämlich, was offenbar wegen $\frac{v^2-1}{v^2-a^2}<1$ angeht, $\frac{v^2-1}{v^2-a^2}=\sin\varphi^2$, also

$$v\,dv = \frac{(1-a^2)\sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi^3},\quad v^2\,dv = \frac{(1-a^2)\sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi^3}\,\frac{\sqrt{1-a^2\sin\varphi^2}}{\cos\varphi},$$

$$v^2-1 = \frac{1-a^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2},\quad \frac{(v^2-1)^{\frac{n}{2}-1}\, v^2 dv}{(v^2-a^2)^{\frac{n}{2}+1}} = \frac{\sin\varphi^{n-1}\sqrt{1-a^2\sin\varphi^2}\, d\varphi}{1-a^2};$$

so folgt

$$V = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^{n-1}\, d\varphi.\ (\Delta = \sqrt{1-a^2\sin\varphi^2}).$$

---

*) Siehe §. 180, 1.

Nun ist aber

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^{n-1}\,\varDelta\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi^{n-1}\,d\varphi}{\varDelta} - a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi^{n+1}\,d\varphi}{\varDelta},$$

und demnach erlaubt jedes Integral rechts die Anwendung der Formel

$$\int \frac{\sin\varphi^m\,d\varphi}{\varDelta} = \frac{m-2}{m-1}\,\frac{1+a^2}{a^2}\int\frac{\sin\varphi^{m-2}\,d\varphi}{\varDelta} - \frac{m-3}{(m-1)a^2}\int\frac{\sin\varphi^{m-4}\,d\varphi}{\varDelta}$$

$$+ \frac{\sin\varphi^{m-3}\cos\varphi.\ \varDelta}{(m-1)a^2},\ ^{*})$$

---

*) Wenn man die Verification dieser Formel durch Differentiation verschmäht, so kann man dieselbe in folgender Weise ableiten.

Offenbar ist

$$\int\frac{\sin\varphi^m\,d\varphi}{\varDelta} = \int\frac{\sin\varphi^{m-2}\,d\varphi}{\varDelta} - \int\frac{\sin\varphi^{m-2}\cos\varphi^2\,d\varphi}{\varDelta}$$

$$= \int\frac{\sin\varphi^{m-2}\,d\varphi}{\varDelta} + \frac{1}{a^2}\int\frac{\sin\varphi^{m-3}\cos\varphi\,(-a^2\sin\varphi\cos\varphi)}{\varDelta}\,d\varphi.$$

Aber

$$\frac{1}{a^2}\int\frac{\sin\varphi^{m-3}\cos\varphi\,(-a^2\sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi}{\varDelta}$$

$$= \frac{1}{a^2}\sin\varphi^{m-3}\cos\varphi.\ \varDelta - \frac{1}{a^2}\int\varDelta\,d\,(\sin\varphi^{m-3}\cos\varphi),$$

d. g. wegen

$$d\,(\sin\varphi^{m-3}\cos\varphi) = (m-3)\sin\varphi^{m-4}\,d\varphi - (m-2)\sin\varphi^{m-2}\,d\varphi:$$

$$\frac{1}{a^2}\int\sin\varphi^{m-3}\cos\varphi\,d\varDelta = \frac{\sin\varphi^{m-3}\cos\varphi.\ \varDelta}{a^2} - \frac{m-3}{a^2}\int\varDelta\sin\varphi^{m-4}\,d\varphi$$

$$+\frac{m-2}{a^2}\int\varDelta\sin\varphi^{m-2}\,d\varphi$$

$$= \frac{\sin\varphi^{m-3}\cos\varphi.\ \varDelta}{a^2} - \frac{m-3}{a^2}\int\frac{\sin\varphi^{m-4}\,d\varphi}{\varDelta} + \frac{m-2}{a^2}\int\frac{\sin\varphi^{m-2}\,d\varphi}{\varDelta}$$

$$+ (m-3)\int\frac{\sin\varphi^{m-2}\,d\varphi}{\varDelta} - \frac{(m-2)a^2}{a^2}\int\frac{\sin\varphi^m\,d\varphi}{\varDelta}.$$

Und daher folgt nun durch Substitution dieses letztern Ausdruckes in die obige Gleichung für $\int\frac{\sin\varphi^m\,d\varphi}{\varDelta}$ nach der einfachsten Reduction die zu beweisende Formel.

die für ein ungerades $m$ wegen

$$\int \frac{\sin\varphi}{\varDelta}\, d\varphi = \frac{1}{2_a} \lg \frac{a\cos\varphi - \varDelta}{a\cos\varphi + \varDelta} + \text{const.}$$

auf logarithmische, für ein gerades $m$ hingegen auf elliptische Transscendenten der ersten und zweiten Gattung zurückführt. Je nachdem also im vorliegenden Falle $n$ eine ungerade, oder gerade Zahl bezeichnet, hängt das Integral $V$ von den vollständigen elliptischen Integralen der ersten und zweiten Gattung, oder von logarithmischen Functionen ab.

---

## Verbesserungen.

Seite 152. Ueber die Berechnung der Euler'schen (Mascheroni'schen) Constanten vergleiche man noch: Oettinger. Crelle-Borchardt. Journal. Bd. 60. S. 375—376. „Ueber die richtige Werthbestimmung der Constante des Integrallogarithmus."

- 257, Anmerkung zu Zeile 5 von unten. Für den Fall einer unendlichen Discontinuität von $f(x)$ beachte man das auf Seite 252 Gesagte. Und für den Fall unendlich vieler Maxima und Minima von $f(x)$ vergleiche man Riemann: „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe." Göttingen 1867.
- 14, Anmerkung lese man Haan statt Haen.
- 31 lese man Haan statt Haen.
- 36, Anmerkung lese man Dienger statt Dinger.
- 49, Zeile 1 von oben lese man $\frac{\varphi'(\alpha)}{\psi_1(\alpha)}$ statt $\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}$.
- 68, Zeile 11 v. u. lese man vor falls ein Komma statt des Semikolons.
- 73. Statt: Vergl. §. 115 ist zu lesen: Vergl. §. 115. Insbesondere aber sehe man Schlömilch. „Ueber die harmonische Reihe." Zeitschrift für Math. u. Physik. Jahrgg. 14, S. 250.
- 164 lese man §. 62. statt §. 61.
- 272 oben lese man 272 statt 172.
- 306 lese man III statt II.
- 426, Zeile 1 v. o. setze man in dem letzten Ausdrucke rechts $\psi_1$ statt $\psi$.
- 454, Zeile 4 von unten lese man „werden sehr oft" statt werden.
- 489, Zeile 9 von unten lese man Formen statt Formem.

---

# Nachwort

**zu Meyer's Vorlesungen über bestimmte Integrale zwischen reellen Grenzen.**

---

Erst jetzt bin ich zu meinem Bedauern mit dem Inhalte der gehaltvollen Abhandlung des Hr. E. Heine in Halle a. S.: „Ueber trigonometrische Reihen" (Borchardt's Journal. Bd. 71. Heft 4. 1870) bekannt geworden. Die hierin gegebenen Lehren bilden die wissenschaftliche Ergänzung zu der Theorie der Fourier'schen Reihen; denn da nach einer von Hr. Weierstrass gemachten Bemerkung der bekannte Lehrsatz (§. 51. S. 137) über die Integration einer unendlichen Reihe nicht bloss die Convergenz derselben schlechtweg voraussetzt, sondern überdies noch verlangt, dass innerhalb des gegebenen Integrationsintervalles die vorgelegte Reihe in gleichem Grade convergirt, dies aber bei den Fourier'schen Reihen allgemein nicht der Fall ist: so kann auch der in §. 92, S. 260—262 versuchte Beweis von der Einheit der Entwicklung einer beliebigen Function in eine trigonometrische Reihe unmittelbar nicht mehr als solcher angesehen werden. Ueberhaupt bedürfen alle jene wenigen Sätze, die bloss durch Anwendung des oben berührten Lehrsatzes gewonnen sind, von Seiten des geehrten Lesers nunmehr noch einer Prüfung, ob auch wirklich die ihnen zu Grunde liegende unendliche Reihe in die Kategorie der im gleichen Grade convergirenden Reihen gehört. Als werthvolles Hülfsmittel hierzu aber ist das Studium der vorhin erwähnten Heine'schen Abhandlung nicht zu unterlassen.

Ich benutze diese Gelegenheit, um noch einige Verbesserungen und etliche sinnstörende Druckfehler, soweit sie mir bis jetzt bei einer freilich etwas flüchtigen Durchsicht meines Buches aufgefallen sind, zur Anzeige zu bringen.

Seite IV, Zeile 17 von oben lese man Entfernung statt Entferung.

„ XVI, „ 7 „ unten „ „ §. 150. Anwendung rechtwinkliger Parallelcoordinaten.

Seite 10, Zeile 15 von oben lese man $(x_{\nu+1} - x_\nu) f(x_\nu)$ statt $(x_{\nu-1} - x_\nu) f(x_\nu)$.

Seite 23, von Zeile 4 an lese man wie folgt:

d. g.
$$\frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h}$$
liegt, falls $\sigma$ ein dem abnehmenden $h$ entsprechend gewähltes, beliebig kleines Quantum vorstellt, das überdies stets absolut genommen werden darf, zuletzt immer zwischen
$$\psi(x, \alpha) + \sigma \quad \text{und} \quad \psi(x, \alpha) - \sigma.$$
Mit Benutzung dieser Beziehung aber erkennt man, dass der Quotient $\frac{u' - u}{h}$ schliesslich fortwährend zwischen
$$\int_a^b \psi(x, \alpha)\, dx \pm \sigma(b - a)$$
sich befinden muss. Da nun mit unendlich klein werdendem $h$ die Grösse $\sigma$ u. s. w. — Als Anmerkung füge man ferner unter dem Text noch folgende Worte hinzu:

Rücksichtlich der Beschränkungen, welche der Leibnitz'sche Satz erleidet, vergl. §. 75. S. 199 und §. 101. S. 294, Anmerkung.

Sind die Grenzen $a$ und $b$ nicht beide mehr endlich, oder wird die partielle Derivirte $\psi(x, \alpha)$ von $f(x, \alpha)$, welche in §. 8 nicht nur als stets endlich bleibende, sondern sogar als stetige Function von $x$ und $\alpha$ innerhalb des Integrationsintervalles $(a, b)$ vorausgesetzt wurde, für gewisse specielle Werthe von $x$ unendlich: so kann man augenscheinlich nicht unmittelbar mehr schliessen, dass das auf Seite 23 betrachtete Integral $\int_a^b \sigma dx$, welches, sofern $h$ nur klein genug gedacht wurde, zuletzt mit $\sigma(b - a)$ identificirt werden durfte, verschwinden muss. Dies lässt sich, wie mir scheint, in einem Falle der oben genannten Art aber immer behaupten, wenn das Integral $\int_a^b \psi(x, \alpha)\, dx$ einen wirklichen Sinn besitzt. Denn sind $f(x, \alpha)$ und $\psi(x, \alpha)$ in Bezug auf jedes in Betracht zu ziehende $\alpha$ stetig von $\alpha$ bis $\alpha + h$, so gilt nach §. 13 die Gleichnng
$$f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha) = h\psi(x, \alpha + h\vartheta),$$
wo $\vartheta$ zwischen 0 und 1 liegt. Daraus aber fliesst nun sogleich weiter
$$\frac{u' - u}{h} = \int_a^b \psi(x, \alpha + h\vartheta)\, dx,$$
und folglich muss, wenn mit der Null sich näherndem $h$ der Differen-

tialquotient $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ und das Integral $\int_a^b \psi\,(x,\ \alpha)\ d\ x$ endliche, bestimmte Grössen sind, wirklich die Gleichung

$$\lim \frac{u' - u}{h} = \int_a^b \frac{\partial f(x,\ \alpha)}{\partial \alpha}\ dx$$

Statt finden. Man fasst den Satz etwas enger, wenn man die andere nach §. 13 geltende Relation

$$f(x,\ \alpha + h) - f(x,\ \alpha) = h\,\psi(x,\ \alpha) + \frac{h^2}{1\ .\ 2}\,\psi'(x,\ \alpha + h\vartheta)$$

der Betrachtung zu Grunde legt. Das Verschwinden von $\int_a^b \sigma\,d\,x$ erfordert alsdann im Allgemeinen die Bedingung, dass $\int_a^b \frac{\partial^2 f(x,\ \alpha)\ dx}{\partial \alpha^2}$ niemals unendlich werden darf. Die vorhin genannten Bedingungen für das Bestehen der Leibnitz'schen Regel aber werden dadurch keineswegs aufgehoben.

Seite 25, Fig. 3 ist $F$ durch $P$ zu ersetzen.

Seite 37, Zeile 2 von unten lies *Roche* statt *Roch.* — Nach einer gefälligen Mittheilung des Hr. G. Thieme zu St. Petersburg hat Hr. Schlömilch die allgemeine Restform wohl zuerst in seinem Werke: „Handbuch der Differential- und Integralrechnung. Greifswald 1847" aufgestellt, und Mr. Roche hat die speciellere Restform in Liouville's Journal. 2. série, tome 3. 1858 bekannt gemacht

Seite 35, Zeile 1 von oben setze man $g = x + h$ statt $g = x +$

„ 35, „ 1 „ unten muss es heissen

$$\frac{h^{n+1}}{n!}\,(1 - \vartheta)^n\ \varphi^{n+1}\,(x + h\vartheta).$$

Seite 109, Zeile 2 von unten lese man gepflögenen statt geflogenen.

„ 174, „ 1 „ oben „ „ rechts $\binom{n}{2p}$ statt $\binom{u}{2p}$.

„ 174, „ 3 „ unten „ „ $\binom{a}{2p+2}$ statt $\binom{n}{2p+2}$.

„ 180, „ 14 „ oben „ „ in dem letzten Ausdruck $k$ statt $x$.

Seite 199, Zeile 15 von unten sind 2 Sternchen zu setzen.

„ 200, „ 4 „ oben lies rechts $\frac{c^2}{k^3}$ statt $\frac{c^2}{k^2}$.

„ 205—208, §§. 76, 77 ersetze man in den Integralen das gerade l überall durch ein liegendes *l*.

Seite 206, Zeile 10 v. o. lies im Integrale $c$ statt $-c$.

„ 209, Formel 3 lese man $\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}$ statt $\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(a)}$.

„ 212, „ $8^a$ setze man rechts wieder ein liegendes $l$.

„ 248, Zeile 2 von unten lese man dies statt die.

„ 250, „ 10 „ oben lies $\int_b^c$ statt $\int_c^b$.

„ 260, „ 4 „ „ „ willkürlich.

„ 261, Zeile 12 und 14 hätten die Formeln zur Vermeidung jedes Missverständnisses wegen der bedingten Convergenz der Fourier'schen Reihen in der richtigern Form

$$\beta_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\,dx\,(\beta_n \cos nx + \alpha_n \sin nx) \quad \text{etc.}$$

geschrieben werden sollen.

Seite 266, Zeile 13 von oben lies $b_0 = \frac{\pi}{2}$.

„ 279, „ 1 u. 5 von unten setze man 2 Sternchen

„ 291, „ 3 von unten lese man Form statt Formel.

Seite 367, Zeile 11 von oben ist zwischen „für“ und „alle“ ein $s$ einzuschalten.

Seite 448, Zeile 13 von unten lies welchem.

„ 451, „ 15 „ oben lese man $V'$ statt $V$.

„ 461, „ 18 „ unten lies deren statt dessen.

„ 476, „ 8 „ oben setze $\frac{1}{\cos\psi'}$ statt $\frac{1}{\cos\psi}$.

„ 479, „ 5 „ „ lese man erwähnte.

„ 509, „ 9 „ unten streiche „eine“.

„ 542, „ 6 „ „ lies bestimmte.

„ 545, „ 1 „ „ lese man 451 statt 551.

„ 552, „ 6 „ „ „ „ besondere.

„ 592, „ 2 „ unten lies im Integral $\vartheta^{\frac{n}{2}-1}$ statt $\vartheta^{\frac{}{2}-1}$.

„ 601, „ 7 „ „ streiche man hinter „undern“ das Komma.

Seite 619, „ 6 „ „ lies bekannte.

Hannover, im October 1871.

Dr. Meyer.







